



ournal

für die

angewandte Mathematik.

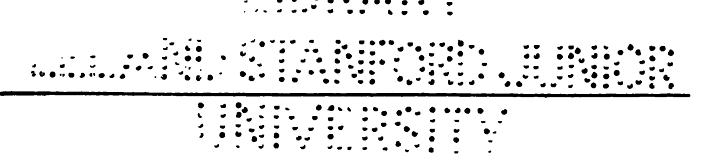
wanglosen Heften.

Herausgegeben

von

. L. Crelle.

lerung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Zwei und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1851.
Bei G. Reimer.
Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier),
Libraire pour les Mathematiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des zwei und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Auszug eines Schreibens des Herrn Director P. A. Hansen an Herrn Professor C. G. J. Jacobi.

Gotha den 21. November 1850.

In Betreff des von mir mit v_1 bezeichneten Bogens, über welchen ich Ihnen mehrere höchst interessante und lehrreiche Gespräche und Briefe verdanke, bin ich endlich auf folgende Betrachtungen gekommen, von welchen ich glaube, dafs sie die Sache klar machen.

Ich fange bei dem Satze an, den ich in der Ihnen handschriftlich mitgetheilten Abhandlung den *zweiten* nenne. Diesen habe ich, wie Sie wissen, bisher wie folgt ausgesprochen:

„Wenn L eine Function blofs von den auf *feste* rechtwinkliche Achsen „bezogenen Coordinaten x, y, z eines Planeten oder Satelliten ist, und $\varLambda$ die „Function bedeutet, in die L übergeht, wenn man darin v statt t substituirt, „in so fern die Zeit t nicht in den, in den Ausdrücken für x, y, z enthaltenen „veränderlichen willkürlichen Constanten vorkommt, dann ist in der gestörten „Bewegung, wie in der ungestörten,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial \varLambda}{\partial \tau}\right)},$$

„wo der Strich über der Function bedeutet, dafs man nach der Differentiation „τ in t verwandeln soll."

Dieser Satz ist einer gröfseren Ausdehnung fähig, die ich, um möglichst kurz zu sein, mit einer Erklärung einleiten werde, welche den von Ihnen angewandten *Terminus technicus* betrifft.

Erklärung.

„*Ideale Coordinaten* nenne ich alle Systeme von Coordinaten, die die „Eigenschaft besitzen, dafs ihre ersten Differentiale in Bezug auf die Zeit in „der gestörten Bewegung dieselbe Form haben wie in der ungestörten."

Zweiter Satz.

„Wenn L eine Function blofs von idealen Coordinaten ist, ohne deren „Differentiale oder die veränderlichen willkürlichen Constanten sonst zu ent- „halten, und Λ die Function bedeutet (etc. wie oben), dann ist (etc. wie oben)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \overline{\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau}\right)}.\text{“}$$

Es mufs nun auseinandergesetzt werden, welche Coordinaten *ideale* sind. Zuvörderst sind die auf feste rechtwinkliche Achsen bezogenen Coordinaten x, y, z solche, denn für sie bestehen die folgenden Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} 0 = \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)\partial b + \text{etc.} \\ 0 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)\partial b + \text{etc.} \\ 0 = \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)\partial a + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)\partial b + \text{etc.,} \end{cases}$$

wo a, b, etc. die durch die Integration der Gleichungen der ungestörten Bewegung eingeführten willkürlichen Constanten bedeuten. Sei nun X, Y, Z irgend ein andres System von rechtwinklichen Coordinaten, und α, β, etc. die Cosinusse der Winkel, die die Achsen dieser Coordinaten mit denen jener machen, dann ist bekanntlich

$$(2.)\quad \begin{cases} x = \alpha X + \beta Y + \gamma Z \\ y = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z \\ z = \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ Z = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{cases} \quad (3.)$$

Wären nun α, β, etc. constante Gröfsen, so wäre ohne Weiteres X, Y, Z ein System idealer Coordinaten. Nehmen wir aber α, β, etc. als veränderliche Gröfsen, und zwar als Functionen der eben genannten willkürlichen Constanten an, dann werden X, Y, Z nur dann ideale Coordinaten, wenn wir die folgenden Bedingungsgleichungen aufstellen:

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 = x\,\partial\alpha + y\,\partial\alpha' + z\,\partial\alpha'' \\ 0 = x\,\partial\beta + y\,\partial\beta' + z\,\partial\beta'' \\ 0 = x\,\partial\gamma + y\,\partial\gamma' + z\,\partial\gamma''. \end{cases}$$

Denn vermöge der Gleichungen (1.) und (4.) ist es klar, dafs nun erst die ersten Differentiale von (3.) in Bezug auf die Zeit dieselbe Form haben, man mag die in x, y, z, α, β, etc. enthaltenen willkürlichen Constanten veränderlich setzen oder nicht.

Untersuchen wir die Gleichungen (4.) näher. Substituiren wir in (4.) die Gleichungen (3.), und setzen zur Abkürzung,

$$(5.)\quad \begin{cases} \beta\partial\alpha+\beta'\partial\alpha'+\beta''\partial\alpha'' = C\partial t \\ \alpha\partial\gamma+\alpha'\partial\gamma'+\alpha''\partial\gamma'' = B\partial t \\ \gamma\partial\beta+\gamma'\partial\beta'+\gamma''\partial\beta'' = A\partial t, \end{cases}$$

dann geben, in Folge der bekannten, zwischen α, β, etc. Statt findenden Bedingungsgleichungen, die Gleichungen (4.) in folgende über:

$$(6.)\quad 0 = CY - BZ, \quad 0 = CX - AZ, \quad 0 = BX - AY,$$

die aber ersichtlich nur *zwei* wesentlich von einander verschiedene Gleichungen bilden. Es ist also jede der Gleichungen (4.) nothwendige Folge der beiden andern.

Da nun jedes bestimmte Coordinatensystem von *drei* von einander unabhängigen Gröfsen oder Bedingungen abhängt, so folgt, dafs durch die Gleichungen (3.) und (4.) eine (streng unendlich) grofse Anzahl von idealen Coordinatensystemen gegeben ist. Da ferner die Veränderlichkeit von α, β, etc. die Veränderlichkeit der Achsen dieser Coordinatensysteme mit sich bringt, so beziehen sich alle durch (3.) und (4.) gegebenen idealen Coordinatensysteme auf bewegliche Achsen. Ich führe hiebei noch folgenden Satz an:

„In allen auf bewegliche Achsen bezogenen Systemen idealer Coordi-
„naten eines Planeten oder Satelliten fällt die instantane Drehungs-Achse stets
„mit dem Radius-Vector des Planeten oder Satelliten zusammen."

Die Cosinusse der Winkel zwischen der instantanen Drehungs-Achse und den Achsen der x, y, z sind bekanntlich, resp.

$$\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\quad \frac{\alpha' A+\beta' B+\gamma' C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},\quad \frac{\alpha'' A+\beta'' B+\gamma'' C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

und die Cosinusse der Winkel zwischen dem Radius-Vector und diesen Achsen,

$$\frac{\alpha X+\beta Y+\gamma Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},\quad \frac{\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},\quad \frac{\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}}.$$

Es geben aber die Gleichungen (6.),

$$\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \frac{X}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

$$\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \frac{Y}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

$$\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}} = \frac{Z}{\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}},$$

durch deren Substitution in die vorstehenden Ausdrücke der Satz erwiesen ist.

Um irgend ein auf bewegliche Achsen bezogenes ideales Coordinatensystem zu erhalten, dürfen wir dem Vorhergehenden zufolge den Gleichungen (4.) irgend eine willkürliche Bedingung binzufügen, die nur dadurch beschränkt ist, dafs sie den Gleichungen (4.) oder (6.) nicht widersprechen darf. Ich werde daher im Folgenden annehmen, dafs für den Ort des Planeten oder Satelliten stets $Z=0$ sei. Hiemit ergeben sich statt (2.) und (3.) die folgenden Gleichungen:

$$(7.)\quad \begin{cases} x = \alpha X+\beta Y \\ y = \alpha' X+\beta' Y \\ z = \alpha'' X+\beta'' Y \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{rcases} X = \alpha x+\alpha' y+\alpha'' z \\ Y = \beta x+\beta' y+\beta'' z \\ 0 = \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z \end{rcases} \quad (8.)$$

und statt der Gleichungen (6.) erhalten wir $C=0$, $BX-AY=0$, oder welches dasselbe ist *)

$$(9.)\quad \begin{cases} 0 = \beta\partial\alpha+\beta'\partial\alpha'+\beta''\partial\alpha'' \\ 0 = (\alpha\partial\gamma+\alpha'\partial\gamma'+\alpha''\partial\gamma'')X-(\gamma\partial\beta+\gamma'\partial\beta'+\gamma''\partial\beta'')Y. \end{cases}$$

Ich werde nun beweisen, dafs v_1 in der That eine blofse Function der idealen Coordinaten X, Y ist. Ich bezeichne, wie Sie wissen, mit ∂v_1 den Winkel zwischen den, den Zeiten t und $t+\partial t$ entsprechenden Radii-Vectores r und $r+\partial r$ eines Planeten oder Satelliten. Wir haben demzufolge die Gleichung,

$$r^2\partial v_1^2+\partial r^2 = \partial x^2+\partial y^2+\partial z^2,$$

die leicht in folgende umgewandelt werden kann,

$$\partial v_1 = \frac{\sqrt{((x\partial y-y\partial x)^2+(y\partial z-z\partial y)^2+(z\partial x-x\partial z)^2)}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Die Differentiale von (7.) und (8.) sind in der gestörten wie ungestörten Bewegung,

$$(10.)\quad \begin{cases} \partial x = \alpha\,\partial X+\beta\,\partial Y \\ \partial y = \alpha'\partial X+\beta'\partial Y \\ \partial z = \alpha''\partial X+\beta''\partial Y \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{rcases} \partial X = \alpha\partial x+\alpha'\partial y+\alpha''\partial z \\ \partial Y = \beta\partial x+\beta'\partial y+\beta''\partial z \\ 0 = \gamma\partial x+\gamma'\partial y+\gamma''\partial z \end{rcases} \quad (11.)$$

Combinirt man diese Gleichungen mit den Gleichungen (7.) und (8.), so bekommt man aus den einen,

$$\begin{aligned} x\partial y-y\partial x &= (\alpha\beta'-\alpha'\beta)(X\partial Y-Y\partial X) \\ y\partial z-z\partial y &= (\alpha'\beta''-\alpha''\beta')(X\partial Y-Y\partial X) \\ z\partial x-x\partial z &= (\alpha''\beta-\alpha\beta'')(X\partial Y-Y\partial X), \end{aligned}$$

---

*) *Lagrange* hat diese Gleichungen nicht bemerkt, denn obgleich er das Coordinatensystem (7.) anwendet, setzt er doch (Méc. anal. Tome II. p. 96)

$$\beta\partial\alpha+\beta'\partial\alpha'+\beta''\partial\alpha'' = \partial\chi.$$

und aus den andern,

$$X\partial Y - Y\partial X = (\alpha\beta' - \alpha'\beta)(x\partial y - y\partial x) + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta')(y\partial z - z\partial y)$$
$$+ (\alpha''\beta - \alpha\beta'')(z\partial x - x\partial z),$$

also durch die Elimination von $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, etc.

$$(X\partial Y - Y\partial X)^2 = (x\partial y - y\partial x)^2 + (y\partial z - z\partial y)^2 + (z\partial x - x\partial z)^2.$$

Erwägen wir noch, dafs $X^2 + Y^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist, so geht die obige Gleichung für ∂v_1 in folgende über,

$$\partial v_1 = \frac{X\partial Y - Y\partial X}{X^2 + Y^2},$$

wovon, wenn wir die willkürliche Constante $= 0$ machen, das Integral

$$(12.) \qquad v_1 = \text{arc tg}\,\frac{Y}{X}$$

ist. Also v_1 ist Function blofs der idealen Coordinaten X und Y, und der obige zweite Satz findet auf v_1 Anwendung.

Ich erlaube mir die weiteren Folgerungen, die ich auf analytischem Wege aus den obigen Formeln gezogen habe, hier anzuführen, da mir nicht bekannt ist, dafs sie von irgend einem Andern gegeben worden wären. *Lagrange* hat schon die Gleichungen (7.) angewandt, aber die Folgerungen, die ich hier daraus ziehen werde, finden sich nicht bei ihm. Wegen der Bedingungsgleichung

$$0 = \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta''$$

giebt die erste Gleichung (9.), nemlich

(13.) $\begin{cases} 0 = \beta\partial\alpha + \beta'\partial\alpha' + \beta''\partial\alpha'', \\ \text{die folgende,} \\ 0 = \alpha\partial\beta + \alpha'\partial\beta' + \alpha''\partial\beta''. \end{cases}$

Diesen kann man zufolge der Gleichungen $\alpha\,d\alpha + \alpha'\,d\alpha' + \alpha''\,d\alpha'' = 0$, $\beta\,d\beta + \beta'\,d\beta' + \beta''\,d\beta'' = 0$, und der zwischen α, β, etc. bestehenden Bedingungsgleichungen,

$$0 = \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'', \qquad 0 = \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'',$$

durch die folgenden Genüge leisten, in denen μ und μ' beliebig sind,

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= \gamma\mu\,\partial p, & \partial\beta &= \gamma\mu'\,\partial q \\ \partial\alpha' &= \gamma'\mu\,\partial p, & \partial\beta' &= \gamma'\mu'\,\partial q \\ \partial\alpha'' &= \gamma''\mu\,\partial p, & \partial\beta'' &= \gamma''\mu'\,\partial q. \end{aligned}$$

Um den Buchstaben p und q dieselbe Bedeutung zu geben, die ich denselben in meinen Abhandlungen beigelegt habe, setze ich $\mu = -\frac{1}{\gamma''}$, $\mu' = \frac{1}{\gamma''}$, wodurch sich ergiebt:

$$(14.)\quad \begin{cases} \partial\alpha \;\; = -\frac{\gamma}{\gamma''}\partial p, & \partial\beta \;\; = \frac{\gamma}{\gamma''}\partial q \\ \partial\alpha' \;= -\frac{\gamma'}{\gamma''}\partial p, & \partial\beta' \;= \frac{\gamma'}{\gamma''}\partial q \\ \partial\alpha'' = -\partial p, & \partial\beta'' = \partial q. \end{cases}$$

Wir erhalten daher geradezu

$$p = -\alpha'', \quad q = \beta''.$$

Die zweite Gleichung (9.) kann auch so geschrieben werden,

$$0 = (\gamma\partial\alpha + \gamma'\partial\alpha' + \gamma''\partial\alpha'')X + (\gamma\partial\beta + \gamma'\partial\beta' + \gamma''\partial\beta'')Y.$$

Substituiren wir die Gleichungen (14.) hierin, so erhalten wir,

$$(15.)\quad 0 = X\partial p - Y\partial q.$$

Betrachten wir nun die *zweiten* Differentiale der Gleichungen (8.), d. i. die ersten der Gleichungen (11.). Diese sind,

$$\begin{aligned} \partial^2 X &= \alpha\partial^2 x + \alpha'\partial^2 y + \alpha''\partial^2 z + \partial\alpha\partial x + \partial\alpha'\partial y + \partial\alpha''\partial z \\ \partial^2 Y &= \beta\partial^2 x + \beta'\partial^2 y + \beta''\partial^2 z + \partial\beta\partial x + \partial\beta'\partial y + \partial\beta''\partial z \\ 0 &= \gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z + \partial\gamma\partial x + \partial\gamma'\partial y + \partial\gamma''\partial z. \end{aligned}$$

Wegen der Gleichungen (14.) und der letzten Gleichung (11.) gehen die beiden ersten vorstehenden sofort in folgende über,

$$(16.)\quad \begin{cases} \partial^2 X = \alpha\partial^2 x + \alpha'\partial^2 y + \alpha''\partial^2 z \\ \partial^2 Y = \beta\partial^2 x + \beta'\partial^2 y + \beta''\partial^2 z. \end{cases}$$

Die dritte der vorstehenden Gleichungen geht durch die Gleichung (10.) zuerst in folgende über,

$$0 = \gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z + (\alpha\partial\gamma + \alpha'\partial\gamma' + \alpha''\partial\gamma'')\partial X + (\beta\partial\gamma + \beta'\partial\gamma' + \beta''\partial\gamma'')\partial Y,$$

oder in folgende,

$$0 = \gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z - (\gamma\partial\alpha + \gamma'\partial\alpha' + \gamma''\partial\alpha'')\partial X - (\gamma\partial\beta + \gamma'\partial\beta' + \gamma''\partial\beta'')\partial Y,$$

also erhalten wir vermittelst der Gleichungen (14.),

$$(17.)\quad \partial X\partial p - \partial Y\partial q = -\gamma''\{\gamma\partial^2 x + \gamma'\partial^2 y + \gamma''\partial^2 z\}.$$

Nennen wir nun die Störungsfunction Ω, und setzen die Summe der Massen der Sonne und des Planeten $= 1$, dann können wir die Gleichungen

für die gestörte Bewegung, wie folgt, darstellen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\frac{x}{r^3} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{y}{r^3} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\frac{z}{r^3} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right).$$

Aber wenn wir hier einen Augenblick $Z = \gamma x+\gamma' y+\gamma'' z$ setzen, so können wir Ω als Function von X, Y, Z betrachten und erhalten sofort:

$$\alpha\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)+\alpha'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)+\alpha''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X}\right)$$
$$\beta\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)+\beta'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)+\beta''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)$$
$$\gamma\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)+\gamma'\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)+\gamma''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right).$$

Um in den Ausdrücken rechter Hand zu den hier angewandten Coordinaten X und Y überzugehen, brauchen wir nur nach den partiellen Differentiationen von Ω die Coordinate $Z=0$ zu machen.

Durch Hülfe dieser Gleichungen gehen die Gleichungen (16.) in folgende über:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2}+\dfrac{X}{r^3} = \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial X}\right) \\ \dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+\dfrac{Y}{r^3} = \left(\dfrac{\partial \Omega}{\partial Y}\right), \end{cases}$$

die genau dieselbe Form haben, wie die für x und y. Die Gleichung (17.) wird ferner,

$$\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial Y}{\partial t}\frac{\partial q}{\partial t} = -\gamma''\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right),$$

und hieraus mittelst (15.), d. i. mittelst $X\frac{\partial p}{\partial t}-Y\frac{\partial q}{\partial t}=0$,

$$\frac{X\partial Y-Y\partial X}{\partial t}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} = \gamma'' Y\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)$$
$$\frac{X\partial Y-Y\partial X}{\partial t}\cdot\frac{\partial q}{\partial t} = \gamma'' X\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right).$$

Nehmen wir jetzt das aus der Theorie der Veränderung der willkürlichen Constanten entspringende Ergebnifs auf, dafs der Planet in jedem Zeittheilchen ∂t sich nach den *Keppler*schen Gesetzen in einer, seine wirkliche Bahn

osculirenden Ellipse bewegt. Da zufolge des Obigen die Ebene der X, Y stets durch die Sonne und durch die zwei Örter des Planeten geht, die den Zeiten t und $t+\partial t$ entsprechen, so ist es diese Ebene, in welcher alle osculirenden Ellipsen construirt werden müssen. Die Gleichungen (18.) geben demzufolge auf bekannte Art, sowohl in der gestörten, wie in der ungestörten Bewegung,

$$\frac{X\partial Y - Y\partial X}{\partial t} = \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{an},$$

wenn a die halbe grofse Achse, n die mittlere Bewegung und ae die Excentricität des Planeten bedeuten. Hiermit wird

$$(19.)\quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = \gamma'' Y \frac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) \\ \frac{\partial q}{\partial t} = \gamma'' X \frac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right), \end{cases}$$

und diese Gleichungen bilden in Verbindung mit den Gleichungen (18.) ein vollständiges System von Gleichungen der gestörten Bewegung eines Planeten, indem die Örter desselben im Raume durch die vier Gröfsen X, Y, p und q vollständig bestimmt sind. Um dieses zu zeigen, will ich die obigen Gleichungen für die Coordinaten weiter entwickeln.

Aus der Gleichung (12.) geht hervor, dafs der Winkel (oder Kreisbogen) v_1 stets in der Ebene der X, Y liegt und sich von der positiven Achse der X bis zum Radius-Vector r erstreckt. Nennen wir daher die wahre Anomalie des Planeten f, und den Winkel zwischen der positiven Achse der X und dem Perihel χ, dann ist, weil die osculirende Ellipse stets in der Ebene der X, Y liegt,

$$v_1 = f + \chi.$$

Betrachten wir nun die Verbindung der beweglichen Ebene der XY mit der festen der xy, welche letztere sowohl, wie die in derselben liegende feste Achse der x, wir im Raume irgendwie gelegen annehmen. Sei

i die Neigung der Ebene der XY gegen die der xy;

ϑ in der Ebene der xy der Winkel zwischen der Achse der positiven x und dem Theile der Durchschnittslinie der Ebenen der XY und der xy, durch welchen sich der Planet bewegt, wenn die z vom Negativen ins Positive übergehen;

ω in der Ebene der XY der Winkel zwischen dem eben bezeichneten Theile derselben Durchschnittslinie und dem Perihel des Planeten.

Da nun

$$X = r\cos v_1, \qquad Y = r\sin v_1,$$

so ergiebt sich, wenn

$$\sigma = \chi - \omega$$

den Winkel zwischen der Achse der positiven X und jenem Theil der Durchschnittslinie bedeutet,

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\sigma\cos\vartheta + \sin\sigma\sin\vartheta\cos i \\
\alpha' &= \cos\sigma\sin\vartheta - \sin\sigma\cos\vartheta\cos i \\
\alpha'' &= -\sin i\sin\sigma \\
\beta &= \sin\sigma\cos\vartheta - \cos\sigma\sin\vartheta\cos i \\
\beta' &= \sin\sigma\sin\vartheta + \cos\sigma\cos\vartheta\cos i \\
\beta'' &= \sin i\cos\sigma \\
\gamma &= \sin i\sin\vartheta \\
\gamma' &= -\sin i\cos\vartheta \\
\gamma'' &= \cos i.
\end{aligned}$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen (7.) substituirt, und v_1 und σ durch die Gleichungen $v_1 = f + \chi$, $\sigma = \chi - \omega$ eliminirt, so gehen daraus die bekannten allgemeinsten Ausdrücke der Coordinaten x, y, z hervor.

Durch die Gleichungen (14.) hatten wir $p = -\alpha''$, $q = \beta''$; es ist daher auch

$$p = \sin i\sin\sigma, \qquad q = \sin i\cos\sigma,$$

oder p der Sinus des Winkels, den die Achse der X, und q der Sinus des Winkels, den die Achse der Y mit der Ebene der xy macht; p und q liegen beide im ersten Quadranten, wenn die Achse der Y sich über und die Achse der X sich unter der Ebene der xy befindet.

Differentiiren wir die obigen Ausdrücke von α, α' und α'', indem wir σ, ϑ und i veränderlich setzen, dann ergiebt sich leicht,

$$\begin{aligned}
\partial\alpha &= -\beta\,\partial\sigma - \alpha'\,\partial\vartheta - \gamma\sin\sigma\,\partial i \\
\partial\alpha' &= -\beta'\,\partial\sigma + \alpha\,\partial\vartheta - \gamma'\sin\sigma\,\partial i \\
\partial\alpha'' &= -\beta''\,\partial\sigma \qquad\quad - \gamma''\sin\sigma\,\partial i.
\end{aligned}$$

Substituiren wir diese Formeln in die erste Gleichung (9.), nemlich in

$$0 = \beta\,\partial\alpha + \beta'\,\partial\alpha' + \beta''\,\partial\alpha'',$$

so bekommen wir wegen

$$\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \quad \alpha\beta' - \alpha'\beta = \gamma'' = \cos i:$$

$$\partial\sigma = \cos i\,\partial\vartheta.$$

die grofse Achse der veränderlichen Ellipse ist, und ihre eigne Bewegung behält, selbst wenn die Ebene der Bahn unverändert bliebe; wie dies bei dem Problem der drei Körper, in der Ebene der Fall ist. Was bei Ihnen X und Y ist, würde, in den *Lagrangeschen* Coordinaten ausgedrückt, $\cos\chi . X - \sin\chi . Y$ und $\sin\chi . X + \cos\chi . Y$ sein. Der Winkel χ ist aber kein Element in der gewöhnlichen, oben angegebnen Bedeutung. Diese Gröfse läfst sich nicht mittelst der blofsen Gleichungen des ungestörten Problems durch die Coordinaten, ihre ersten Differentialquotienten und die Zeit ausdrücken; sie hat daher nicht nur nicht dieselbe Bedeutung im gestörten wie im ungestörten Problem, sondern sie hat vielmehr in der ungestörten Bewegung gar keine Bedeutung. Nur für eine ganz individuelle Zeitbestimmung könnte man den Winkel χ eine Beziehung zu den elliptischen Elementen geben, aber dann auch wieder eine ganz beliebige.

Was soll daraus werden, möchte ich fragen, wenn man Gröfsen, wie

$$\sigma = \int \cos i \, d\vartheta,$$

eine Function der Elemente nennen will? Denn man will doch wohl nicht blofs sagen, dafs man sie ja nach Integration der Störungsgleichungen so ausdrücken kann, denn dies gälte von allen Veränderlichen überhaupt, und wäre daher durchaus nichts sagend. Will man σ eine Function von ϑ allein nennen, wie kann dann $\frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta}$ eine Function von i sein? Sagt man, dafs σ eine Function von ϑ und i ist, wie kann dann $\frac{\partial \sigma}{\partial i} = 0$ sein, wie doch von Ihnen und andern angesetzt wird? Nennt man

$$U = \int (A\,da + B\,db + C\,dc + \text{etc.})$$

auch dann eine Function von a, b, c etc., wenn der Differentialausdruck nicht den Bedingungen der Integrabilität genügt, so hat man Functionen, bei welchen es nicht mehr gleichgültig ist, in welcher Ordnung man differentiirt, sondern es werden im Gegentheil (ohne dafs hier ein Unendlichwerden in's Spiel kommt) die Ausdrücke

$$\frac{\partial \frac{\partial U}{\partial a}}{\partial b} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \frac{\partial U}{\partial b}}{\partial a}$$

in gar keiner Beziehung zu einander stehen. So folgen aus den Gleichungen,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial i} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \vartheta} = \cos i,$$

die beiden Gleichungen,

$$\frac{\partial\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial i}}{\partial\vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial\vartheta}}{\partial i} = -\sin i.$$

Es hören hier also alle Vorstellungen auf, die man gewöhnlich mit dem Begriff einer Function und partieller Differentialquotienten verbindet.

Wenn Sie in Ihrem geehrten Schreiben sagen, man könne die Störungsfunction Ω als Function der Gröfsen X, Y, p, q betrachten, indem die Örter des Planeten durch diese vier Gröfsen vollständig bestimmt seien, so ist doch anderseits klar, dafs wenn die einer bestimmten Zeit entsprechenden numerischen Werthe von X, Y, p, q gegeben sind, man nur die Gröfse des Radiusvectors, aber nicht seine Lage im Raum kennt. Man kann daher auch nicht sagen, dafs die Gröfsen x, y, z, die den Planetenort unmittelbar bestimmen, durch die Gröfsen X, Y, p, q ersetzt werden. Man kann sich Ω als eine *Function* der Gröfsen X, Y, p, q, die in ihrer Form bestimmt wäre, was nöthig ist, wenn man sie nach diesen einzelnen Gröfsen partiell differentiiren will, gar nicht denken, wenigstens in Folge solcher Gleichungen nicht, durch welche Ω als Function dieser Gröfsen bestimmt werden soll.

Lagrange gebraucht bei einer ähnlichen uneigentlichen Ausdrucksweise doch die Vorsicht, solche Integrale, wie Ihr σ, nicht geradezu eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten zu nennen. Indem er zuerst S. 96 des 2ten Theils der *Mécanique Analytique*

$$d\chi = \beta\, d\alpha + \beta_1\, d\alpha_1 + \beta_2\, d\alpha_2$$

setzt, warnt er noch gewissermafsen davor, χ für eine Function der veränderlichen Elemente zu halten, indem er in Parenthese hinzufügt, „ich wende den Differentialausdruck $d\chi$ an, obgleich sein Werth kein vollständiges Differential ist"; S. 99 nennt er diesen Differentialausdruck (aber nicht χ selber) eine Function der veränderlichen Constanten; endlich nennt er auch S. 101 χ selbst ein Element, und differentiirt S. 102 Ω partiell nach χ.

Es geht aus dem Vorstehenden hervor, dafs das Zeichen $\frac{d\Omega}{d\chi}$ bei *Lagrange*, oder die Zeichen $\frac{d\Omega}{dp}$, $\frac{d\Omega}{dq}$ bei Ihnen, eine bestimmte Bedeutung haben, welche die Rechnung feststellt, ohne dafs Ω als eine Function von χ oder von p und q berachtet werden kann. Weil demnach diese Symbole keine wirklichen Differentialquotienten sind, sondern nur conventionellen

2.

Auszug zweier Schreiben des Professor Jacobi an Herrn Director Hansen.

I.

Berlin, den 15. December 1850.

Erlauben Sie, dafs ich auf Ihre gütige Mittheilung des leichten und eleganten Weges, auf welchem Sie zu einer eigenthümlichen und merkwürdigen Form der Störungsgleichungen gelangen, mit einigen Betrachtungen rein formeller Art antworte. Sie sollen die ungewöhnliche Bedeutung betreffen, welche Lagrange, Sie selbst und andere bisweilen mit den Worten *Function* und *Element* und den Zeichen der *partiellen Differentialquotienten* verbinden.

Veränderliche willkürliche Constanten oder *Elemente* sind in der Theorie der Störungen gewisse Functionen der Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit genannt worden, welche in der ungestörten elliptischen Bewegung einer willkürlichen Constante gleich werden, oder deren Differential durch die Substitution der Differentialgleichungen des ungestörten Problems identisch verschwindet. Diese Functionen haben die Eigenschaft, dafs sie in der gestörten Bewegung von wirklichen Constanten nur um kleine Gröfsen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden bleiben. Nennt man die Function der Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten (der Componenten der Geschwindigkeit) und der Zeit, welche einem Elemente gleich ist, die *Bedeutung* dieses Elements, so kann man sagen, dafs jedes Element in der gestörten Bewegung dieselbe Bedeutung wie in der ungestörten hat.

Da die sechs Elemente denselben Functionen der drei Coordinaten, ihrer ersten Differentialquotienten und der Zeit im gestörten und ungestörten Problem gleich sind, so sind auch umgekehrt die drei Coordinaten und ihre ersten Differentialquotienten im gestörten wie im ungestörten Problem denselben Functionen der sechs Elemente und der Zeit gleich. Es folgt hieraus der bekannte Satz, der auch wohl zur Definition der veränderlichen Elemente zu dienen pflegt, dafs in den ersten Differentialen der Ausdrücke der Coordinaten durch die Elemente und die Zeit der aus der Veränderlichkeit der Elemente hervorgehende Theil verschwindet. Man erweitert diesen Satz leicht

dahin, dafs man von jeder Gleichung zwischen den Coordinaten, den Elementen und der Zeit, $u = 0$, welche gleichzeitig im gestörten wie im ungestörten Problem gilt, das erste Differential so nehmen kann, als wären die Elemente constant, und dafs in du der von der Veränderlichkeit der Elemente, so weit sie in u *explicite* vorkommen, herrührende Theil besonders verschwindet.

Keine Function der Elemente und der Zeit, welche sich nicht auf eine Function der Coordinaten und der Zeit (oder auch auf eine wirkliche Constante) reduciren läfst, kann die Eigenschaft der Coordinaten haben, dafs ihr erster Differentialquotient im gestörten Problem durch dieselbe Function der Elemente und der Zeit ausgedrückt wird, wie im ungestörten.

Aber Sie haben ja solche Functionen X und Y angegeben, welche diese Eigenschaft besitzen, und sich doch auf keine Weise auf Functionen blofs von x, y, z, t reduciren lassen. Die Antwort hierauf ist, *dafs in Ihren Gleichungen,*

$$X = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$$
$$Y = \beta x + \beta' y + \beta'' z,$$

die 6 Gröfsen α, β, α' etc. keine Elemente sind, und daher auch X und Y keine Functionen der Elemente und der Zeit sind. Nur die drei Coëfficienten γ, γ', γ'' sind wirkliche Elemente.

In den ähnlichen Gleichungen bei *Lagrange* sind die Coëfficienten α, β, α_1 etc. Elemente. Aber dafür finden bei ihm auch nicht die Gleichungen,

$$x\,d\alpha + y\,d\alpha_1 + z\,d\alpha_2 = 0$$
$$x\,d\beta + y\,d\beta_1 + z\,d\beta_2 = 0$$

Statt. Es scheint mir, dafs Sie *Lagrange* und Sich selbst Unrecht thun, wenn Sie ihm vorwerfen, dafs er die Gleichung,

$$\beta\,d\alpha + \beta_1\,d\alpha_1 + \beta_2\,d\alpha_2 = 0,$$

nicht hat, und nicht in weitere Entwicklungen eingegangen ist. Diese Gleichung gilt bei ihm eben so wenig, wie die beiden vorhergehenden. Das von Ihnen gewählte Coordinatensystem ist von dem seinigen auf das wesentlichste verschieden und Ihnen durchaus eigenthümlich, und darum konnte er die aus der eigenthümlichen Natur des Ihrigen fliefsenden Folgerungen nicht machen.

Ihre Xachse ist eine Linie, die in der Bahnebne keine eigene Bewegung hat, in derselben fest ist, und sich nur dadurch im Raum fortbewegt, dafs die Bahnebene um die verschiednen Radiivectoren pivotirt; während die Xachse bei *Lagrange*

Diese Gleichung, die ich früher auf geometrischem Wege abgeleitet habe, ist also nothwendige Folge der hier eingeführten Gleichungen (9.). Die beiden willkürlichen Constanten σ und ϑ müssen wegen dieser Gleichung als von einander abhängige betrachtet werden; allein es bleiben demungeachtet in den obigen Ausdrücken *sechs*, von einander unabhängige willkürliche Constanten übrig. Es enthalten nemlich r und f *drei*, und zwar die grofse Achse, die Excentricität und die mittlere Anomalie in der Zeitepoche; dazu kommen noch die *drei* unabhängigen willkürlichen Constanten χ, σ, i, wofür man auch χ, p, q wählen kann.

Ich erwähne noch, dafs die vorstehenden Betrachtungen auch auf die Theorie der Rotationsbewegung angewandt werden können, und dafs die Differentiale $\frac{\partial\chi}{\partial t}$, $\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{\partial q}{\partial t}$ mit den in dieser Theorie vorkommenden drei instantanen Drehungsgeschwindigkeiten in engster Beziehung stehen. Auch möchte in der allgemeinen Theorie der Curven von doppelter Krümmung das hier angewandte Coordinatensystem X, Y von wesentlichem Nutzen sein.

Die oben angeführten Ausdrücke für α, α', etc. geben leicht:

$$\alpha\cos(\vartheta-\sigma)+\alpha'\sin(\vartheta-\sigma) = \cos^2\sigma+\sin^2\sigma\cos i = 1-\frac{p^2}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$-\alpha\sin(\vartheta-\sigma)+\alpha'\cos(\vartheta-\sigma) = \sin\sigma\cos\sigma(1-\cos i) = \frac{pq}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$\beta\cos(\vartheta-\sigma)+\beta'\sin(\vartheta-\sigma) = \sin\sigma\cos\sigma(1-\cos i) = \frac{pq}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$-\beta\sin(\vartheta-\sigma)+\beta'\cos(\vartheta-\sigma) = \sin^2\sigma+\cos^2\sigma\cos i = 1-\frac{q^2}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Die Gleichungen

$$p = \sin i\sin\sigma, \qquad q = \sin i\cos\sigma$$

geben

$$q\,\partial p - p\,\partial q = \sin^2 i\,\partial\sigma.$$

Es folgt ferner aus $\partial\sigma = \cos i\,\partial\vartheta$,

$$\partial(\vartheta-\sigma) = (1-\cos i)\,\partial\vartheta = \frac{1-\cos i}{\cos i}\partial\sigma = \frac{\sin^2 i\,\partial\sigma}{\cos i(1+\cos i)},$$

und daher

$$\partial(\vartheta-\sigma) = \frac{q\,\partial p-p\,\partial q}{\cos i(1+\cos i)},$$

oder wenn man

$$\vartheta-\sigma = \vartheta-\chi+\omega = \Delta$$

setzt,

$$\partial\varLambda = \partial(\vartheta-\sigma) = \frac{q\,\partial p - p\,\partial q}{[1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}]\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Nennen wir nun die auf der festen Ebene der xy gezählte Länge des Planeten l, und die Breite desselben über dieser Ebene b, dann ist auch

$$x = r\cos b\cos l,\quad y = r\cos b\sin l,\quad z = r\sin b,$$

und wir ziehen daher aus den vorstehenden Formeln:

$$r\cos b\sin(l-\varLambda) = Y + q\frac{pX-qY}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}} = Y - \frac{qz}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$r\cos b\cos(l-\varLambda) = X - p\frac{pX-qY}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}} = X + \frac{pz}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$r\sin b = z = -pX+qY,$$

wo

$$\varLambda = \int\frac{q\,\partial p - p\,\partial q}{[1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}]\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Es zeigt sich hiemit, dafs in der That x, y, z, und also auch der Ort des Planeten als Functionen der vier Gröfsen X, Y, p, q betrachtet werden können; wie oben behauptet wurde. An die vorstehenden Formeln schliefst sich die merkwürdige Transformation an, die Sie kennen, und von welcher Sie mir eine elegante Construction gegeben haben.

Da x, y, z als Functionen von X, Y, p, q betrachtet werden können, so kann man auch Ω als Function dieser vier Gröfsen betrachten. Da nun i der Winkel zwischen den Achsen der z und der Z ist, so giebt die Gleichung $z = -pX+qY$ schon zu erkennen, dafs

$$Y\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = \cos i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right),\qquad X\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = -\cos i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right)$$

ist, welche Gleichungen sich übrigens auch auf andere Arten ableiten lassen. Wir erhalten hiermit aus den Gleichungen (19.) die folgenden,

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\cos^2 i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial q}\right),\qquad \frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{an}{\sqrt{(1-e^2)}}\cos^2 i\left(\frac{\partial\Omega}{\partial p}\right),$$

die nicht minder wie die Gleichungen (19.), in Verbindung mit (18.) ein vollständiges System von Gleichungen der gestörten Bewegung eines Planeten oder Satelliten bilden.

Um nicht zu lang zu werden, schliefse ich hier mit dem lebhaftesten Wunsche, Sie bald wieder bei uns zu sehen.

Sinn und Bedeutung haben, so wird es gut sein, um jedes Mifsverständnifs zu vermeiden, diese Bedeutung recht deutlich hervorzuheben.

In der Form, zu der Sie schliefslich gelangen, ist Ω eine (wirkliche) Function der Gröfsen

$$X,\ Y,\ p,\ q,\ \varDelta,$$

welche dadurch erhalten wird, dafs man in Ω für x, y, z die Werthe,

$$x = X\cos\varDelta - Y\sin\varDelta - \frac{(p\cos\varDelta + q\sin\varDelta)(pX-qY)}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$y = X\sin\varDelta + Y\cos\varDelta - \frac{(p\sin\varDelta - q\cos\varDelta)(pX-qY)}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}$$

$$z = -(pX-qY)$$

setzt. Diese Function wird nach p und q partiell differentiirt, als wäre die Gröfse $\varDelta$ eine Function von p und q, was sie nicht ist, indem man übereinkommt, an die Stelle der in diesem Falle vorkommenden $\frac{\partial\varDelta}{\partial p}$ und $\frac{\partial\varDelta}{\partial q}$ die Gröfsen,

$$\frac{q}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},\quad \frac{-p}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}},$$

zu setzen, wodurch $\frac{\partial\Omega}{\partial p}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial q}$ selber Symbole werden für die Gröfsen.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{q}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varDelta},$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q} - \frac{p}{\{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}\}\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\,\frac{\partial\Omega}{\partial\varDelta}.$$

Man könnte zwar sagen, so ganz conventionell wäre diese Annahme für die Zeichen $\frac{\partial\varDelta}{\partial p}$ und $\frac{\partial\varDelta}{\partial q}$ nicht, weil, wenn man dieselbe Annahme in dem Differentialausdruck

$$\frac{\partial\varDelta}{\partial p}dp + \frac{\partial\varDelta}{\partial q}dq$$

macht, ein Werth herauskommt, welchen $d\varDelta$ in dem zu integrirenden System Differentialgleichungen wirklich hat. Aber dies kann nur als die Veranlassung angesehn werden, die darauf geführt hat, eine solche Symbolik zu wählen, ohne dafs sie deshalb den Character einer blofs conventionellen verliert. Man könnte mit demselben Rechte Ω auch blofs als Function von X, Y und p betrachten,

*) indem dasselbe System Differentialgleichungen auch die Werthe.

$$dq = \frac{Y dp}{X}$$

$$dA = \frac{(qX - pY)dp}{X\{1+\surd(1-p^2-q^2)\}\{\surd(1-p^2-q^2)\}},$$

giebt, und dann würde $\frac{\partial\Omega}{\partial p} = 0$ werden. Man mufs also genau diejenige Combination des gegebenen Systems Differentialgleichungen bezeichnen, aus welcher die Bedeutung der Symbole $\frac{\partial A}{\partial p}$ und $\frac{\partial A}{\partial q}$ entnommen werden soll.

Nennt man a, b, c etc. diejenigen Functionen von t, welche den veränderlichen willkürlichen Constanten gleich sind, so hat die Analysis des Störungsproblems darauf geführt, auch solche Functionen von t darin einzuführen, welche einem Integrale,

$$\int\{Ada + Bdb + Cdc + \text{etc.}\},$$

gleich sind, in welchem der Ausdruck unter dem Integralzeichen den Bedingungen der Integrabilität nicht genügt, und welche daher keine Functionen von a, b, c etc. sind. Diese Functionen von t haben mit den veränderlichen Constanten die Eigenschaft gemein, dafs sie von einer wirklichen Constante nur um eine kleine Gröfse von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind; und wenn A, B, C etc. beliebige Functionen blofs von a, b, c etc. sind, welche nicht aufserdem noch t enthalten, so kann man ferner sagen, *dafs sie von veränderlichen Constanten nur um Gröfsen von der zweiten Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind.* Dieser letztere Umstand mag wohl dazu beigetragen haben, dafs man diese Functionen von den veränderlichen Constanten selber nicht ausdrücklich genug unterschieden hat. Will man nun einen Namen für diese Functionen von t haben, so könnte man sie *uneigentliche, falsche, Pseudo-Elemente,* oder auch *ideale* Elemente nennen. Es frägt sich aber, ob es nicht zweckmäfsig wäre, für alle diese Functionen und für alle Functionen dieser Functionen den Namen *Elemente* gelten zu lassen, da ja auch schon einmal *Lagrange* den Winkel χ so genannt hat, dagegen sie niemals veränderliche (willkürliche) Constanten oder Functionen

*) Bis hieher ist von dem leider so früh und schnell dahingeschiedenen *Jacobi* die Correctur des von ihm im Voraus für das Journal bestimmten Manuscripts selbst besorgt worden. Die Correctur der hier folgenden Fortsetzung hat Herr Professor *Lejeune Dirichlet* mit dem Herausgeber gemeinschaftlich übernommen.

der veränderlichen Constanten zu nennen, und diese letzteren durch die Benennung *elliptische Elemente* zu unterscheiden.

Auch über die Form der Differentialgleichungen, zu welchen Sie schliefslich gelangen, scheint es nützlich, in einige Erörterungen einzugehen, um ihre besondere Natur desto deutlicher hervorzuheben. Es könnte beim ersten Anblick scheinen, als wären bei Ihnen die drei Differentialgleichungen 2ter Ordnung des Problems durch zwei Differentialgleichungen 2ter Ordnung und zwei Differentialgleichungen 1ter Ordnung ersetzt worden; was immer verstattet ist. Dem ist aber in der That nicht so. Es sind die von Ihnen aufgestellten Differentialgleichungen gar keine Differentialgleichungen zwischen den Gröfsen X, Y, p, q, denn es ist unmöglich, die rechten Seiten Ihrer Gleichungen X, Y, p, q ausgedrückt zu denken. Die von Ihnen aufgestellten Differentialgleichungen sind in der That zwei Differentialgleichungen *zweiter* und drei Differentialgleichungen *erster* Ordnung zwischen den Gröfsen

$$X,\ Y,\ p,\ q,\ \Lambda.$$

Ich will, um Ihre Formeln zu commentiren, die Gleichungen hinschreiben, wie sie in der gemeinen Bezeichnungsart aussehen würden. Ist nämlich Ω mittelst Substitution der oben für x, y, z gegebenen Werthe als Function der fünf Gröfsen X, Y, p, q, Λ ausgedrückt, so sind Ihre Differentialgleichungen, in den gewöhnlichen Zeichen geschrieben, die folgenden:

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{X}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial X}$$

$$\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{Y}{r^3} = \frac{\partial\Omega}{\partial Y}$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\sqrt{(1-p^2-p^2)}.dt}{XdY-YdX}\left\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial q} - \frac{p}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\right\}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\sqrt{(1-p^2-q^2)}.dt}{XdY-YdX}\left\{\sqrt{(1-p^2-q^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial p} + \frac{q}{1+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}\frac{\partial\Omega}{\partial\Lambda}\right\}$$

$$d\Lambda = \frac{q\,dp - p\,dp}{1-p^2-q^2+\sqrt{(1-p^2-q^2)}}.$$

Die vollständige Integration dieses Systems Differentialgleichungen führt *sieben* von einander unabhängige willkürliche Constanten mit sich, welche sich in den Ausdrücken von x, y, z auf *sechs* reduciren müssen. Damit man deutlich sehe, wie dieses geschieht, bemerke ich, dafs aus der Natur dieser Differentialgleichungen folgt, dafs, wenn man mit

$$X_1,\ Y_1,\ p_1,\ q_1,\ \Lambda_1$$

gewisse Functionen von t bezeichnet, welche nur *sechs* willkürliche Constanten enthalten, und λ eine *siebente* von ihnen unabhängige willkürliche Constante bedeutet, die *vollständigen* Ausdrücke von X, Y, p, q, Λ folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned} X &= \cos\lambda X_1 + \sin\lambda Y_1 \\ Y &= \cos\lambda Y_1 - \sin\lambda X_1 \\ p &= \cos\lambda\, p_1 - \sin\lambda\, q_1 \\ q &= \cos\lambda\, q_1 + \sin\lambda\, p_1 \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \lambda. \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die oben durch X, Y, p, q, Λ ausgedrückten Werthe von x, y, z, so verwandeln sie sich in die nämlichen Functionen von $X_1, Y_1, p_1, q_1, \Lambda_1$, welche sie von X, Y, p, q, Λ waren, so dafs x, y, z Functionen von t und *sechs* willkürlichen Constanten werden, indem die *siebente* λ ganz herausgeht.

Es wird zwar insgemein angenommen, dafs man bei einem vorgelegten System Differentialgleichungen dahin trachten müsse, die Ordnung des Systems zu verringern; wie es z. B. gelungen ist, das Problem der *drei Körper*, welches ursprünglich von der Integration eines Systems Differentialgleichungen von der 18ten Ordnung abhängt, welche 18 willkürliche Constanten fordert, auf ein System Differentialgleichungen von der 6ten Ordnung zurückzuführen, dessen vollständige Integration nur sechs willkürliche Constanten fordert. Aber andrerseits hat man doch auch schon früher bisweilen kein Bedenken getragen, die Ordnung einer gegebenen Differentialgleichung absichtlich sogar zu erhöhen; z. B. wenn man sie dadurch lineär machen konnte. In dem vorliegenden Störungsproblem kann aber diese Erhöhung der 6ten Ordnung des Systems Differentialgleichungen auf die 7te am allerwenigsten Bedenken erregen, wenn man dadurch andere Vortheile erreicht. Denn überall wo bei dem zur angenäherten Integration eines gegebenen Systems Differentialgleichungen eingeschlagenen Verfahren, die Annäherung nach den Potenzen einer kleinen Constante geschieht, welche die Differentialgleichungen selber enthalten, führt man eigentlich *unendlich viel* von einander unabhängige willkürliche Constanten ein, indem jede neue Annäherung neue Integrationen fordert, und diese eben so viel neue willkürliche Constanten zulassen. So wird es z. B. bei der Integration der zwischen den veränderlichen Constanten und der Zeit aufgestellten Differentialgleichungen geschehen, dafs mit jeder höhern Ordnung der störenden Masse, auf welche die Annäherung ausgedehnt wird, auch *sechs* neue will-

kürliche Constanten eintreten; und alle diese willkürlichen Constanten müssen sich schliefslich, oder auch bei jedem Stadium der Annäherung, wenn man die folgenden Potenzen der störenden Masse vernachlässigt, auf *sechs* reduciren lassen. Man erhält hievon auf folgende Art eine deutliche Vorstellung. Man denke sich das Problem absolvirt, und die sechs *veränderlichen* Constanten als Functionen von t, der kleinen in den Differentialgleichungen vorkommenden störenden Masse m und der sechs willkürlichen Constanten a, b, c etc. ausgedrückt. Setzt man nun

$$a = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + \text{etc.}$$
$$b = b_0 + b_1 m + b_2 m^2 + \text{etc.}$$
$$\text{etc. etc.,}$$

wo a_0, b_0 etc., a_1, b_1 etc. etc. ebenfalls willkürliche Constanten sein können, und entwickelt die sechs, den *veränderlichen* Constanten gleichen Functionen von t nach den Potenzen von m, so treten in diese Entwicklungen mit jeder neuen Potenz m^i auch sechs neue willkürliche Constanten a_i, b_i, c_i etc. ein: und doch sieht man, dafs sich alle diese willkürlichen Constanten in die sechs, a, b, c etc. zusammenziehen lassen.

Ihre Formeln ergeben,

$$X = r\cos(f+\chi) = a\cos(\varepsilon+\chi) - ae\cos\chi + \frac{ae^2\sin\chi\sin\varepsilon}{1+\sqrt{(1-e^2)}}$$
$$Y = r\sin(f+\chi) = a\sin(\varepsilon+\chi) - ae\sin\chi - \frac{ae^2\cos\chi\sin\varepsilon}{1+\sqrt{(1-e^2)}},$$

wo der Winkel ε durch die Zeit mittelst der Gleichung

$$\varepsilon - e\sin\varepsilon = a^{\frac{3}{2}}(t-c)$$

bestimmt wird. Bildet man die Differentiale dX und dY unter der Voraussetzung, dafs a, e, c, χ Constanten sind, so haben Sie gezeigt, dafs dieselben Ausdrücke von dX und dY noch immer die Differentiale von X und Y bleiben, wenn man für die elliptischen Elemente a, e, c ihre gestörten Werthe und für die von den elliptischen Elementen gänzlich unabhängige Constante χ eine Function der Zeit setzt, welche $= w + \int \cos i\, d\vartheta$ ist. So scheint mir am klarsten und einfachsten der schöne und wichtige Satz zusammengefafst werden zu können, mit dem Sie die analytische Mechanik bereichert haben, und welcher *Lagrange* entgangen ist, obgleich er die Gröfsen $r\cos f$ und $r\sin f$ nach den Elementen differentiirt, und die Function $\chi = w + \int \cos i\, d\vartheta$ eingeführt hat.

Was den von mir früher vorgeschlagenen Namen *ideale* Coordinaten betrifft, so bin ich wieder zweifelhaft geworden, ob überhaupt ein besonderer Name für die Coordinaten X, Y, Z schon ein Bedürfnifs geworden sei, da doch aller Wahrscheinlichkeit nach nur die von Ihnen gemachte Annahme $Z=0$ in den Anwendungen beibehalten wird, und eine so allgemeine Benennung kaum für ein so specifisches Coordinatensystem passend sein dürfte. Es würde vielleicht genügen, hervorzuheben, dafs es auch *bewegliche* Coordinatensysteme von der Beschaffenheit giebt, dafs die ersten Differentiale der auf dieselben bezogenen Coordinaten allein von der Orts-Änderung des Planeten im Raum, und nicht von der Veränderung des Coordinatensystems abhängen. Im Allgemeinen werden die ersten Differentiale der auf ein veränderliches System bezogenen Coordinaten eines Puncts aus den Differentialen, die von der Orts-Änderung des Punctes im Raume herrühren, und aus den Differentialen, die von der Änderung des Coordinatensystems herrühren, durch einfache Addition zusammengesetzt. Sollen die letztern immer verschwinden, so erleiden die Coordinaten des Puncts, wenn derselbe seinen Ort im Raum nicht ändert, durch die instantane Drehung des Systems gar keine Änderung. Die instantane Drehung des Coordinatensystems mufs also so beschaffen sein, dafs der unveränderte Ort des Punctes während derselben mit dem Coordinatensystem fest verbunden bleiben kann; oder der Radiusvector mufs die instantane Drehungsachse des Coordinatensystems sein. Ganz willkürlich bleibt dabei der instantane Drehungswinkel des Systems. Man kann sich dies etwa so vorstellen. Das Coordinatensystem dreht sich zu einer gewissen Zeit t um den Radiusvector mit einer ganz beliebigen Winkelgeschwindigkeit während des Zeit-Elements dt; nach diesem Zeit-Element geht der Radiusvector in die der Zeit $t+dt$ entsprechende Position über, worauf sich das Coordinatensystem wieder mit einer beliebigen Winkelgeschwindigkeit während der Zeit dt um den neuen Radiusvector dreht, welcher hierauf in seine dritte Lage übergeht, und so fort. Wenn der willkürliche Drehungswinkel jedesmal dem Neigungswinkel der den Zeiten t und $t+dt$ entsprechenden Bahnebnen gleich wird, so erhält man den von Ihnen behandelten Fall, oder allgemeiner, alle Coordinatensysteme, welche während der Bewegung mit demjenigen, in welchem $Z=0$, fest verbunden bleiben. Es scheint kaum, dafs irgend eine andere Bestimmung des Drehungswinkels als die von Ihnen gewählte von Interesse ist. Setzt man mit Ihnen $Z=0$, $X=r\cos v_1$, $Y=r\sin v_1$, so ist v_1 der Winkel des Radiusvectors mit der XAchse, welcher durch die Drehung der

XY Ebene um den Radiusvector keine Änderung erleidet, sondern, da die X Achse in der XY Ebene keine eigenthümliche Bewegung haben soll, nur durch die Bewegung des Radiusvectors in der XY Ebene eine Veränderung erfährt, woraus der von Ihnen auf analytischem Wege bewiesene Satz folgt, dafs dv_1 dem Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Radiivectores gleich ist.

Schliefslich will ich noch den Beweis des von mir zu Anfang dieses Schreibens aufgestellten Satzes hinzufügen.

Es sei u eine Function von t und den sechs elliptischen Elementen a, b, c etc., von solcher Beschaffenheit, dafs,

$$\frac{\partial u}{\partial a}da + \frac{\partial u}{\partial b}db + \frac{\partial u}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0.$$

Wenn man die Differentialgleichungen ausschliefst, welche die besondern störenden Kräfte enthalten, so finden zwischen den Differentialen da, db etc. nur die drei folgenden linearen Gleichungen Statt:

$$\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da + \frac{\partial y}{\partial b}db + \frac{\partial y}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da + \frac{\partial z}{\partial b}db + \frac{\partial z}{\partial c}dc + \text{etc.} = 0,$$

und es mufs daher die vorstehende Gleichung, wenn sie erfüllt werden soll, ohne dafs man dabei auf die Besonderheit der störenden Kräfte Rücksicht nimmt, eine Folge dieser drei Gleichungen sein. Damit dies möglich sei, mufs man mittelst Einführung dreier Factoren L, M, N folgenden sechs Gleichungen Genüge leisten können:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = L\frac{\partial x}{\partial a} + M\frac{\partial y}{\partial a} + N\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$\frac{\partial u}{\partial b} = L\frac{\partial x}{\partial b} + M\frac{\partial y}{\partial b} + N\frac{\partial z}{\partial b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = L\frac{\partial x}{\partial c} + M\frac{\partial y}{\partial c} + N\frac{\partial z}{\partial c}$$

etc. etc.

Man denke sich jetzt umgekehrt die Elemente a, b, c etc. durch t, x, y, z, $x' = \frac{\partial x}{\partial t}$, $y' = \frac{\partial y}{\partial t}$, $z' = \frac{\partial z}{\partial t}$ ausgedrückt, und die partiellen Differentialquotienten dieser Ausdrücke von a, b, c etc. in Bezug auf die Gröfsen x,

y, z, x', y', z' gebildet, so wird nach den Regeln der partiellen Differentiation, wenn ξ und ξ' zwei beliebige von den Gröfsen x, y, z, x', y', z' bedeuten, der Ausdruck

$$\frac{\partial \xi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \xi'} + \frac{\partial \xi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \xi'} + \frac{\partial \xi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \xi'} + \text{etc.}$$

immer verschwinden, aufser wenn ξ und ξ' dieselben Gröfsen sind; in welchem Falle allein er $= 1$ wird. Es folgen deshalb aus den obigen sechs Gleichungen die folgenden drei,

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x'} + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y'} + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z'} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z'} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z'} + \text{etc.} = 0.$$

Aber da u eine Function von t, a, b, c etc. ist, kann man dieselbe auch als Function von x, y, z, x', y', z', t betrachten, und dann werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z'} = 0,$$

oder es mufs sich u auf eine Function von x, y, z, t reduciren, w. z. b. w.

Ich will noch bemerken, dafs Sie Ihren zweiten Satz wohl zweckmäfsig dahin erweitern können, dafs Sie in die Function L auch t aufnehmen.

Ich bitte Sie, die vorstehenden Zeilen als einen Versuch anzusehen, mir die Natur der Störungsgleichungen, zu welchen sie gelangen, in ein recht klares Licht zu setzen; und es sollte mich freuen, wenn Sie finden, dafs ich ihren Sinn getroffen habe, worüber ich mir bald Ihren mündlichen Bescheid erbitten werde.

II.

Berlin, den 20ten Januar 1851.

Erlauben Sie, dafs ich meinem vorigen Schreiben noch die folgenden Bemerkungen hinzufüge.

Wenn wieder a, b etc. die veränderlichen willkürlichen Constanten bedeuten, so sind die Werthe ihrer ersten Differentialquotienten, $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ etc. durch die drei Störungsgleichungen und die drei Bedingungsgleichungen,

$$\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\text{ etc.}=0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db+\text{ etc.}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db+\text{ etc.}=0,$$

gegeben. Ist U eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten, so erhält man $\frac{dU}{\partial t}$, wenn man die Werthe von $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$ etc. respective mit $\frac{dU}{\partial a}$, $\frac{dU}{\partial b}$ etc. multiplicirt und von den erhaltenen Producten die Summe bildet. Es kommt hierbei zu Statten, dafs die Factoren $\frac{\partial U}{\partial a}$, $\frac{\partial U}{\partial b}$ etc. in der ersten Annäherung Constanten werden. Aber ganz derselbe Vortheil findet Statt, wenn auch U keine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten ist, sondern mit ihnen nur durch eine nicht integrable Differentialgleichung,

$$dU=A\,da+B\,db+\text{ etc.},$$

verbunden ist, in welcher A, B etc. blofs Functionen von a, b etc. sind, ohne die Zeit t noch aufserdem explicite zu enthalten. Da nun solche Gröfsen U ganz auf dieselbe Weise wie die veränderlichen willkürlichen Constanten selbst erhalten werden, da sie ferner von veränderlichen willkürlichen Constanten nur um Gröfsen der *zweiten* Ordnung in Bezug auf die störenden Massen verschieden sind, und ihre Einführung, wie Sie gezeigt haben, bei den anzustellenden Entwicklungen bedeutende Abkürzungen gewährt, so wird es jedenfalls gerechtfertigt sein, solche Functionen

$$U=\int(A\,da+B\,db+\text{ etc.})$$

durch einen besondern Namen auszuzeichnen; weshalb ich in einem vorigen Schreiben vorgeschlagen habe, auf dieselben die Bezeichnung *Elemente* auszudehnen; wie schon *Lagrange* in Bezug auf den Winkel χ gethan hat. Da-

gegen werde ich die veränderlichen willkürlichen Constanten selbst, zur näheren Unterscheidung, *gestörte oder veränderliche elliptische Elemente* nennen. Denn jene Gröfsen U können nicht als gestörte elliptische Elemente angesehen werden, weil die Constanten, auf welche sie sich reduciren, wenn die störenden Kräfte verschwinden, von den willkürlichen Constanten der elliptischen Bewegung in keiner Art abhängen.

Wenn A, B etc. auch die Zeit t enthalten, so bleibt den Gröfsen

$$U = \int (A\,da + B\,db + \text{etc.})$$

der Character, dafs sie, wenn die störenden Kräfte verschwinden, wirkliche Constanten werden, und immer von wirklichen Constanten nur um Gröfsen von der Ordnung der störenden Kräfte verschieden sind. Es dürfte aber gleichwohl nicht zweckmäfsig sein, die Benennung *Elemente* auch auf diesen Fall auszudehnen, und werde ich in den folgenden Zeilen nur solche Gröfsen U *Elemente* nennen, in welchen A, B etc. blofs Functionen der elliptischen Elemente a, b etc. sind, ohne noch t zu enthalten, unter diesen Namen aber die veränderlichen willkürlichen Constanten oder elliptischen Elemente selbst zugleich einbegreifen.

Ich will jetzt einige Betrachtungen darüber anstellen, wie man Gröfsen finden kann, welche der von Ihnen eingeführten *idealen Coordinate* v_1 analog sind.

Ihre ideale Coordinate v_1 wird erhalten, wenn man von der wahren Anomalie f ein Element abzieht: das Wort *Element* in der eben angegebenen Bedeutung genommen; es ist nämlich in Ihrer Bezeichnung,

$$v_1 = f - w - \int \cos i\, d\vartheta.$$

Die wahre Anomalie hat daher die merkwürdige Eigenschaft, dafs derjenige Theil ihres Differentials, welcher von der Veränderlichkeit der gestörten elliptischen Elemente herrührt, das Differential eines Elements ist; das heifst, dafs in demselben die Differentiale der gestörten elliptischen Elemente blofs Functionen der elliptischen Elemente sind, ohne noch t zu enthalten. Dies hat mich veranlafst, zu untersuchen, ob es noch andere Functionen der elliptischen Elemente und der Zeit giebt, welche die Eigenschaft mit der wahren Anomalie gemein haben, dafs in dem Theil ihres Differentials, welcher von der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente herrührt, die Coëfficienten der Differentiale der letztern nur Functionen von ihnen sind, ohne noch explicite die Zeit zu enthalten.

Es ist vielleicht zweckmäfsig, den Namen *ideale Coordinaten* auf alle Functionen von Elementen und der Zeit auszudehnen, in deren erstem Differential der von der Veränderlichkeit der Elemente herrührende Theil für sich besonders verschwindet. Um diese Eigenschaft noch auf andere Gröfsen als diejenigen, welche sich auf blofse Functionen von x, y, z, t reduciren, ausdehnen zu können, war es nöthig, zuvor den Begriff eines Elements auf die oben angegebene Art zu verallgemeinern, weil ich in meinem ersten Schreiben gezeigt habe, dafs keine andern Functionen der *elliptischen* Coordinaten und der Zeit existiren, welche ideale Coordinaten in der angegebenen Bedeutung sein können.

Wenn man diese Erweiterungen der Begriffe der Elemente und der idealen Coordinaten zuläfst, so kann man die oben gestellte Aufgabe so fassen:

Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten und der Zeit zu finden, welche sich durch blofses Abziehen eines Elements in eine ideale Coordinate verwandeln.

Der Theil von df, welcher von der Veränderlichkeit der elliptischen Elemente herrührt, erhält die Form des Differentials eines Elements,

$$dw + \cos i\, d\vartheta,$$

nur dadurch, dafs man die drei oben angegebenen Bedingungsgleichungen benutzt, welche zwischen den Differentialen der elliptischen Elemente Statt finden. Es wird daher die Aufgabe in ihrer vollständigen Bestimmung so heifsen:

„Es ist eine Function von t und den sechs veränderlichen willkürlichen Constanteu a, b, c etc. von der Beschaffenheit zu suchen, dafs ihr, in Bezug auf die sechs Gröfsen a, b, c etc. genommenes Differential mittelst der drei Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc + \text{etc.} = 0,$$

in einen Differential-Ausdruck

$$A da + B db + C dc + \text{etc.}$$

verwandelt werden kann, in welchem A, B, C etc. blofs Functionen von a, b, c etc. sind, ohne t zu enthalten."

Obgleich es mir nicht gelungen ist, diese Aufgabe allgemein zu lösen, so will ich Ihnen doch in der Kürze die Betrachtungen, die ich darüber angestellt habe, mittheilen.

Es sei f die gesuchte Function, so mufs es drei solche Factoren λ, μ, ν geben, dafs die sechs Ausdrücke,

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a} = A$$

$$\frac{\partial f}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x}{\partial b}+\mu\frac{\partial y}{\partial b}+\nu\frac{\partial z}{\partial b} = B$$

etc. etc.,

von t unabhängig werden. Bezeichnet man mit *Lagrange* das partiell nach t genommene Differential mit einem Accent, so folgen hieraus die sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial a}+\mu\frac{\partial y'}{\partial a}+\nu\frac{\partial z'}{\partial a}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial a}+\mu'\frac{\partial y}{\partial a}+\nu'\frac{\partial z}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial f'}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial b}+\mu\frac{\partial y'}{\partial b}+\nu\frac{\partial z'}{\partial b}+\lambda'\frac{\partial x}{\partial b}+\mu'\frac{\partial y}{\partial b}+\nu'\frac{\partial z}{\partial b} = 0$$

etc. etc.

Denkt man sich jetzt f' statt durch t, a, b, c etc. durch t, x, y, z, x', y', z' ausgedrückt, so ergeben sich hieraus die folgenden sechs Gleichungen:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'}+\lambda = 0,\quad \frac{\partial f'}{\partial y'}+\mu = 0,\quad \frac{\partial f'}{\partial z'}+\nu = 0,$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x}+\lambda' = 0,\quad \frac{\partial f'}{\partial y}+\mu' = 0,\quad \frac{\partial f'}{\partial z}+\nu' = 0.$$

Es mufs daher f' den folgenden drei Gleichungen genügen:

$$(A.)\qquad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial x},\quad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial y'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial y},\quad \frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial z'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial z}.$$

Wenn E eine Function der veränderlichen willkürlichen Constanten bedeutet, und mittelst der Gleichungen der ungestörten Bewegung durch x, y, z, x', y', z', t ausgedrückt wird, so hat man, wie, glaube ich, *Lagrange* gezeigt hat, die Gleichungen,

$$\frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial x'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x},\quad \frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial y'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial y},\quad \frac{d\cdot\frac{\partial E}{\partial z'}}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial z},$$

welche von den vorstehenden nur durch die Zeichen der zweiten Glieder verschieden ist. Dieselbe Analysis, durch welche man diese letzteren Gleichungen

beweiset, zeigt auch, dafs man den drei Gleichungen ($A.$) die folgende Form geben kann:

$$\frac{\partial f''}{\partial x'} = 2\frac{\partial f'}{\partial x}, \quad \frac{\partial f''}{\partial y'} = 2\frac{\partial f'}{\partial y}, \quad \frac{\partial f''}{\partial z'} = 2\frac{\partial f'}{\partial z},$$

wo f'' das zweite Differential von f nach t bedeutet. Alle Differentiationen nach t werden hier im Sinne der ungestörten Bewegung genommen, so dafs man a, b etc. dabei als Constanten zu betrachten, oder für $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ die Werthe $-\frac{x}{r^3}$, $-\frac{y}{r^3}$, $-\frac{z}{r^3}$ zu substituiren hat.

Die Gleichungen ($A.$) müssen erfüllt werden, wenn man für f die wahre Anomalie annimmt. Um diese Verification zu machen, hat man zuerst f' durch x, y, z, x', y', z', t auszudrücken, was mittelst der Formel,

$$f' = \frac{\sqrt{\alpha}}{r^2},$$

geschieht, wo

$$\alpha = (yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2+(xy'-yx')^2$$

ist. Man erhält hieraus,

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{2x\sqrt{\alpha}}{r^4},$$

und da α einer willkürlichen Constante gleich, also $\frac{d\alpha}{dt}=0$, $\frac{d\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x'}}{dt} = -\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ ist:

$$\frac{d\cdot\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = -\frac{r'}{\sqrt{\alpha}.r^3}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x'} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}.r^2}\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

Da dieser Ausdruck $=\frac{\partial f'}{\partial x}$ sein soll, so ist die zu beweisende Gleichung:

$$r\frac{\partial \alpha}{\partial x} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = \frac{2\alpha}{r}x,$$

und es werden eben so die beiden andern Gleichungen ($A.$) zu

$$r\frac{\partial \alpha}{\partial y} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial y'} = \frac{2\alpha}{r}y, \quad r\frac{\partial \alpha}{\partial z} + r'\frac{\partial \alpha}{\partial z'} = \frac{2\alpha}{r}z.$$

Man sieht leicht, dafs diese Gleichungen erfüllt werden, wenn man die Werthe,

$$\alpha = r^2(x'^2+y'^2+z'^2) - r^2r'^2$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 2x(x'^2+y'^2+z'^2) - 2x'rr'$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x'} = 2x'r^2 - 2xrr'$$

und die analogen für $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$, etc. substituirt. Es ist also die durch die Gleichungen (*A.*) ausgedrückte Eigenschaft von f erwiesen, wenn man für f die wahre Anomalie nimmt.

Man erhält sogleich auch noch einen andern Werth von f', welcher den Gleichungen (*A.*),

$$\frac{d.\frac{\partial f'}{\partial x'}}{dt} = \frac{\partial f'}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Genüge leistet, wenn man

$$f' = \tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z')+\frac{1}{r}$$

setzt und die Differentialgleichungen des ungestörten Problems zu Hülfe nimmt. Man findet hieraus f selbst auf folgende Art.

Nennt man a die halbe grofse Ache, so folgt aus den Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(x'x'+y'y'+z'z')+\frac{1}{2a} = \frac{1}{r}$$

$$xx''+yy''+zz'' = -\frac{1}{r}$$

die folgende:

$$f' = 2(x'x'+y'y'+z'z'+xx''+yy''+zz'')+\frac{3}{2a},$$

woraus man durch Integration

$$f = 2(xx'+yy'+zz')+\frac{3t}{2a} = 2rr'+\frac{3t}{2a}$$

erhält, oder, wenn u die excentrische Anomalie bedeutet,

$$f = \frac{3t}{2a}+2\sqrt{a}.e\sin u.$$

Diese Function wird also die Eigenschaft der wahren Anomalie haben, sich durch blofses Abziehen eines Elements in eine ideale Coordinate zu verwandeln. Das abzuziehende Element findet man auf folgende Art.

Bezeichnet man die Differentiationen nach den veränderlichen willkürlichen Constanten durch die Characteristik δ, so wird für den vorstehenden Werth von f:

$$\delta f = -\frac{3t}{2a^2}\delta a+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a+2\sqrt{a}\sin u\,\delta e+2\sqrt{a}.e\cos u.\delta u.$$

Wenn τ die mittlere Anomalie für $t=0$ ist, so hat man

$$\frac{t}{a^{\frac{3}{2}}}+\tau = u-e\sin u;$$

woraus der Werth von δu mittelst der Gleichung

$$-\tfrac{3}{2}\frac{t}{a^{\frac{5}{2}}}\delta a+\delta\tau+\sin u\,\delta e = (1-e\cos u)\delta u$$

erhalten wird. Man hat demnach

$$\delta f = \sqrt{a}(1+e\cos u)\,\delta u-\sqrt{a}\,\delta\tau+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a+\sqrt{a}\sin u\,\delta e.$$

Hiezu addire man den verschwindenden Ausdruck

$$\begin{aligned}\lambda\,\delta x+\mu\,\delta y+\nu\,\delta z &= -\left(\frac{\partial f'}{\partial x'}\delta x+\frac{\partial f'}{\partial y'}\delta y+\frac{\partial f'}{\partial z'}\delta z\right)\\ &= -(x'\,\delta x+y'\,\delta y+z'\,\delta z).\end{aligned}$$

Setzt man mit *Lagrange*,

$$x=\alpha X+\beta Y,\qquad y=\alpha_1 X+\beta_1 Y,\qquad z=\alpha_2 X+\beta_2 Y,$$

wo

$$X = a\cos u-ae,\qquad Y=a\sqrt{(1-e^2)}\sin u,$$

so wird

$$\begin{aligned}0 = x'\delta x+y'\delta y+z'\delta z &= (\alpha X'+\beta Y')(\alpha\,\delta X+\beta\,\delta Y+X\delta\alpha+Y\delta\beta)\\ &\quad+(\alpha_1 X'+\beta_1 Y')(\alpha_1\delta X+\beta_1\delta Y+X\delta\alpha_1+Y\delta\beta_1)\\ &\quad+(\alpha_2 X'+\beta_2 Y')(\alpha_2\delta X+\beta_2\delta Y+X\delta\alpha_2+Y\delta\beta_2)\\ &= X'\delta X+Y'\delta Y+(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2)(XY'-YX')\\ &= \sqrt{a}(1+e\cos u)\,\delta u+\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}\delta a-a\left(X'+\frac{e\sin u}{\sqrt{(1-e^2)}}Y'\right)\delta e\\ &\quad+(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2)\sqrt{(a(1-e^2))}.\end{aligned}$$

Zieht man diesen Ausdruck von dem obigen Werthe von δf ab, und bemerkt noch, daſs

$$X'+\frac{e\sin u}{\sqrt{(1-e^2)}}Y' = -\frac{e\sin u}{\sqrt{a}}$$

ist, so erhält man für δf folgenden Ausdruck von der verlangten Form, in welchem die Coëfficienten der Differentiale der veränderlichen willkürlichen Constanten nur Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten sind:

$$\delta f = -\sqrt{a}\,\delta\tau-\sqrt{(a(1-e^2))}(\beta\,\delta\alpha+\beta_1\delta\alpha_1+\beta_2\delta\alpha_2).$$

Die vorstehende Analysis führt daher zu der *neuen idealen Coordinate*, die ich mir Ihnen vorzulegen erlaube, nemlich:

$$\sqrt{a}(\tfrac{3}{2}u+\tfrac{1}{2}e\sin u)+\int\sqrt{a}\{d\tau+\sqrt{(1-e^2)}(\beta\,d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2)\}.$$

Multiplicirt man mit $\frac{2}{3}$ und substituirt den Werth

$$\beta\,d\alpha+\beta_1 d\alpha_1+\beta_2 d\alpha_2 = d\chi = dw+\cos i\,d\vartheta,$$

so wird die neue ideale Coordinate:

$$\sqrt{a}(u+\tfrac{1}{3}e\sin u)+\tfrac{2}{3}\int\sqrt{a}(d\tau+\sqrt{(1-e^2)}(dw+\cos i\,d\vartheta)).$$

Es wäre nicht ohne Interesse, mehrere solcher idealer Coordinaten aufzusuchen, und zu sehen, ob vielleicht einige derselben bei den anzustellenden Entwicklungen einen ähnlichen Nutzen, wie der von Ihnen eingeführte Winkel v_1, gewähren.

Es ist noch zu bemerken, dafs ein Ausdruck $Ada+Bdb+$ etc., in welchem A, B etc. blofs Functionen der veränderlichen willkürlichen Constanten sind, ***nur auf eine einzige Art*** diese Form annehmen kann. Es folgt dies daraus, dafs es unmöglich ist, drei Factoren λ, μ, ν so zu bestimmen, dafs die sechs Ausdrücke,

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial a}+\mu\frac{\partial y}{\partial a}+\nu\frac{\partial z}{\partial a},\quad \lambda\frac{\partial x}{\partial b}+\mu\frac{\partial y}{\partial b}+\nu\frac{\partial z}{\partial b},\quad \text{etc.}$$

gleichzeitig blofsen Functionen von a, b etc. gleich werden. In der That müfste man in diesem Falle die sechs Gleichungen,

$$\lambda'\frac{\partial x}{\partial a}+\mu'\frac{\partial y}{\partial a}+\nu'\frac{\partial z}{\partial a}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial a}+\mu\frac{\partial y'}{\partial a}+\nu\frac{\partial z'}{\partial a}=0$$

$$\lambda'\frac{\partial x}{\partial b}+\mu'\frac{\partial y}{\partial b}+\nu'\frac{\partial z}{\partial b}+\lambda\frac{\partial x'}{\partial b}+\mu\frac{\partial y'}{\partial b}+\nu\frac{\partial z'}{\partial b}=0$$

$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.,}$$

haben. Soll nun nicht gleichzeitig λ, μ, ν, λ', μ', ν' verschwinden, so müfste, wenn ich mich einer von mir eingeführten Benennung bedienen darf, die ***Functionaldeterminante*** von x, y, z, x', y', z' verschwinden, und zwar ***identisch,*** weil es im ungestörten Problem keine Gleichung zwischen t, a, b etc. geben kann. Aus dem identischen Verschwinden dieser Functional-Determinante würde aber, wie anderweitig bewiesen worden ist, folgen, dafs es eine Gleichung zwischen x, y, z, x', y', z', t ohne alle willkürliche Constante gäbe, und eine solche kann, wie ich ebenfalls an einem andern Orte gezeigt habe, niemals aus den vollständigen Integralgleichungen abgeleitet werden.

Diese Eigenschaft der Ausdrücke $Ada+Bdb+$ etc., welche sogleich aufhört, wenn A, B etc. auch noch t enthalten, scheint es desto mehr zu rechtfertigen, wenn man ihr Integral durch einen besondern Namen (Element) auszeichnet.

3.

Auszug eines Schreibens des Herrn Professor Richelot an Herrn Professor Jacobi.

Königsberg, den 27ten December 1850.

So eben erhalte ich von *Luther*, welcher mich gestern nicht zu Hause gefunden hat, einige Zeilen, worin eine mir von Ihnen gemachte Mittheilung enthalten ist. Schon lange habe ich Ihnen schreiben wollen, jedoch nicht eher, bis ich Ihnen gute Nachrichten von meinen Arbeiten geben konnte. Ich hatte mir aber zuletzt, unter allen Umständen das alte Jahr nicht vorübergehn zu lassen vorgenommen, ohne Ihnen ein Lebenszeichen zu geben.

Ich knüpfe an Ihre Mittheilung an. Zu meinem letzten Vortrage über bestimmte Integrale habe ich die alten Methoden von *Cauchy* etwas gründlicher durchzugehen Veranlassung genommen, und durch eine leichte Modification derselben eine Anzahl von Sätzen entdeckt, welche ich Ihnen hier mittheile. Es werden sich dieselben aus der Quelle, die Ihnen zufolge der mir gemachten Mittheilung zu Gebot steht, wahrscheinlich ebenfalls ganz leicht ergeben.

Ich definire $(X+iY)^{\alpha}$, wenn $Y\geqq 0$ und α reell ist, durch die Gleichung

$$(X+iY)^{\alpha} = \sqrt{(X^2+Y^2)^{\alpha}}(\cos\alpha\theta+i\sin\alpha\theta),$$

wenn

$$X = \sqrt{(X^2+Y^2)}\cos\theta, \qquad Y = \sqrt{(X^2+Y^2)}\sin\theta$$

gesetzt wird, und $-\pi<\theta\leqq\pi$, endlich die Quadratwurzel positiv genommen wird.

Dann ist einer dieser Sätze:

„*Es sei $f(\pm x+iy)$ eine beliebige continuirliche Function, welche weder für $x=\infty$ noch $y=\infty$ unendlich wird. Es sei ferner*

$$\begin{array}{lll} a_1\geqq 0, & 0<\alpha<1, & \alpha+\beta+\gamma>1, \\ b_1\geqq 0, & 0<\beta<1, & \\ c_1\geqq 0, & 0<\gamma<1, & \\ \text{etc.} & \text{etc.}, & \end{array}$$

so ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{fz\,dz}{(z-a+ia_1)^{\alpha}(z-b+ib_1)^{\beta}(z-c+ic)^{\gamma}\dots} = 0."$$



Wenn p eine ganze Zahl bedeutet und die Function

$$\frac{f(\pm x+iy)}{x^p}$$

weder für $x=\infty$ noch für $y=\infty$ unendlich wird, so ist unter den sonst gleichen Bedingungen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{fx\,dx}{(x-m-ni)^p(x-a+a_1 i)^\alpha(x-b+b_1 i)^\beta(x-c+c_1 i)^\gamma\dots}$$
$$=2\pi i\left[\frac{F(m+ni+h)}{h^p}\right]_{h^{-1}}=\frac{2\pi i F^{(p-1)}(m+ni)}{1.2\dots p-1},$$

wo der Kürze wegen

$$Fz=\frac{fz}{(z-a+a_1 i)^\alpha(z-b+b_1 i)^\beta(z-c+c_1 i)^\gamma\dots}$$

gesetzt ist, und $F^{(p-1)}(m+ni)$ den $(p-1)$ten Differentialquotienten bezeichnet.

Ich habe diese beiden Sätze jetzt wörtlich aus meinem Hefte abgeschrieben, ohne sie *heute* wieder geprüft zu haben. Da ich vorläufig nicht dazu kommen kann, jene Modificationen der *Cauchy*schen Methode gehörig auszuarbeiten, so überlasse ich Ihnen, mit dieser Mittheilung zu machen was Sie wollen.

Nun zu einer andern Arbeit, welche Ihnen, wie ich glaube, nicht mifsfallen wird. Nachdem ich meine, Ihnen schon früher mitgetheilte Behandlungsart des Problems der Rotation im Januar dieses Jahres zum erstenmal auf einem freilich sehr mühsamen Wege zu Ende geführt hatte, bin ich endlich zu einer ganz einfachen Integration der partiellen Differentialgleichung, von der nach Ihrer Theorie dieses Problem abhängt, gelangt. Ich schreibe Ihnen das Hauptresultat hin, woraus Sie sofort alles übrige beurtheilen können.

Die partielle Differentialgleichung ist, wenn $A, B, C, \theta, \varphi, \psi$ dieselbe Bedeutung wie bei *Poisson* haben:

$$0=\frac{1}{2A}\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)-\cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{2B}\left\{\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\cos\vartheta\frac{\partial V}{\partial\varphi}+\frac{\partial V}{\partial\psi}\right)+\sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right\}^2+\frac{1}{2C}\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial t}.$$

Die erste Lösung, welche ich fand, ist folgende:

$$V=t_1 t+\psi_1\psi-\psi_1\operatorname{arctang}\frac{\theta_1}{\sqrt{(\varrho^2-\psi_1^2-\theta_1^2)}}$$
$$+\varrho\left\{\operatorname{arctang}\frac{\psi_1\theta_1}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-\psi_1^2-\theta_1^2)}}+\operatorname{arctang}\frac{\varphi_1\theta_1}{\varrho\sqrt{(\varrho^2-\varphi_1^2-\theta_1^2)}}\right\}$$
$$-\left(\frac{\varrho^2}{C}+2t_1\right)\int\frac{\varphi_1^2\,d\varphi_1}{(\varrho^2-\varphi_1^2)\sqrt{\left[\left(\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)\varphi_1^2-\frac{\varrho^2}{B}+2t_1\right)\left(\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)\varphi_1^2+\frac{\varrho^2}{A}+2t_1\right)\right]}},$$

wo t_1, ψ_1 und ϱ Constanten sind, und φ_1 und θ_1 durch die Gleichungen

$$\theta_1^2 + \left(\frac{\varphi_1 + \psi_1 \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2 = \varrho^2 - \psi_1^2$$

$$0 = \frac{1}{2A}\left\{\left(\frac{\psi_1 + \varphi_1 \cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\varphi - \theta_1 \cos\varphi\right\}^2$$

$$+ \frac{1}{2B}\left\{\frac{\psi_1 + \varphi_1 \cos\theta}{\sin\theta}\cos\varphi + \theta_1 \sin\varphi\right\}^2 + \frac{\varphi_1^2}{2C} + t_1,$$

zu bestimmen sind. Sie erkennen sofort, dafs Ihre Integralgleichung des Problems der Rotation, welche Sie durch die Methode des letzten Multiplicators gefunden haben, hiemit im Zusammenhange steht. Ich hatte mich durch die Verwicklung der Formeln nicht abschrecken lassen, durch partielle Differentiation nach t_1, ψ_1 und ϱ die drei übrigen Integrale abzuleiten, und fand, dafs die Differentiation nach ϱ Ihre Integralgleichung mit einem constanten Factor multiplicirt liefert.

Meine zweite (jetzige) Lösung ist folgende:

Wenn ich ein sphärisches Dreieck nehme, dessen Seiten durch

$$\nu, \;\lambda, \;\mu,$$

und dessen Winkel durch

$$N, \; \varLambda, \; M$$

bezeichnet sein mögen, und ich setze dann

$$N \text{ constant}, \quad M = \pi - \theta,$$

$$\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)\sin^2(\varphi+\nu)\sin^2\varLambda + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)\cos^2(\varphi+\nu)\sin^2\varLambda = \frac{1}{C} + \frac{2t_1}{\varrho^2},$$

wo ϱ und t_1 constant sind, so ist die Lösung:

$$V = t_1 t - \varrho(\psi - \lambda)\cos N - \varrho\mu + \varrho\int \cos\varLambda \, d(\varphi+\nu).$$

Hieraus leite ich Alles, was dazu gehört, fast ohne Rechnung ab; so wie ich auch diese Lösung selbst fast ohne Rechnung finde. Einige Schwierigkeit hat mir die Natur der neuen Variabeln und das sphärische Dreieck gemacht. Ich habe sie aber überwunden.

Es ist wohl möglich, dafs Ihnen diese Sachen von einem andern Standpuncte aus leicht erscheinen, aber mir haben sie einige Mühe gemacht, und ich mag sie daher auch für mehr werth halten, als sie sind. Jedenfalls freue ich mich, sie fertig gemacht zu haben, um mich jetzt in die *Rosenhainsche* herrliche Arbeit versenken zu können, aus welcher ich den Muth zur Ausarbeitung meiner Transformation schöpfen will.

4.

Auszug eines Schreibens des Prof. C. G. J. Jacobi an Herrn Prof. Heine in Bonn.

Gotha, den 10ten Januar 1851.

Sie haben in Ihrem „Beitrag zur Theorie der Anziehung und der Wärme" im 29ten Bande des mathematischen Journals, eine neue Lösung der von *Lamé* behandelten Aufgabe darauf gegründet, dafs der Ausdruck

$$\{\sin\eta + i\cos\eta\cos(\vartheta-\psi)\}^n = X_n$$

der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_1^2} + \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varepsilon_2^2} + n(n+1)(\varrho_1^2-\varrho_2^2)X_n = 0$$

genügt, wenn

ψ eine willkürliche Constante bedeutet

und ferner

$$\varepsilon_1 = \int_b^{\varrho_1} \frac{d\varrho_1}{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(c^2-\varrho_1^2))}},$$

$$\varepsilon_2 = \int_c^{\varrho_2} \frac{d\varrho_2}{\sqrt{((b^2-\varrho_2^2)(c^2-\varrho_2^2))}}$$

ist, wo $a < b < c$ gegebne Constanten sind; endlich

$$\sin\eta = \frac{\varrho_1\varrho_2}{bc}$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\sqrt{((\varrho_1^2-b^2)(b^2-\varrho_2^2))}}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sqrt{((c^2-\varrho_1^2)(c^2-\varrho_2^2))}}{c\sqrt{(c^2-b^2)}} \text{ ist.}$$

Ich habe mir hier erlaubt, die in meiner „particulären Lösung" im 36ten Bande des Journals angewandte Bezeichnung beizubehalten und für Ihre Winkel ϑ und φ respective $\frac{1}{2}\pi-\eta$ und ϑ zu schreiben. Setzt man, wie dort

$$c\varepsilon = v, \quad c\varepsilon_1 = K - v_1, \quad c\varepsilon_2 = v_2,$$

und bezieht die elliptischen Functionen auf den Modul

$$k = \frac{1}{c}(c^2-b^2),$$

so ist

$$\varrho = c\Delta \operatorname{am}(iv)$$
$$\varrho_1 = c\Delta \operatorname{am} v_1$$
$$\varrho_2 = c\cdot\frac{k'}{i}\operatorname{tg}\operatorname{am}(iv_2)$$
$$= c\Delta\operatorname{am}(K+iK'-iv_2);$$

woraus

$$\sin\eta = \frac{1}{i}\Delta\operatorname{am} v_1 \operatorname{tg}\operatorname{am}(iv_2)$$
$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\cos\operatorname{am} v_1}{\cos\operatorname{am}(iv_2)}$$
$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sin\operatorname{am} v_1\,\Delta\operatorname{am}(iv_2)}{\cos\operatorname{am}(iv_2)}$$

folgt. Es wird ferner die partielle Differentialgleichung zu

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2}+n(n+1)(\Delta^2\operatorname{am} v_1+k'^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am} v_2)X_n = 0.$$

Es wird Ihnen vielleicht nicht ganz uninteressant sein, zu sehen, wie man mit Hülfe der elliptischen Additionsformeln durch einfache Betrachtungen von dieser Differentialgleichung mit Nothwendigkeit zu dem obigen Ausdruck von X_n gelangt, wenn man die alleinige Voraussetzung macht, dafs X_n die $n$te Potenz einer von n unabhängigen Function sein soll.

Ich führe zuerst an die Stelle von v_1 und v_2 als unabhängige Variabeln die Gröfsen

$$v_1+iv_2 = w',\quad v_1-iv_2 = w''$$

ein. Es wird dann

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_1^2} = \frac{\partial^2 X_n}{\partial w'^2}+\frac{\partial^2 X_n}{\partial w''^2}+2\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''}$$
$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial v_2^2} = -\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'^2}-\frac{\partial^2 X_n}{\partial w''^2}+2\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''}$$

und daher die vorgelegte Differentialgleichung:

$$4\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''}+n(n+1)(\Delta^2\operatorname{am} v_1+k'^2\operatorname{tg}^2\operatorname{am} v_2)X_n = 0.$$

Es sei jetzt

$$X_n = U^{-n},$$

so wird

$$\frac{\partial X_n}{\partial w'} = -nU^{-(n+1)}\frac{\partial U}{\partial w'},$$

$$\frac{\partial^2 X_n}{\partial w'\partial w''} = n(n+1)U^{-(n+2)}\frac{\partial U}{\partial w'}\frac{\partial U}{\partial w''} - nU^{-(n+1)}\frac{\partial^2 U}{\partial w'\partial w''}.$$

Wenn man den letzten Ausdruck in die Differentialgleichung substituirt, so sieht man, dafs für den besondern Fall wo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial w'\partial w''} = 0$$

der Exponent n aus ihr gänzlich herausgeht, und dafs umgekehrt, wenn es eine Lösung $X_n = U^{-n}$ geben soll, in welcher U von n unabhängig ist, die Gleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial w'\partial w''} = 0$ Statt finden oder U die Form

$$U = U' + U''$$

haben mufs, wo U' Function blofs von w', U'' Function blofs von w'' ist. Für diesen Fall verwandelt sich durch die Substitution

$$X_n = (U' + U'')^{-n},$$

in welcher U' Function blofs von w', U'' Function blofs von w'' ist, die partielle Differentialgleichung in die folgende:

$$4\frac{\partial U'}{\partial w'}\frac{\partial U''}{\partial w'} + (U' + U'')^2(\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am} v_2) = 0;$$

aus welcher n ganz herausgegangen ist.

Es ist jetzt der wichtige Umstand zu bemerken, dafs sich der Ausdruck

$$\Delta^2 \operatorname{am} v_1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \operatorname{am}(iv_2) = \frac{1}{c^2}(\varrho_1^2 - \varrho_2^2)$$

auf eine einfache und rationale Art durch die elliptischen Functionen darstellen läfst, deren Argumente $w' = v_1 + iv_2$ und $w' = v_1 - iv_2$ sind. In der That hat man zufolge der in den „*Fundamentis*" gegebenen Additionsformeln (11, 32 u. 33),

$$N(1 + \Delta \operatorname{am} w' \Delta \operatorname{am} w'') = \Delta^2 \operatorname{am} v_1 + \Delta^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

$$N \cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'') = \cos^2 \operatorname{am}(iv_2) - \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)\Delta^2 \operatorname{am} v_1,$$

wo

$$N = 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} v_1 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

ist. Es folgt hieraus

$$N.\Delta \operatorname{am} w' \Delta \operatorname{am} w'' = \Delta^2 \operatorname{am} v_1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)\cos^2 \operatorname{am} v_1$$

$$= \Delta^2 \operatorname{am} v_1 \cos^2 \operatorname{am}(iv_2) + k'^2 \sin^2 \operatorname{am}(iv_2)$$

$$N(1 + \cos(\operatorname{am} w' - \operatorname{am} w'')) = 2\cos^2 \operatorname{am}(iv_2),$$

und es ist daher

$$\frac{2\Delta\,\mathrm{am}\,w'\,\Delta\,\mathrm{am}\,w''}{1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'')} = \Delta^2\,\mathrm{am}\,v' + k'^2\,\mathrm{tg}^2\,\mathrm{am}\,(iv'').$$

Die zu erfüllende partielle Differentialgleichung wird daher,

$$2\frac{\partial U'}{\partial w'}\frac{\partial U''}{\partial w''} + (U'+U'')^2 \cdot \frac{\Delta\,\mathrm{am}\,w'\,\Delta\,\mathrm{am}\,w''}{1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'')} = 0.$$

Da U' Function von w' und U'' Function von w'' ist, so kann man auch U' als Function von $e^{i\,\mathrm{am}\,w'}$ und U'' als Function von $e^{i\,\mathrm{am}\,w''}$ betrachten. Setzt man

$$e^{i\,\mathrm{am}\,w'} = t', \qquad e^{i\,\mathrm{am}\,w''} = t'',$$

so wird

$$\frac{\partial U}{\partial w'} = i\Delta\,\mathrm{am}\,w'.\,t'\,\frac{\partial U'}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial U}{\partial w''} = i\Delta\,\mathrm{am}\,w''.\,t''\,\frac{\partial U''}{\partial t''}$$

$$1+\cos(\mathrm{am}\,w'-\mathrm{am}\,w'') = \frac{(t'+t'')^2}{2t't''},$$

und daher

$$\frac{\partial U'}{\partial t'}\frac{\partial U''}{\partial t''} = \left(\frac{U'+U''}{t'+t''}\right)^2.$$

Es folgt hieraus

$$t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}\cdot\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}} + t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}\cdot\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}} = U'+U'',$$

und wenn man hintereinander nach t' und t'' differentiirt,

$$\frac{\partial.t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'}\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''} + \frac{\partial.t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''}\cdot\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} = 0.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn gleichzeitig

$$\frac{\partial.t'\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} = \alpha\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}}}{\partial t'} \quad \text{und} \quad \frac{\partial.t''\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''} = -\alpha\frac{\partial\sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}}}{\partial t''}$$

ist, wo α eine Constante bedeutet. Die Integration giebt,

$$\sqrt{\frac{\partial U'}{\partial t'}} = \frac{\beta'}{t'-\alpha}, \qquad \sqrt{\frac{\partial U''}{\partial t''}} = \frac{\beta''}{t''+\alpha},$$

$$U' = -\frac{\beta'\beta'}{t'-\alpha}+\gamma', \qquad U'' = -\frac{\beta''\beta''}{t''+\alpha}+\gamma'';$$

wo β', β'', γ', γ'' ebenfalls Constanten sind. Substituirt man diese Werthe

von U' und U'' in die Differentialgleichung,

$$\frac{\partial U'}{\partial t'}\frac{\partial U''}{\partial t''} = \left(\frac{U'+U''}{t'+t''}\right)^2,$$

so erhält man, wenn man die Quadratwurzel auszieht und mit

$$(t'+t'')(t'-\alpha)(t''+\alpha)$$

multiplicirt:

$$\beta'\beta''(t'+t'') = -\beta''\beta''(t'-\alpha)-\beta'\beta'(t''+\alpha)+(\gamma'+\gamma'')(t'-\alpha)(t''+\alpha).$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn

$$\gamma'+\gamma'' = 0, \quad \beta'\beta' = \beta''\beta'' = \beta'\beta''$$

ist. Setzt man $\beta'\beta' = \beta''\beta'' = \beta$, so wird

$$U = U'+U'' = \frac{\beta(t'+t'')}{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}.$$

Es wird daher

$$X_n = U^{-n} = \beta\left\{\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''}\right\}^n;$$

und dies ist die allgemeinste Lösung der vorgelegten partiellen Differentialgleichung, in welcher X_n der $n$ten Potenz einer von n selbst unabhängigen Function gleich wird.

Wenn α' und α'' die Amplituden zweier Argumente sind und σ' die Amplitude ihrer *Summe* bedeutet, so hat man, wenn

$$N = 1-k^2\sin^2\alpha'\sin^2\alpha''$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} Ne^{i\sigma'} &= \cos\alpha'\cos\alpha''-\sin\alpha'\sin\alpha''\Delta\alpha'\Delta\alpha'' \\ &\quad +i(\sin\alpha'\cos\alpha''\Delta\alpha''+\sin\alpha''\cos\alpha'\Delta\alpha') \end{aligned}$$

oder

$$Ne^{i\sigma'} = (\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha')(\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha'').$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} N &= (\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha')(\cos\alpha''-i\sin\alpha''\Delta\alpha') \\ &= (\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha'')(\cos\alpha'-i\sin\alpha'\Delta\alpha''), \end{aligned}$$

und daher, wie ich in der oben genannten Abhandlung bemerkt habe,

$$e^{i\sigma''} = \frac{\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''-i\sin\alpha''\Delta\alpha'} = \frac{\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha'}{\cos\alpha'-i\sin\alpha'\Delta\alpha''}.$$

Nennt man σ'' die Amplitude der *Differenz* der beiden Argumente, so erhält man aus dieser Formel durch Änderung von α'' in $-\alpha''$:

$$e^{i\sigma''} = \frac{\cos\alpha'+i\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''+i\sin\alpha''\Delta\alpha'} = \frac{\cos\alpha''-i\sin\alpha''\Delta\alpha'}{\cos\alpha'-i\sin\alpha'\Delta\alpha''}.$$

Nimmt man v_1 und iv_2 für die beiden Argumente, so wird

$$\alpha' = \operatorname{am} v_1, \quad \alpha'' = \operatorname{am}(iv_2), \quad \sigma' = \operatorname{am}(v_1 + iv_2), \quad \sigma'' = \operatorname{am}(v_1 - iv_2)$$

$$e^{i\sigma'} = t', \quad e^{i\sigma''} = t'';$$

ferner zufolge der zu Anfang gefundnen Formeln,

$$\sin\eta = -i\Delta\alpha' \operatorname{tg}\alpha''$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha''}$$

$$\cos\eta\sin\vartheta = \frac{\sin\alpha'\Delta\alpha''}{\cos\alpha''},$$

und daher auch

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\alpha'\Delta\alpha''.$$

Man hat daher

$$t' = e^{i\operatorname{am}(v_1+iv_2)} = \frac{1-\sin\eta}{\cos\eta}e^{i\vartheta}$$

$$t'' = e^{i\operatorname{am}(v_1-iv_2)} = \frac{1+\sin\eta}{\cos\eta}e^{i\vartheta};$$

woraus auch

$$t'+t'' = \frac{2e^{i\vartheta}}{\cos\eta}, \quad t'-t' = -2\operatorname{tg}\eta e^{i\vartheta}, \quad t't' = e^{2i\vartheta}$$

folgt. Es wird daher

$$\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''} = \tfrac{1}{2}(\cos\eta e^{i\vartheta} - 2\alpha\sin\eta - \alpha^2\cos\eta e^{-i\vartheta}).$$

Setzt man

$$\alpha = ie^{i\psi},$$

so verwandelt sich diese Formel in die folgende,

$$\frac{(t'-\alpha)(t''+\alpha)}{t'+t''} = -(\alpha\sin\eta + \tfrac{1}{2}i\cos\eta e^{i(\vartheta-\psi)} + \tfrac{1}{2}i\cos\eta e^{-i(\vartheta-\psi)})$$
$$= -ie^{i\psi}(\sin\eta + \cos\eta\cos(\vartheta-\psi)).$$

Es wird daher, abgesehen von einem constanten Factor, der allgemeinste Ausdruck von X_n, welcher eine $n$te Potenz einer von n unabhängigen Function ist,

$$(\sin\eta + \cos\eta\cos(\vartheta-\psi))^n,$$

w. z. b. w.

5.
Über die Zusammensetzung der Zahlen aus ganzen positiven Cuben; nebst einer Tabelle für die kleinste Cubenanzahl, aus welcher jede Zahl bis 12000 zusammengesetzt werden kann.

(Von Herrn *C. G. J. Jacobi,* † weiland Professor zu Berlin.)

In den „*Meditationes Algebraicae* von *Eduard Waring* (S. 349 der 3ten Ausgabe. Cambridge 1782.)" wird der Satz ausgesprochen, *dafs zur Zusammensetzung der Zahlen aus (ganzen positiven) Cuben deren nie mehr als 9, zur Zusammensetzung der Zahlen aus (ganzen) Biquadraten deren nie mehr als 19 erfordert werden.*

Der Satz, dafs jede ganze Zahl die Summe von 9 oder weniger ganzen positiven Cuben ist, wird durch eine im 14ten Bande dieses Journals mitgetheilte Tabelle bestätigt, welche für jede Zahl bis 3000 die kleinste Anzahl von ganzen positiven Cuben angiebt, aus welchen sie durch Addition zusammengesetzt werden kann. Diese Tabelle ergab zugleich den merkwürdigen Umstand, dafs die Zahlen, zu deren Zusammensetzung 9 oder 8 Cuben erfordert werden, sehr bald aufhören, und dafs die Zahlen, zu deren Zusammensetzung 7 Cuben gebraucht werden, gegen das Ende der Tabelle so spärlich vorkommen, dafs es wahrscheinlich wurde, auch sie würden über eine gewisse Gränze nicht hinausreichen, oder dafs alle Zahlen, welche diese Grenze übersteigen, aus 6 oder weniger ganzen positiven Cuben zusammengesetzt werden können. Ja selbst diejenigen Zahlen, zu deren Zusammensetzung man 6 Cuben braucht, kommen bereits gegen das Ende dieser Tabelle weniger häufig vor. Sollten auch diese Zahlen einmal gänzlich aufhören, so würde der Satz gelten, *dafs alle Zahlen, welche eine gewisse Gränze übersteigen, die Summen von 5 oder weniger ganzen positiven Cuben sind.*

Die *Anwesenheit* des durch seine bewundernswürdige Fertigkeit und Sicherheit berühmten Rechners *Dase* veranlafste mich vor einigen Jahren, denselben aufzufordern, eine ähnliche Tabelle, wie die erwähnte, in gröfserem Umfange, für alle Zahlen bis 12000, zu berechnen; wobei sich denn mehrere Fehler der früheren Tabelle ergaben. So wurde gefunden, dafs nicht blofs die eine

Zahl 23, sondern auch noch eine zweite, 239, zu ihrer Zusammensetzung 9 Cuben erfordert. Es waren ferner unter den 15 Zahlen, die nach Herrn *Dases* Rechnung aus *acht* und keiner kleinern Anzahl Cuben zusammengesetzt werden können, nemlich:

15 22 50 114 167 175 186 212
231 238 303 364 420 428 454,

die beiden Zahlen 231 und 303 nicht als solche aufgeführt, und dagegen die Zahl 239 irrthümlich darunter angegeben worden.

Die Zahlen, zu deren Zusammensetzung *sieben* Cuben erfordert werden, sind die folgenden:

7 14 21 42 47 49 61 77 85 87 103 106 111 112 113 122 140
148 159 166 174 178 185 204 211 223 229 230 237 276 292 295
300 302 311 327 329 337 340 356 363 390 393 401 412 419 427
438 446 453 465 491 510 518 553 616 634 635 644 670 671 679
735 787 806 833 850 852 894 913 950 958 976 1021 1122 1148
1174 1175 1210 1236 1239 1300 1337 1452 1453 1454 1489 1580
1634 1671 1679 1697 1912 1938 1957 1965 2039 2110 2166 2183
2299 2426 2660 3020 3172 3452 3639 3685 3964 4306 4369 4388
4703 4775 4882 4982 5279 5305 5306 5818 8042.

Die Anzahl dieser Zahlen bis 3000 beträgt 103, von welchen in der früheren Tafel 29 fehlen, während bei 4 Zahlen irrthümlich die Cubenanzahl 7 angegeben ist. Man sieht daher, daſs auch in Bezug auf das früher berechnete Intervall von 1 bis 3000 die von Herrn *Dase* berechnete Tafel als ganz neu zu betrachten ist.

In der früheren Tafel waren unter den im Vorstehenden angegebnen Zahlen die drei Zahlen 2299, 2426, 2660 ausgelassen, und deshalb in einem Intervall von über 800 Zahlen keine mehr gefunden worden, deren Zusammensetzung 7 Cuben erforderte; man hielt es daher für wahrscheinlich, daſs 2183 die letzte von diesen Zahlen sei. Aber man sieht, daſs es nach derselben noch 21 Zahlen giebt, die aus nicht weniger als 7 Cuben zusammengesetzt werden können. Nach der Zahl 5818 findet sich erst nach einem Intervall von über 2000 Zahlen eine solche Zahl (8042) wieder, und nach dieser ist, in einem Intervall von fast 4000 Zahlen, keine weiter gefunden worden, so daſs es sehr wahrscheinlich ist, *daſs alle Zahlen, welche die Zahl 8042 an Gröſse übertreffen, die Summe von 6 oder weniger Cuben sind.*

Um am leichtesten übersehen zu können, wie sich die Zahlen, zu deren Zusammensetzung 2, 3, 4 etc. Cuben erfordert werden, vertheilen, habe ich ihre Anzahl für jedes Intervall zwischen 2 aufeinander folgenden Cuben von 1 bis 22^3 in der folgenden Tabelle angegeben.

Tabelle für die Anzahl der zwischen je zwei aufeinander folgenden Cuben von 1 bis 23^3 enthaltenen Zahlen, welche in 2, 3, 4, . . 9 und in nicht weniger Cuben zerlegt werden können.

		2	3	4	5	6	7	8	9
1 . .	8	1	1	1	1	1	1	0	0
8 . .	27	2	3	3	3	2	2	2	1
27 . .	64	3	5	7	8	8	4	1	.
64 . .	125	3	7	11	14	15	9	1	.
125 . .	216	5	12	21	24	15	9	4	.
216 . .	343	6	14	24	33	31	14	3	1
343 . .	512	6	22	42	48	32	14	4	.
512 . .	729	8	26	59	70	44	9	.	.
729 . .	1000	7	32	74	92	54	11	.	.
1000 . .	1331	9	39	96	115	62	9	.	.
1331 . .	1728	10	44	112	142	78	10	.	.
1728 . .	2197	10	52	132	175	91	8	.	.
2197 . .	2744	13	61	175	204	90	3	.	.
2744 . .	3375	11	73	215	238	91	2	.	.
3375 . .	4096	14	81	231	280	110	4	.	.
4096 . .	4913	13	85	280	323	109	6	.	.
4913 . .	5832	16	98	316	371	112	5	.	.
5832 . .	6859	17	117	371	416	105	0	.	.
6859 . .	8000	15	121	417	474	113	0	.	.
8000 . .	9261	19	144	479	517	100	1	.	.
9261 . .	10648	18	152	538	562	116	6	.	.
		206	1189	3604	4110	1379	121	15	2

Nach der früher für die Argumente von 1 bis 3000 berechneten Tabelle befanden sich von den Zahlen, deren Zusammensetzung *sechs* Cuben fordert, in dem Intervalle 12^3 bis 13^3 noch 75, dagegen zwischen 13^3 und 14^3 nur noch 64, während in der That nach der obigen Tabelle davon in dem ersten Intervalle 91, in dem zweiten 90 vorhanden sind; was eine viel geringere Abnahme dieser Zahlen ergiebt. Die Anzahl dieser Zahlen in den Intervallen zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Cuben von 12^3 bis 22^3 beträgt, wie

man aus der obigen Tabelle sieht,

91 90 91 110 109 112 105 113 100 116,

und fährt daher im Ganzen noch immer zu wachsen fort. Man wird aber, mit einer einzigen Ausnahme, lauter abnehmende Werthe erhalten, wenn man die vorstehenden Zahlen durch die Anzahl aller in den entsprechenden Intervallen befindlichen Zahlen dividirt; was die folgenden Brüche giebt:

$$\frac{1}{5\frac{2}{13}} \quad \frac{1}{6\frac{7}{90}} \quad \frac{1}{6\frac{85}{91}} \quad \frac{1}{6\frac{61}{110}} \quad \frac{1}{7\frac{54}{109}}$$

$$\frac{1}{8\frac{23}{112}} \quad \frac{1}{9\frac{82}{105}} \quad \frac{1}{10\frac{11}{113}} \quad \frac{1}{12\frac{61}{100}} \quad \frac{1}{12\frac{95}{116}}$$

Es ist daher wohl kein Zweifel, dafs die Zahlen, zu deren Zusammensetzung *sechs* Cuben erforderlich sind, immer seltner werden; doch mögen sie erst sehr spät gänzlich aufhören.

Aus der obigen Tabelle ersieht man auch, dafs die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung *drei* Cuben hinreichen, für das Intervall von 1 bis 6000 beständig gröfser ist, als die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung *sechs* Cuben erforderlich sind, während in der zweiten Hälfte der Tafel beständig das Gegentheil Statt findet.

Die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung *fünf* Cuben erforderlich sind, übertrifft beständig die Anzahl der Zahlen, zu deren Zusammensetzung nur *vier* Cuben erfordert werden. Aber der Überschufs der einen Anzahl über die andere nimmt gegen das Ende der Tafel ab. Es fragt sich, ob in der Folge die zweite Anzahl der erstern sich immer mehr nähern, oder vielleicht dieselbe von einer gewissen Gränze an sogar übertreffen wird.

Man hat der Haupttafel eine aus derselben leicht zu entnehmende Tabelle der Zahlen bis 12000 hinzugefügt, welche die Summen von *zwei* oder *drei* Cuben sind. Da alle Cuben, durch 9 dividirt, nur die Reste 0 und ± 1 lassen, so folgt, dafs die Summen von *zwei* Cuben, durch 9 dividirt, nur die Reste 0, ± 1, ± 2, und die Summen von *drei* Cuben, durch 9 dividirt, nur die Reste 0, ± 1, ± 2, ± 3 lassen können. Erst die Summe von *vier* Cuben können, durch 9 dividirt, *alle* Reste lassen. Das Gleiche gilt, wenn einer oder mehrere der Cuben negativ genommen werden.

Construction der Tafel, welche für jede Zahl die kleinste Anzahl der ganzen positiven Cuben angiebt, aus welchen dieselbe durch Addition zusammengesetzt werden kann.

Es wird nicht überflüssig sein, über die leichteste Construction der Tafel einige Bemerkungen hinzuzufügen, da sie auch bei der Construction anderer Tafeln von Nutzen sein können, und sich oft erst, nachdem ihre Berechnung ganz oder zum Theil vollendet ist, diejenigen einfachen Betrachtungen darbieten, durch welche, wenn sie von Anfang an gemacht worden wären, eine wesentliche Erleichterung oder Abkürzung der Arbeit hätte erzielt werden können.

Die Zahlen, zu deren Zusammensetzung m Cuben erfordert werden, werde ich mit (m) bezeichnen. Die aufeinander folgenden Zahlen, welche in die kleinste Cubenzahl zu zerlegen sind, sollen die *Argumente* der Tafel bilden und ihre *Felder* diese kleinste Cubenanzahl enthalten. Es werden demnach die Zahlen (1), (2), (3) etc. die Argumente sein, deren zugehörige Felder respective die Zahlen 1, 2, 3 etc. enthalten.

Sind bereits die Zahlen 1, 2, .. m in ihre Felder eingetragen und daher die Zahlen (1), (2), .. (m) bekannt, *so hat man* $m+1$ *bei allen Argumenten* $(m)+x^3$ *einzutragen, bei denen noch leere Felder angetroffen werden.* Denn alle Zahlen $(m)+x^3$ sind die Summen von $m+1$ Cuben, weil die Zahlen (m) die Summen von m Cuben sind, und sie können nicht die Summen von weniger Cuben sein, wenn bei ihnen ein leeres Feld angetroffen wird, weil alle Felder, in welche kleinere Zahlen als $m+1$ einzutragen sind, der gemachten Voraussetzung gemäfs, bereits ausgefüllt sein sollen. Man kann nach dieser Regel nach und nach alle Felder der Tafel ausfüllen, indem man damit anfängt, die Zahl 1 in alle Felder einzutragen, deren Argumente die Cubikzahlen selber sind. Es versteht sich, dafs die Additionen immer nur so weit fortgesetzt werden, als die Summe nicht die der Tafel vorgesteckte Gränze (hier 12000) überschreitet.

Es soll bei diesen Additionen der Cuben zu den Argumenten (m) ein für allemal festgesetzt werden, dafs mit den kleineren Cuben begonnen und derselbe Cubus zuvor zu allen Argumenten (m) addirt werde, ehe man dazu übergeht, den nächst gröfseren Cubus zu denselben Argumenten zu addiren. Ist M eine der Zahlen (m), und findet man bei dem Argumente $M+x^3$, welches ich mit M' bezeichnen will, ein noch leeres Feld, so ist dies nicht nur, wie im Vorhergehenden gezeigt worden, ein Zeichen, dafs M' eine der Zahlen

$(m+1)$ ist, sondern *es ist auch, unter den gemachten Voraussetzungen, der Cubus x^3 der kleinste von allen, welche bei irgend einer der verschiedenen möglichen Zerfällungen von M' in $m+1$ Cuben vorkommen können.* Denn könnte irgend ein kleinerer Cubus bei einer dieser Zerfällungen vorkommen, so müfste das dem Argumente M' zugehörige Feld bereits bei den Additionen dieses kleineren Cubus zu den Argumenten (m) ausgefüllt worden sein.

Es folgt hieraus, *dafs x^3 auch nicht kleiner als irgend ein bei einer Zerfällung von M in m Cuben vorkommender Cubus sein kann;* denn jede solche Zerfällung giebt durch Hinzufügung von x^3 eine der Zerfällungen von M' in $m+1$ Cuben. Da hiernach immer, wenn man bei dem Argumente $M' = M + x^3$ ein noch leeres Feld finden soll, $M \geqq mx^3$ sein mufs, *so wird es umgekehrt hinreichen, bei der Addition von x^3 zu den Argumenten (m) von solchen Argumenten anzufangen, welche $\geqq mx^3$ sind.* Wenn man nämlich x^3 zu irgend einem Argumente M, welches $< mx^3$ ist, addirt, so kann man, dem Vorhergehenden zufolge, mit Bestimmtheit voraus wissen, dafs das zu dem Argumente $M + x^3$ gehörige Feld bereits mit $m+1$ oder einer kleineren Zahl besetzt ist.

Man kann eine noch gröfsere Abkürzung der Arbeit erlangen, *wenn man jedesmal, so oft bei einem durch die Addition von x^3 erhaltenen Argumente ein leeres Feld angetroffen wird, in dasselbe, aufser der Cubenanzahl, auch die Wurzel x einträgt.* Es sei nach dieser Regel bei einem Argumente M die Wurzel a eingetragen, so ist, wenn bei dem Argumente $M + x^3$ ein noch leeres Feld angetroffen wird, dem Vorhergehenden zufolge, immer

$$a \geqq x.$$

Es folgt hieraus, *dafs wenn man zu den Argumenten (m), um daraus die Argumente $(m+1)$ abzuleiten, einen Cubus x^3 zu addiren hat, diese Addition immer erspart werden kann, wenn die bei dem Argumente (m) neben der Cubenanzahl befindliche Zahl kleiner als x ist.* Sollte man nämlich x^3 zu einem solchen Argumente addiren, so würde man ein Argument erhalten, bei welchem ein schon ausgefülltes Feld ist, und also eine unnütze Operation gemacht haben.

Wenn nach vollendeter Eintragung der Zahlen $1, 2, \ldots m$ nur noch wenig Felder leer bleiben, so wird man besser thun, von den Argumenten, bei welchen die Felder noch leer sind, die Cuben *abzuziehen,* wobei man wieder erst nach Ausführung aller Subtractionen desselben Cubus zu dem nächst gröfseren übergeht. *Bedeutet N ein Argument, bei welchem das*

Feld noch leer ist, so wird man die Subtractionen des Cubus x^3 von solchen Argumenten N anfangen, welche $\geqq (m+1)x^3$ sind; und wenn sich bei dem Argumente $N-x^3$ die Cubenanzahl m eingetragen findet, wird man bei N die Cubenanzahl $m+1$ eintragen. Es wird dies umgekehrte Verfahren mit Vortheil angewandt, um die Argumente (7), (8), (9) nach einander aus den Argumenten (6), (7), (8) abzuleiten. Um die Argumente (6) aus den Argumenten (5) zu erhalten, würde man beide Methoden, der Additionen und Subtractionen, etwa mit gleichem Vortheil anwenden.

Man kann aber auch, indem man das für die Construction der Tafel angegebene Verfahren in allem Übrigen unverändert läfst, die Additionen oder Subtractionen, welche nöthig sind, um für ein gegebnes x je zwei Argumente M und $M+x^3$ aus einander zu finden, ganz, oder zum bei weitem gröfsten Theil durch ein rein mechanisches Verfahren ersetzen. Man theile nämlich die Tafel in mehrere Theile, und construire jeden dieser Theile der Tafel auf einem besondern Streifen: so kann für ein gegebnes x die Bestimmung je zweier Argumente M und $M+x^3$ aus einander, ohne eine Addition oder Subtraction, durch blofses Nebeneinanderlegen der Streifen geschehen.

Für unsern Fall wird jeder dieser Streifen ohne Unbequemlichkeit 1000 Felder umfassen können, wenn man die Argumente so ordnet, dafs in *zwei* Verticalcolumnen am Rande die *Einer* von 1 bis 50 und 51 bis 100, und in einer obern Horizontalreihe die 10 *Hunderte* gefunden werden; wie dies in der unten mitgetheilten Tafel der Fall ist. Man bezeichne die Streifen, welche die Argumente von 1 bis 1000, von 1001 bis 2000, von 2001 bis 3000 etc. umfassen, respective mit S_1, S_2, S_3 etc., und nenne A_i die auf dem Streifen S_i enthaltenen Argumente. Wenn ein gegebner Cubus x^3 zwischen $\alpha.1000$ und $(\alpha+1).1000$ enthalten ist, so werden die sämmtlichen Argumente A_i-x^3 auf den beiden Streifen $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$ zu finden sein. Um daher für ein gegebnes x die Argumente A_i und A_i-x^3 aus einander ohne Rechnung zu finden, wird man nur nöthig haben, neben die beiden Streifen $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$, welche man sich hiebei fest mit einander verbunden denken mag, den Streifen S_i so zu legen, dafs die zu je zwei Argumenten A_i und A_i-x^3 gehörigen Felder in dieselbe Horizontallinie zu liegen kommen. Um dies für alle 1000 Argumente A_i zu bewirken, braucht man, wie leicht zu sehen, S_i neben $S_{i-\alpha-1}$ und $S_{i-\alpha}$ nur in *zwei* verschiedne Lagen zu bringen. Die eine Lage bringt die erste Horizontalreihe von S_i, die mit dem Argument $(i-1).1000+1$ beginnt, in die Linie, in welcher in $S_{i-\alpha-1}$ das Argument

$(i-1).1000+1-x^3$ angetroffen wird; in der andern Lage kommt die letzte Horizontalreihe von S_i, die mit dem Argument $i.1000$ schliefst, in dieselbe Linie, in welcher sich in $S_{i-\alpha}$ das Argument $i.1000-x^3$ findet.

Wenn $x=10$, oder $x=20$ ist, braucht man S_i nur seiner ganzen Länge nach neben den einen Streifen S_{i-1} oder S_{i-8} zu legen. Wenn $x<10$ ist, wird $S_{i-\alpha}$ der Streifen S_i selber. Man mufs in diesem Falle S_i neben dem einen Streifen S_{i-1} in seine beiden Lagen bringen und aufserdem die auf demselben Streifen befindlichen, den Argumentenpaaren (m) und $(m)+x^3$ angehörigen Felder aufsuchen. Um diese Argumentenpaare, wenn sie auf demselben Streifen sind, aus einander zu finden, bedarf es zwar wieder der Addition oder Subtraction, doch geht in eben diesem Falle die Vergleichung der Felder, wegen der Beschränkung auf einen kleinen Raum, leicht und bequem von Statten; auch kann man ihr dadurch eine gröfsere Sicherheit geben, dafs man in den Argumenten (m) und $(m)+x^3$ mit denselben Differenzen fortschreitet und von Zeit zu Zeit durch Addition von x^3 eine Prüfung vornimmt.

Wenn die Streifen gehörig neben einander liegen, so werden für jede ihrer beiden Lagen die zweien Argumenten A_i und A_i-x^3 zugehörigen Felder in derselben Horizontallinie, aber in der Regel jedes auf seinem Streifen, in verschiedenen *Verticallinien* liegen. Diese Verticallinien behalten jedoch für jede der beiden Lagen immer denselben Abstand, so dafs ein rascher Überblick genügen wird, alle Felder zu ermitteln, welche zweien Argumenten A_i-x^3 und A_i zugehören, von denen gleichzeitig das erstere die Cubenanzahl m enthält und das letztere leer ist, in welches dann die Cubenanzahl $m+1$ eingetragen wird. Man wird hiebei entweder zuerst die mit m ausgefüllten Felder in $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$ ins Auge fassen und zu ihnen die entsprechenden leeren in S_i suchen, oder umgekehrt, zu den leeren Feldern in S_i die entsprechenden, mit m ausgefüllten Felder in $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$ suchen, je nachdem die Anzahl der mit m ausgefüllten Felder in $S_{i-\alpha}$ und $S_{i-\alpha-1}$, oder die Anzahl der leeren Felder in S_i geringer ist; was der Wahl entspricht, die man zwischen den beiden Operationen des Addirens und Subtrahirens treffen kann.

Es wird wieder hinreichen, von denjenigen Argumenten A_i-x^3, welche $\geqq mx^3$, oder den Argumenten A_i, welche $\geqq (m+1)x^3$ sind, anzufangen. Trägt man in jedes Feld neben die kleinste Cubenanzahl auch die Wurzel des kleinsten Cubus ein, der in den verschiednen Zerfällungen des Arguments in diese kleinste Cubenanzahl vorkommt, welches immer der nämliche Cubus ist, auf welchen sich die Operation bezieht, durch welche die Cubenanzahl selbst

gefunden worden ist, so kann man auf den Streifen S_{i-a-1} und S_{i-a} alle Felder übergehen, in denen neben die Cubenanzahl m eine kleinere Zahl als x eingetragen ist.

Anwendung der Tafel auf die Aufgabe, die sämmtlichen Zerlegungen einer gegebnen Zahl in die kleinste Anzahl ganzer positiver Cuben zu finden.

Obgleich die unten gegebne Tafel nur die kleinste Cubenanzahl anzeigt, in welche eine gegebne Zahl zerlegt werden kann, so kann sie doch auch mit Vortheil dazu angewandt werden, diese Zerfällungen selbst aufzufinden.

Will man, *ohne irgend ein Hülfsmittel zu besitzen,* die sämmtlichen Zerfällungen einer Zahl in irgend eine gegebne Anzahl von Cuben aufsuchen, so kann man dies in der Regel sehr mühsame Geschäft folgendermafsen auf eine passende Art anordnen, die auch bei allen ähnlichen Aufgaben angewandt werden kann.

Es sei N die gegebne Zahl, n die Anzahl der Cuben, in welche sie zerfällt werden soll. Man bilde n Verticalcolumnen mit den Überschriften

$$n,\; n-1,\; n-2,\; \ldots\; 1,$$

in deren erste die gegebne Zahl N selbst zu setzen ist. Von den in diese Columnen zu schreibenden Zahlen wird man nach und nach die verschiednen Cuben abziehen, jeden n Mal wiederholt, indem man von den kleinsten anfängt, und erst dann, wenn alle mit denselben auszuführenden Subtractionen beendigt sind, zu den nächst gröfseren übergeht. Die Wurzel des abgezognen Cubus wird jedesmal am Rande bemerkt, und der erhaltne Rest jeder in einer der Columnen befindlichen Zahl in die nächst folgende Columne gerückt, mit Ausnahme der in der letzten Columne 1 befindlichen Zahlen, von denen nichts mehr abgezogen wird. Jeder *von den früheren verschiedne* Cubus wird von *sämmtlichen,* aufser den in der letzten Columne befindlichen Zahlen abgezogen. Wenn man dagegen *denselben* Cubus wiederholt abzieht, so thut man dies nur von denjenigen Zahlen, *welche zuletzt durch das Abziehen des nämlichen Cubus erhalten worden sind.* Wenn x^3 der abzuziehende Cubus ist, so kann man respective in jeder, mit i überschriebnen Columne, alle Zahlen verwerfen, welche $< ix^3$ sind, so dafs in Bezug auf diese Zahlen nicht weiter operirt wird. Hat man durch fortgesetztes Abziehen gleicher oder gröfserer Cuben und durch gleichzeitiges Fortrücken in die nächstfolgende Columne alles in die letzte Columne gebracht, so dafs die Operation nicht weiter fortgesetzt werden kann, so hat man so viel *von einander verschiedne* Zerfällungen, als sich in der letzten Columne Cubikzahlen vorfinden,

und man erhält aus diesen Cubikzahlen leicht rückwärts durch successives Addiren der Cuben der respective am Rande angemerkten Zahlen die Zerfällungen selber. Man addirt nämlich zu einer in der letzten Columne befindlichen Cubikzahl den Cubus, durch dessen Abziehen dieselbe erhalten und dessen Wurzel neben ihr am Rande bemerkt worden ist; zu der Summe addirt man wieder denjenigen Cubus, dessen Wurzel neben ihr am Rande bemerkt ist, u. s. f. Befindet sich am Ende der Operation in der letzten Columne gar keine Cubikzahl, so ist es nicht möglich, die Zahl in die verlangte Cubenanzahl zu zerlegen.

Will man die *kleinste* Cubenanzahl, in welche eine gegebne Zahl zerlegt werden kann, und auch die sämmtlichen Zerfällungen in diese kleinste Cubenanzahl finden, so hat man aufzumerken, wann zuerst bei den angestellten Subtractionen eine Cubikzahl sich ergiebt, und die Columne, in der sich dieselbe befindet, als die letzte anzusehen, bis sich ein Cubus in einer früheren Columne zeigt, welche man dann wieder so lange als die letzte ansieht, bis sich etwa ein Cubus in einer noch früheren Colume zeigt, u. s. f. In jeder $i$ten Columne, von der jedesmal als letzten betrachteten, kann man vor dem Abziehen eines Cubus x^3 alle Zahlen verwerfen, welche $< ix^3$ sind. Ist auf diese Art und durch fortgesetztes Rücken der Zahlen in die folgende Columne alles in *eine* Columne gebracht, so wird diese schliefslich als die letzte anzusehen sein, und es werden in keiner früheren Cubikzahlen gefunden werden können. Die Anzahl der Columnen bis zu dieser letzten ist die kleinste Cubenanzahl, in welche man die gegebne Zahl zerfällen kann, und jede Cubikzahl, welche man in dieser letzten Columne antrifft, giebt eine besondere Zerfällung in diese kleinste Cubenanzahl, welche man wiederum durch die umgekehrte Operation des successiven Addirens der Cuben der respective am Rande bemerkten Zahlen erhält.

Hat man eine Tafel, wie die unten mitgetheilte, welche für jede Zahl die kleinste Cubenanzahl, aus der sie zusammengesetzt werden kann, anzeigt, so kann man die im Vorigen angegebnen Operationen abkürzen. Wenn man nämlich bei der gegebnen Zahl N in der Tafel die Cubenanzahl n findet, so weifs man zuvörderst, dafs die $n$te Columne die mit 1 zu bezeichnende letzte ist. *Man kann ferner nach jeder Subtraction, aus jeder mit i bezeichneten Columne alle Zahlen fortlassen, welche nicht die Summe von i Cuben sein können, oder bei welchen nicht in der Tafel die Cubenanzahl i eingetragen ist.*

Vor dem Beginnen der Operationen wird man gut thun, für jeden Cubus x^3, der $< N$, zu untersuchen, ob in der Tafel bei $N - x^3$, $N - 2x^3$, etc.

respective die Cubenanzahl $n-1$, $n-2$, etc. steht, bis man auf einen Rest $N-kx^3$ kommt, bei welchem sich in der Tafel eine gröfsere Cubenanzahl als $n-k$ eingetragen findet. Man weifs dann im Voraus, dafs die Subtraction dieses Cubus x^3 nur $k-1$ Mal zu wiederholen ist. Wenn schon bei $N-x^3$ sich die Cubenanzahl $n-1$ nicht eingetragen findet, so ist dies ein Zeichen, dafs der Cubus x^3 überhaupt unter den abzuziehenden Cuben fortgelassen werden kann. Es sei $k-1=r_x$, so dafs x^3 nur r_x Mal hintereinander abzuziehen ist, so erhält man die Reihenfolge der nach und nach abzuziehenden Cuben, wenn man r_1 Mal hintereinander 1, r_2 Mal den Cubus von 2, r_3 Mal den Cubus von 3 u. s. f. schreibt. Hat man einen Cubus dieser Reihe abzuziehen, und addirt zu diesem die $i-1$ folgenden Cuben derselben Reihe, so wird die Summe dieser i Cuben der kleinste Werth, den man von den in der Columne i enthaltnen Zahlen im Verlauf aller noch übrigen Operationen abzuziehen hat, und man kann daher vor der anzustellenden Subtraction und bei allen ferneren Operationen aus der Columne alle Zahlen, die kleiner als diese Summe sind, fortlassen. Alle übrigen Vorschriften bleiben ganz dieselben, wie die oben gegebnen.

Das im Vorigen angegebne Verfahren, um alle Zerfällungen einer Zahl in die kleinste Cubenanzahl zu finden, mit Benutzung derjenigen Erleichterungen und Abkürzungen der Rechnung, welche die Tafel gestattet, will ich durch das Beispiel der Zahl

$$5818$$

erläutern, zu deren Zusammensetzung man, zufolge der Tafel, 7 Cuben nöthig hat. In dem hier unten folgenden Schema, in welchem die 7 Columnen mit

VII, VI, V, IV, III, II, I

bezeichnet sind, ist die ganze Rechnung enthalten, welche zur Auffindung der sämmtlichen Zerfällungen dieser Zahl in 7 Cuben erfordert wird. Nach der oben gegebnen Vorschrift erhält man die folgende Reihe der nach und nach abzuziehenden Cuben

$$1,\ 1,\ 1,\ 2^3,\ 2^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 3^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 4^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 5^3,\ 5^3,$$
$$6^3,\ 7^3,\ 7^3,\ 9^3,\ 10^3,\ 11^3,\ 12^3,\ 13^3,\ 13^3,\ 14^3,\ 14^3,\ 15^3,\ 16^3,\ 17^3.$$

Wenn man von den Cuben,

$$9^3,\ 10^3,\ 11^3,\ 12^3,\ 13^3,\ 13^3,\ 14^3,$$

die 5 oder 6 ersten oder alle 7 summirt, so werden die Summen,

$$6985,\ 9182,\ 11962,$$

und daher gröfser als die respective in den Columnen V, VI, VII enthaltnen Zahlen, weshalb man der oben gegebnen Regel zufolge bei der Subtraction

des Cubus 9^3 und bei allen folgenden Operationen diese drei Columnen nicht weiter zu berücksichtigen hat. Da ferner

$$10^3+11^3+12^3+13^3 = 6256$$

gröfser als alle in IV enthaltnen Zahlen ist, so braucht man beim Abziehen des Cubus 10^3 und den folgenden Operationen die Columne IV nicht mehr zu berücksichtigen. Da

$$11^3+12^3+13^3 = 5256$$

ist, so braucht man 11^3 nur von denjenigen Zahlen der Columne III abzuziehen, welche $\geqq 5256$ sind, und man wird bei allen folgenden Operationen die Columne III gar nicht mehr zu berücksichtigen brauchen, da

$$12^3+13^3+13^3 = 6122$$

gröfser als alle in III enthaltne Zahlen ist. Man sieht aus dem unten folgenden Schema, dafs wenn man bei dem Abziehen des Cubus 10^3 angelangt ist, die Operation von da an reifsend schnell zu Ende geht.

Die 13 Cubikzahlen, die man in I antrifft, geben die 13 verschiednen Zerlegungen von 5818 in 7 Cuben; die überhaupt möglich sind; und zwar auf folgende Art. Man findet zuerst in I zwei Mal den Cubus $4913 = 17^3$, und man ersieht aus den am Rande beigefügten Zahlen, dafs die Operation, durch welche man schliefslich zu demselben gelangt ist, beide Mal in dem *zweimaligen* Abziehen von 7^3 besteht. Man wird daher die Summe $4913+686 = 5599$ bilden, welche Zahl sich in III an zwei verschiednen Orten findet. Die in III befindliche Zahl 5599 ist, wie man aus den Zahlen am Rande ersieht, zuletzt durch *dreimaliges* Abziehen von 4^3 erhalten worden. Man wird daher die Summe $5599+192 = 5791$ bilden, welche Zahl in VI befindlich und durch *einmaliges* Abziehen von 3^3 erhalten worden ist. Die Summe, die nun zu bilden ist, $5791+27$, ist die vorgelegte Zahl 5818 selbst, von der man auf diese Weise eine Zerfällung in 7 Cuben,

$$17^3+2.7^3+3.4^3+3^3 = 5818$$

erhält. Die aufserdem noch ein Mal in III enthaltne Zahl 5599 ist zuletzt durch *einmaliges* Abziehen von 6^3, die Zahl $5599+216 = 5815$ in IV durch *dreimaliges* Abziehen von 1 erhalten worden. Man hat daher eine zweite Zerfällung,

$$17^3+2.7^3+6^3+3.1^3 = 5818.$$

Auf ähnliche Art erhält man aus den übrigen in I enthaltnen Cubikzahlen, indem man den zu ihnen führenden Weg, welcher durch die am Rande befindlichen Zahlen bezeichnet ist, zurückgeht, die andern unten angegebnen Zerfällungen.

Rechnungsschema für die Aufsuchung der sämmtlichen Zerfällungen der Zahl 5818 in 7 Cuben.

	VII	VI	V	IV	III	II	I
0	5818						
1		5817					
1			5816				
1				5815			
2		5810	5809				
2			5802				
2				5794			
3		5791	5790	5789	5788		
			5783	5782	5767		
				5775			
3			5764				
3				5737			
4		5754	5753	5752	5725		
			5746	5738			
			5727	5726			
				5700			
4			5690	5663	5636		
4					5599	5572	
5		5693	5685	5677	5669	5642	
			5666	5658	5650		
			5629	5621	5613		
5			5568	5560	5552	5488	
				5541	5496		
				5504			
5				5443	5435	5427	
6		5602	5601	5600	5599	5572	
			5575	5574	5573		
			5538	5511			
7		5475	5474	5473	5472	5256	
			5467	5466	5446	5256	
			5448	5447	5439		
			5411	5440	5394		
			5259	5421	5320		
				5384	5257		
				5347	5168		
				5258			
				5232			
				5195			
7			5132	5131	5130	5129	4913
				5124	5123	5103	4913
				5105	5104	5096	
				5068	5097	4977	
				4916	5041	4914	
					5004	4825	
					4915		
					4889		
					4852		
	11962	9182	6985				

	III	II	I
9	5065	5038	4913
	5046	4940	4096
	4948	4921	
	4929	4706	
	4831	4439	
	4714		
	4782		
	4744		
	4737		
	4718		
	4655		
	4503		
	4466		
	4402		
	4395		
	4376		
	4339		
	4187		
6256			
10		4472	4096
		4439	
		4394	
		4123	
		4104	
		4097	
		3744	
		3718	
		3402	
		3376	
	5256		
11		4394	4096
		4221	3375
		4104	
	6122		
12			3375
			2744
		4394	
13			3375
			2197
			2197
		5488	2744
14			2744

5818

=4913+ 686+ 216+ 3

=4913+ 686+ 192+ 27

=4913+ 729+ 125+ 27+24

=4096+ 729+ 686+216+64+27

=4096+1000+ 686+ 27+ 8+ 1

=4096+1331+ 375+ 16

=3375+1331+ 729+375+ 8

=3375+1728+ 686+ 27+ 2

=2744+1728+1000+343+ 3

=3375+2197+ 192+ 54

=4394+1331+ 64+ 27+ 2

=4394+1000+ 343+ 81

=5488+ 250+ 64+ 16

oder

$= 17^3+2.7^3+6^3+3.1^3$

$= 17^3+2.7^3+3.4^3+3^3$

$= 17^3+9^3+5^3+3^3+3.2^3$

$= 16^3+9^3+2.7^3+6^3+4^3+3^3$

$= 16^3+10^3+2.7^3+3^3+2^3+1^3$

$= 16^3+11^3+3.5^3+2.2^3$

$= 15^3+11^3+9^3+3.5^3+2^3$

$= 15^3+12^3+2.7^3+3^3+2.1^3$

$= 14^3+12^3+10^3+7^3+3.1^3$

$= 15^3+13^3+3.4^3+2.3^3$

$=2.13^3+11^3+4^3+3^3+2.1^3$

$=2.13^3+10^3+7^3+3.3^3$

$=2.14^3+2.5^3+4^3+2.2^3$

Kennt man auf irgend eine Art die sämmtlichen Zerlegungen einer Zahl N in ihre kleinste Cubenanzahl n, so hat man damit zugleich auch die sämmtlichen Zerlegungen mehrerer anderer Zahlen in ihre kleinste Cubenanzahl. Sind nämlich die Cuben der gleichen oder verschiedenen Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_i$ in p verschiedenen Zerlegungen von N enthalten, so werden durch das Fortlassen dieser i Cuben aus diesen p Zerlegungen von N unmittelbar auch p verschiedene Zerlegungen der Zahl

$$N - a_1^3 - a_2^3 - \cdots - a_i^3 = N_0$$

in eine Anzahl von $n-i$ Cuben gegeben, welche die kleinste Cubenanzahl ist, in welche man diese Zahl zerlegen kann, und die so gefundenen p Zerlegungen sind alle Zerlegungen von N_0 in $n-i$ Cuben, welche es giebt, und alle von einander verschieden.

Durch das im Vorhergehenden berechnete Beispiel erhält man aus den 13 Zerlegungen von 5818 in 7 Cuben zugleich die sämmtlichen Zerlegungen einer sehr grofsen Menge von Zahlen in ihre kleinste Cubenanzahl. Man ersieht die grofse Anzahl dieser Zahlen schon daraus, dafs darunter alle in dem obigen Schema vorkommenden Zahlen nebst ihren Ergänzungen zu 5818 enthalten sein müssen. So ergiebt sich, dafs die Zahlen

$5818-1,\ -2^3,\ -4^3$ . . . . auf 5 Arten,
$5818-3^3$ . . . . auf 8 Arten,
$5818-5^3$ . . . . auf 4 Arten,
$5818-6^3,\ -12^3,\ -14^3$ . . . . auf 2 Arten,
$5818-7^3$ . . . . auf 7 Arten,
$5818-9^3,\ -10^3,\ -11^3,\ -13^3,\ -15^3,\ -16^3,\ -17^3$ auf 3 Arten

in 6 Cuben zerlegt werden können. Man sieht ferner, dafs folgende 47 Zahlen, welche die Summe von *fünf* und nicht weniger Cuben sind,

$5818-1-2^3,\ -1-4^3,\ -1-6^3,\ -1-11^3,\ -1-13^3,\ -1-14^3,$
$-1-15^3,\ -1-16^3,\ -1-17^3,$
$5818-2^3-4^3,\ -2^3-7^3,\ -2^3-10^3,\ -2^3-14^3,\ -2^3-17^3,$
$5818-3^3-5^3,\ -3^3-9^3,\ -3^3-11^3,$
$5818-4^3-5^3,\ -4^3-6^3,\ -4^3-7^3,\ -4^3-9^3,\ -4^3-11^3,\ -4^3-14^3,$
$-4^3-15^3,\ -4^3-16^3,\ -4^3-17^3,$
$5818-5^2-14^3,\ -5^3-15^3,\ -5^3-16^3,\ -5^3-17^3,$

$5818 - 6^3 - 16^3, \; - 6^3 - 17^3,$
$5818 - 7^3 - 9^3, \; - 7^3 - 13^3, \; - 7^3 - 14^3, \; - 7^3 - 15^3,$
$5818 - 9^3 - 11^3, \; - 9^3 - 15^3, \; - 9^3 - 16^3, \; - 9^3 - 17^3,$
$5818 - 11^3 - 13^3, \; - 11^3 - 15^3, \; - 11^3 - 16^3,$
$5818 - 12^3 - 14^3, \; - 12^3 - 15^3,$
$5818 - 13^3 - 15^3,$
$5818 - 14^3 - 14^3,$

oder wenn man sie der Gröfse nach ordnet, die Zahlen,

176 246 330 391 689 715 780 841 897 904 993 1112 1346 1506
1597 1658 1714 1721 2100 2290 2318 2379 2442 2731 2949 3010
3066 3073 3278 3620 3758 4423 4460 4486 4746 4810 5025 5062
5411 5467 5538 5601 5629 5666 5746 5753 5809

nur *auf eine einzige Art* in fünf Cuben zerlegt werden können.

Dies folgt daraus, dafs wenn a^3 und b^3 die beiden Cuben sind, welche man von 5818 abzuziehen hat, um eine dieser 47 Zahlen zu erhalten, unter sämmtlichen Zerfällungen von 5818 immer nur eine einzige die beiden Cuben a^3 und b^3 zugleich enthält.

Über die Einrichtung einer Tafel, mit deren Hülfe ohne alle Versuche die sämmtlichen Zerlegungen einer gegebenen Zahl in die kleinste Cubenanzahl gefunden werden können.

Man hat aus dem im Vorhergehenden berechneten Beispiel gesehen, dafs ungeachtet des Gebrauchs, welchen man von der unten gegebenen Tafel machen kann, um das Aufsuchen aller Zerlegungen einer gegebenen Zahl in die kleinste Cubenanzahl zu erleichtern, dies doch noch ein mühsames Geschäft bleibt. Es wäre daher wünschenswerth, diese Tafel, ohne ihren Umfang zu sehr zu vergröfsern, so zu vervollständigen, dafs das Geschäft auf das möglich kleinste Maafs der Arbeit zurückgeführt wird. Um eine solche vollständige Hülfstafel zu erhalten, in welcher alle Elemente beisammen sind, deren man bedarf, um die Zerfällungen selbst ohne Versuche und überflüssige Subtractionen zu finden, ist erforderlich und wird es hinreichen, *bei jedem Argumente zu der kleinsten Cubenanzahl noch die Wurzeln aller Cuben hinzuzufügen, welche in den verschiedenen Zerlegungen des Arguments in die kleinste Cubenanzahl*

respective die kleinsten sind; z. B. bei dem Argumente 5818 zur Cubenanzahl 7, wie die gefundenen Zerfällungen zeigen, die Zahlen 1, 2, 3. Wenn man eine solche Hülfstafel anwendet, reducirt sich die ganze zur Auffindung aller Zerfällungen nöthige Rechnung genau auf dieselbe Rechnung, welche die Prüfung der bereits bekannten Zerfällungen erfordern würde, wenn man dieselbe so anstellt, dafs man von der gegebenen Zahl nach und nach die verschiedenen Cuben abzieht, wie sie in den einzelnen Zerfällungen der Gröfse nach auf einander folgen.

Es sei eine der Zerfällungen einer Zahl N in die kleinste Cubenanzahl,

$$N = a^3 + b^3 + \cdots + w^3 + x^3 + \cdots + z^3,$$

wo

$$a \leqq b \;.\;.\; \leqq w \leqq x \;.\;.\; \leqq z.$$

Hat man von N nach und nach bereits die Cuben $a, b, \ldots w$ abgezogen, und ist dadurch auf den Rest

$$R = N - a^3 - b^3 - \cdots - w^3$$

gekommen, so ist der zunächst abzuziehende Cubus x^3 der kleinste in einer der Zerfällungen von R in die kleinste Cubenanzahl, und zugleich $\geqq w^3$. Um daher den Werth oder die Werthe von x zu erhalten, — denn es wird x häufig mehrere Werthe haben, — entnehme man aus der Hülfstafel alle bei dem Argumente R zur kleinsten Cubenanzahl hinzugefügten Zahlen, welche $\geqq w$ sind. Auf diese Weise giebt die Hülfstafel nach und nach die Wurzeln der einzelnen Cuben, in der Ordnung, wie sie in den verschiedenen Zerfällungen der Gröfse nach auf einander folgen.

Um den Gebrauch der Tafel zu erläutern, will ich das folgende Fragment derselben hersetzen, welches bei den Zerfällungen von 5818 in 7 Cuben zur Anwendung kommt, und leicht rückwärts aus diesen Zerfällungen abgeleitet werden konnte. Die Zahlen n geben die kleinste Cubenanzahl, in welche die Zahlen R zerfällt werden können, und die Zahlen r die Wurzeln der Cuben, welche in den verschiedenen Zerfällungen von R in n Cuben die kleinsten sind.

R	*n*	*r*	*R*	*n*	*r*	*R*	*n*	*r*	*R*	*n*	*r*
4394	2	13	5439	3	7	5642	2	9	5782	4	7
4472	2	12	5446	3	7	5663	4	3.4	5789	4	4.7
4706	2	11	5472	3	6.10	5677	4	4.5	5791	6	1.2.3.4
4825	2	9	5488	2	14	5685	5	2.5	5794	4	3
5096	2	10	5511	4	7	5700	4	4	5802	5	2.4.5
5103	2	12	5552	3	4.5	5725	3	11	5809	5	3
5168	3	7	5560	4	2.5	5727	5	1.3.4.6	5810	6	1.2.5
5256	2	7	5572	2	13	5737	4	7	5815	4	6.7
5394	3	10	5599	3	7	5738	4	5	5816	5	1.3
5427	2	11	5613	3	5	5764	5	3.4	5817	6	1.2
5435	3	9	5636	3	4	5767	3	5	5818	7	1.2.3

Die Rechnung, welche mit Benutzung dieser Tafel zur Auffindung der Zerfällungen von 5818 in 7 Cuben zu machen ist, läfst sich nach dem unten folgenden Schema anordnen. Es sind in demselben:

Die vor dem ersten Verticalstrich befindlichen Zahlen *s* die Wurzeln der nach und nach von 5818 abgezogenen Cuben;

Die zwischen den beiden Verticalstrichen enthaltenen Zahlen *R* die nach diesen Subtractionen übrig bleibenden Reste;

Die hinter dem zweiten Verticalstrich stehenden Zahlen alle aus der Tafel entnommen zum Argumente *R* gehörigen Werthe von *r*, welche nicht kleiner als die gröfste (erste) der daneben stehenden Zahlen *s* sind.

Das Schema besteht aus 6 Gruppen, welche sich durch die Anzahl der vor dem ersten Verticalstrich stehenden Zahlen *s* unterscheiden. Die Zahlen *R* jeder Gruppe werden aus den Zahlen *R* der unmittelbar vorhergehenden Gruppe durch das Abziehen der Cuben der neben den letztern stehenden Zahlen *r* gefunden. Es wird daher die Anzahl der Horizontalreihen jeder Gruppe der Anzahl aller zu der vorhergehenden Gruppe gehörenden Zahlen *r* gleich. So findet man z. B. die Zahlen *R* der 3ten Gruppe, wenn man 1 von 5816, 2^3 von 5802, 3^3 von 5816 und 5764, 4^3 von 5802, 5764 und 5727, 5^3 von 5802, 6^3 von 5727 abzieht. Die Zahlen *R* der letzten Gruppe

sind die Summe zweier Cuben; hinter dem zweiten Verticalstrich hat man zu der aus der Hülfstafel entnommenen Wurzel des kleinsten dieser beiden Cuben noch die Wurzel des andern Cubus hinzugefügt, so dafs die verschiednen Horizontalreihen der letzten Gruppen die Wurzeln der in den verschiednen Zerfällungen von 5818 enthaltnen 7 Cuben geben, von denen die 5 kleinsten vor dem ersten und die beiden gröfsten hinter dem zweiten Verticalstrich stehen.

s	*R*	*r*	*s*	*R*	*r*	*s*	*R*	*r*	*s*	*R*	*r*
	5818	1.2.3	1.1.1	5815	6.7	3.2.2.2	5767	5	4.4.4.3.3	5572	13 15
			2.2.2	5794	3	4.3.1.1	5725	11	5.3.2.2.2	5642	9 17
1	5817	1.2	3.1.1	5789	4.7	4.4.3.3	5636	4	5.5.4.2.2	5488	14 14
2	5810	2.5	3.2.1	5782	7	4.4.4.3	5599	7	5.5.5.2.2	5427	11 16
3	5791	3.4	3.3.3	5737	7	5.4.2.2	5613	5	7.4.4.4.3	5256	7 17
			4.2.2	5738	5	5.5.2.2	5552	5	7.6.1.1.1	5256	7 17
1.1	5816	1.3	4.3.3	5700	4	5.5.5.2	5435	9	7.7.3.1.1	5103	12 15
2.1	5809	3	4.4.3	5663	4	6.1.1.1	5599	7	7.7.3.2.1	5096	10 16
2.2	5802	2.4.5	5.2.2	5677	5	7.1.1.1	5472	10	7.7.6.4.3	4825	9 16
3.3	5764	3.4	5.5.2	5560	5	7.3.1.1	5446	7	9.5.5.5.2	4706	11 15
4.3	5727	4.6	6.4.3	5511	7	7.3.2.1	5439	7	10.7.1.1.1	4472	12 14
5.2	5685	5				7.3.3.3	5394	10	10.7.3.3.3	4394	13 13
						7.6.4.3	5168	7	11.4.3.1.1	4394	13 13

Die Hülfstafel kann auf ganz ähnliche Art wie diejenige construirt werden, welche blofs die kleinste Cubenanzahl, in welche man eine gegebene Zahl zerfällen kann, angiebt. Man nehme wieder an, die Construction der Hülfstafel sei für alle Zahlen

$$(1),\ (2),\ \ldots\ (m)$$

beendigt, so dafs, wenn i eine der Zahlen 1, 2, .. m und I eine der Zahlen (i) ist, bei jeder Zahl I aufser der kleinsten Cubenanzahl i noch die Wurzeln aller derjenigen Cuben angegeben sind, welche in den verschiednen Zerlegungen von I in i Cuben respective die kleinsten sind. Es sollen durch Addition einer Cubikzahl zu den Zahlen (m) die Argumente, bei welchen die kleinste Cubenanzahl $m+1$ einzutragen ist, und die Zahlen, welche neben dieselbe

einzutragen sind, gefunden werden. Ist x^3 der zu addirende Cubus, so addirt man x^3 nur dann zu einem Argumente (m), wenn x kleiner oder nicht gröfser als die gröfste der bei diesem Argumente neben m eingetragnen Zahlen ist. Ist dies der Fall, und findet man bei dem Argumente $(m)+x^3$ ein leeres Feld, so trägt man darin die Cubenanzahl $m+1$ und neben diese die Wurzel x ein, oder wenn sich in das Feld schon die Cubenanzahl $m+1$ und eine oder mehrere andere Zahlen eingetragen finden, so fügt man letzteren noch die Wurzel x hinzu. Es geschieht hiebei von selbst, dafs die Addition von x^3 zu den Zahlen (m) nur von solchen Zahlen (m) an begonnen wird, welche $\geqq mx^3$ sind.

Man kann auf diese Weise fortfahren, bis die Construction der Hülfstafel beendigt ist; doch wird man wieder gut thun, wenn m den Werth 5 oder 6 erreicht hat, und daher nur noch wenige Felder auszufüllen bleiben, das umgekehrte Verfahren zu befolgen. Ist nämlich N ein Argument, bei welchem sich ein noch leeres Feld findet, so trägt man in dasselbe immer die kleinste Cubenanzahl $m+1$ und die Wurzel x ein, wenn bei dem Argumente $N-x^3$ die kleinste Cubenanzahl m gefunden wird. Wenn das Feld bei dem Argumente N bereits mit der kleinsten Cubenanzahl $m+1$ und einer oder mehreren andern Zahlen erfüllt ist, so fügt man letztern die Zahl x hinzu, wenn x kleiner oder nicht gröfser als die gröfsten der bei $N-x^3$ neben m eingetragnen Zahlen ist. — Die Additionen und Subtractionen kann man wieder, wie oben, zum bei weitem gröfsten Theil durch ein blofses Aneinanderfügen der einzelnen Theile der Tafel ersetzen.

Wenn man nicht blofs die Zerfällungen in die *kleinste* Anzahl von Cuben, sondern überhaupt die Zerfällungen in eine *gegebne* Anzahl von Cuben haben will, so kann man auch hiefür ganz ähnliche Hülfstafeln construiren, von denen jede sich auf die besondre gegebne Cubenanzahl bezieht, und in ihren Feldern alle Zahlen enthält, welche in den verschiednen Zerfällungen des Arguments in die *gegebne* Cubenanzahl respective die Wurzeln der kleinsten Cuben sind. Hat man die Hülfstafel $[m]$ für die Zerlegungen in m Cuben construirt, so erhält man daraus die Hülfstafel $[m+1]$ für die Zerlegungen in $m+1$ Cuben ganz in der früheren Art, wenn man die verschiednen Cuben x^3 zu allen Argumenten M der Tafel $[m]$, welche $\geqq mx^3$ sind, addirt, und jedesmal, wenn x nicht gröfser als die gröfste der bei M in $[m]$ eingetragnen Zahlen ist, bei dem Argumente $M+x^3$ in $[m+1]$ die

Zahl x einträgt. Die frühere Construction unterscheidet sich von dieser nur dadurch, dafs in derselben auch noch alle Argumente $M+x^3$, bei welchen eine kleinere Cubenanzahl als $m+1$ eingetragen war, oder welche auch die Summe von weniger als $m+1$ Cuben sein konnten, übergangen wurden, was jetzt nicht der Fall ist. Bei der Construction der Hülfstafeln aus einander wird es rathsam sein, wenn man dieselben (wenigstens von der Tafel [4] an) alle Argumente umfassen läfst, indem man die Felder leer läfst, welche Argumenten zugehören, die nicht in die gegebne Cubenanzahl zerfällt werden können. Man kann dann durch ein blofses Nebeneinanderlegen der verschiednen Theile je zweier Hülfstafeln $[m]$ und $[m+1]$ in der oben angegebnen Art alle Additionen ersetzen.

Tafel für die kleinste Anzahl von Cuben, aus welchen die Zahlen bis 12000 zusammengesetzt werden können.

(Die am Rande befindlichen Zahlen sind die *Einer* von 1 bis 100; die Zahlen in der obersten Horizontalreihe sind die 10 Hunderte; in der Ecke oben links befinden sich die Tausende.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	4	6	5	1	2	5	5	5	5	5	4	3	3	6	51	3	5	4	3	6	6	6	5	3	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	6	6	6	5	7	4	2	3	6	6	6	5	5	5	4	4	4	52	4	3	5	4	7	5	6	4	4	3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	7	4	4	3	3	3	4	5	5	5	3	5	4	5	5	5	53	5	4	4	5	7	6	5	3	2	4
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	4	[illegible]	8	6	5	5	2	4	4	5	4	5	4	4	4	5	5	6	6	54	3	4	5	6	7	6	6	4	3	4
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	3	5	6	6	4	5	3	2	5	5	5	4	4	3	4	5	5	6	5	5	55	4	4	6	4	6	3	5	2	3	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	56	4	4	4	7	5	5	4	2	3	5	6	4	5	4	4	5	5	6	4	6	5	56	4	5	5	5	2	4	5	3	3	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	57	5	5	5	4	6	3	4	3	3	6	7	4	4	5	4	3	6	6	5	4	3	57	5	4	4	5	3	4	5	4	4	7
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	58	6	6	3	5	6	4	5	4	4	7	8	2	5	5	5	4	6	4	4	4	4	58	6	5	4	2	2	5	5	4	5	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	59	5	7	4	3	3	2	6	5	5	6	9	3	6	6	5	5	6	5	4	4	5	59	4	6	5	3	3	3	6	5	4	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	60	6	3	5	4	4	3	5	6	6	5	10	4	6	7	6	6	4	4	4	5	5	60	5	4	5	4	4	4	6	5	5	4
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	4	4	3	5	61	7	4	4	5	4	4	5	5	4	4	11	5	6	6	6	4	5	3	5	4	6	61	5	3	4	5	5	5	4	4	3	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	7	1	5	4	4	6	62	3	5	5	6	5	5	6	3	3	5	12	5	5	6	5	4	2	4	5	5	7	62	4	4	4	6	6	6	5	4	4	5
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	2	4	3	5	7	63	4	4	6	7	6	5	6	4	3	5	13	6	5	4	4	4	3	5	4	6	6	63	5	4	5	5	6	4	6	3	4	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	5	3	5	4	4	5	64	1	5	5	8	6	5	3	3	4	5	14	5	6	5	4	4	4	6	5	5	6	64	2	5	5	6	3	5	4	4	4	6
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	3	4	6	5	5	6	65	2	6	6	5	7	4	4	4	4	6	15	5	4	5	4	3	5	6	5	5	4	65	3	5	5	4	4	5	5	4	4	7
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	5	4	5	7	5	5	5	66	3	7	4	6	3	3	5	5	5	4	16	3	5	2	5	4	6	5	5	5	5	66	4	6	5	3	3	4	5	5	5	5
17	8	6	2	4	5	6	6	5	5	4	67	4	8	5	4	4	3	4	5	6	5	17	4	6	3	5	5	6	5	5	4	3	67	5	6	4	3	4	4	5	6	5	6
18	4	3	3	5	6	7	5	4	5	3	68	5	4	6	3	2	4	5	5	6	6	18	5	4	4	6	6	5	5	5	5	4	68	6	5	3	4	3	5	6	6	6	3
19	5	4	4	6	7	6	5	5	4	3	69	6	5	5	4	3	5	6	6	5	5	19	6	5	5	6	5	5	4	6	3	4	69	4	4	4	4	4	6	5	5	4	4
20	6	5	5	5	8	2	4	5	3	4	70	4	6	3	2	4	6	7	4	4	6	20	6	5	6	5	5	3	5	5	4	4	70	3	5	4	3	5	6	6	5	3	3
21	7	6	6	6	5	3	4	4	4	4	71	5	5	4	3	3	6	7	5	4	4	21	7	6	5	5	5	4	5	5	5	5	71	3	5	5	4	4	5	7	4	4	3
22	8	7	6	4	5	4	5	5	5	5	72	2	5	5	4	4	6	4	4	5	3	22	6	7	5	4	3	3	6	6	5	5	72	2	6	5	4	4	6	3	5	5	4
23	9	6	7	5	4	4	3	6	6	6	73	3	6	6	5	5	5	5	4	5	4	23	6	5	5	4	4	4	4	6	6	5	73	3	6	6	5	5	6	4	5	5	5
24	3	6	2	5	4	5	4	6	6	6	74	4	7	5	6	4	4	6	5	5	5	24	2	5	3	5	5	5	5	6	5	4	74	4	7	4	4	4	3	2	5	6	5
25	4	1	3	5	5	5	5	6	6	5	75	5	8	6	3	5	4	4	3	4	6	25	3	2	4	5	6	6	6	5	5	4	75	5	7	5	4	5	4	3	4	5	6
26	5	2	4	6	6	6	6	5	4	4	76	6	5	7	4	3	2	5	4	5	7	26	4	3	5	5	6	6	6	5	4	4	76	6	4	4	5	4	3	4	5	6	4
27	1	3	5	7	7	5	6	6	5	4	77	7	6	3	5	4	3	5	4	6	6	27	2	4	5	6	6	6	5	6	4	4	77	5	5	4	4	5	4	5	5	5	5
28	2	2	6	6	8	3	5	2	4	5	78	5	7	4	3	5	4	6	5	5	4	28	3	3	6	6	6	4	5	1	4	5	78	4	6	5	4	5	5	6	6	4	3
29	3	3	7	7	5	4	5	1	5	4	79	6	3	5	4	4	5	7	6	5	3	29	3	4	5	6	5	5	5	2	5	5	79	4	4	5	5	4	6	7	5	4	4
30	4	4	7	5	6	4	4	2	6	5	80	3	4	2	5	5	6	5	5	4	3	30	4	5	5	5	4	4	5	3	6	6	80	3	5	3	5	5	7	4	4	3	4
31	5	5	8	5	5	5	4	3	6	6	81	3	5	3	5	6	6	6	5	3	4	31	5	5	6	1	4	5	4	4	5	6	81	4	5	4	6	6	3	5	5	4	4
32	4	6	3	6	2	3	5	4	6	6	82	4	4	4	6	5	5	4	4	3	4	32	3	5	4	2	3	4	5	5	6	5	82	5	5	5	5	5	4	3	3	4	5
33	5	2	4	6	3	4	6	5	7	6	83	5	5	5	4	6	5	5	3	4	4	33	4	3	5	3	4	5	6	5	5	5	83	5	6	6	5	3	3	4	4	4	5
34	6	3	5	4	3	5	7	6	5	5	84	6	6	6	5	4	3	3	4	4	5	34	5	4	6	4	4	6	7	6	5	4	84	6	5	5	6	4	3	4	5	5	5
35	2	4	6	5	4	4	7	7	6	5	85	7	7	4	6	5	4	4	5	5	5	35	3	4	6	5	5	5	5	5	5	5	85	6	6	5	3	3	4	5	5	6	6
36	3	3	6	6	5	4	6	3	5	4	86	6	8	5	4	4	3	2	6	6	5	36	4	3	7	6	5	3	6	2	5	5	86	5	6	4	4	4	4	3	5	5	4
37	4	4	7	7	6	5	2	2	5	5	87	7	4	6	5	5	4	3	7	4	4	37	4	4	6	7	6	4	3	3	6	6	87	5	5	4	5	5	5	4	6	5	5
38	5	5	8	6	7	5	3	3	4	6	88	4	5	3	6	5	5	4	6	5	4	38	5	5	6	5	5	5	4	3	5	7	88	3	4	3	6	6	5	5	5	4	5
39	6	6	9	6	4	2	4	4	4	5	89	4	2	4	6	6	6	5	4	4	5	39	6	6	7	2	5	3	5	4	5	6	89	4	3	4	6	7	4	6	5	5	5
40	5	7	4	7	3	3	3	4	5	6	90	5	3	5	7	6	6	5	5	4	5	40	4	6	3	3	4	4	4	5	6	6	90	5	4	5	6	5	5	4	4	3	5
41	6	3	5	2	4	4	4	5	5	6	91	2	4	6	5	7	4	4	4	5	4	41	5	4	2	3	5	4	5	6	6	6	91	3	5	6	6	4	4	5	5	4	5
42	7	4	6	3	4	5	5	6	6	6	92	3	3	7	6	5	4	4	3	5	5	42	5	5	3	4	4	5	6	6	6	5	92	4	4	6	5	4	4	5	2	5	6
43	3	5	2	1	5	5	6	6	5	6	93	4	4	5	7	4	3	5	2	6	5	43	4	5	3	2	5	5	6	6	2	5	93	4	5	6	4	4	4	6	3	6	6
44	4	4	3	2	6	5	7	4	6	3	94	5	5	6	5	5	4	3	3	7	6	44	4	4	4	3	6	4	6	3	3	2	94	5	5	5	4	5	5	4	4	6	5
45	5	4	4	3	6	6	3	3	6	2	95	6	5	7	4	3	5	4	4	5	5	45	5	5	4	4	6	5	4	4	4	3	95	6	4	4	2	4	6	5	5	6	4
46	6	5	5	4	7	6	4	4	5	3	96	5	6	4	5	3	4	5	5	6	5	46	5	6	5	5	6	6	5	4	4	4	96	4	4	4	3	4	5	6	6	5	5
47	7	6	6	5	5	3	5	5	4	4	97	5	3	4	3	4	5	6	5	5	6	47	5	6	6	3	5	2	4	5	5	5	97	4	3	5	4	5	5	7	4	4	4
48	6	7	5	6	4	4	3	4	5	5	98	6	4	5	4	4	6	6	6	5	5	48	5	7	4	4	5	3	4	5	6	6	98	4	3	6	5	5	6	5	5	4	4
49	7	4	6	3	5	5	4	5	6	6	99	3	5	6	5	5	5	5	5	6	4	49	6	3	3	4	4	4	5	6	6	6	99	3	4	6	5	5	5	4	3	5	5
50	8	5	2	4	5	5	4	3	7	7	100	4	4	7	6	4	5	5	4	4	1	50	6	4	3	5	5	5	5	4	6	6	100	4	4	7	6	5	4	5	3	5	2
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Tafel für die kleinste Anzahl von Cuben, aus welchen die Zahlen bis 12000 zusammengesetzt werden können.

(Die am Rande befindlichen Zahlen sind die *Einer* von 1 bis 100; die Zahlen in der obersten Horizontalreihe sind die 10 Hunderte; in der Ecke oben links befinden sich die Tausende.)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	5	5	6	7	5	4	3	3	5	51	4	6	3	2	5	6	5	4	6	5
2	2	6	6	7	4	6	5	4	4	3	52	5	2	4	3	6	6	6	5	7	4
3	3	7	6	8	5	4	3	5	5	4	53	6	3	3	4	7	7	4	4	3	3
4	4	6	7	4	6	4	4	4	5	5	54	2	4	4	5	8	6	5	5	2	4
5	5	6	4	5	3	5	5	5	6	6	55	3	3	5	6	6	4	5	3	2	5
6	6	7	4	6	4	5	6	6	7	6	56	4	4	4	7	5	5	4	2	3	5
7	7	4	5	3	2	6	6	6	5	5	57	5	5	5	4	6	3	4	3	3	6
8	1	4	5	4	3	5	6	6	5	4	58	6	6	3	5	6	4	5	4	4	7
9	2	5	5	5	4	6	5	4	4	4	59	5	7	4	3	3	2	6	5	5	6
10	3	6	6	6	5	7	6	5	4	4	60	6	3	5	4	4	3	5	6	6	5
11	4	7	7	7	6	5	4	4	3	5	61	7	4	4	5	4	4	5	5	4	4
12	5	7	8	5	7	1	5	4	4	6	62	3	5	5	6	5	5	6	3	3	5
13	6	7	5	6	4	2	4	3	5	7	63	4	4	6	7	6	5	6	4	3	5
14	7	8	5	3	5	3	5	4	4	5	64	1	5	5	8	6	5	3	3	4	5
15	8	5	6	4	3	4	6	5	5	6	65	2	6	6	5	7	4	4	4	4	6
16	2	5	1	5	4	5	7	5	5	5	66	3	7	4	6	3	3	5	5	5	4
17	3	6	2	4	5	6	6	5	5	4	67	4	8	5	4	4	3	4	5	6	5
18	4	3	3	5	6	7	5	4	5	3	68	5	4	6	3	2	4	5	5	6	6
19	5	4	4	6	7	6	5	5	4	3	69	6	5	5	4	3	5	6	6	5	5
20	6	5	5	5	8	2	4	5	3	4	70	4	6	3	2	4	6	7	4	4	6
21	7	6	6	6	5	3	4	4	4	4	71	5	5	4	3	3	6	7	5	4	4
22	8	7	6	4	5	4	5	5	5	5	72	2	5	5	4	4	6	4	4	5	3
23	9	6	7	5	4	4	3	6	6	6	73	3	6	6	5	5	5	5	4	5	4
24	3	6	2	5	4	5	4	6	6	6	74	4	7	5	6	4	4	6	5	5	5
25	4	1	3	5	5	5	5	6	6	5	75	5	8	6	3	5	4	4	3	4	6
26	5	2	4	6	6	6	6	5	4	4	76	6	5	7	4	3	2	5	4	5	7
27	1	3	5	7	7	5	6	6	5	4	77	7	6	3	5	4	3	5	4	6	6
28	2	2	6	6	8	3	5	2	4	5	78	5	7	4	3	5	4	6	5	5	4
29	3	3	7	7	5	4	5	1	5	4	79	6	3	5	4	4	5	7	6	5	3
30	4	4	7	5	6	4	4	2	6	5	80	3	4	2	5	5	6	5	5	4	3
31	5	5	8	5	5	5	4	3	6	6	81	3	5	3	5	6	6	6	5	3	4
32	4	6	3	6	2	3	5	4	6	6	82	4	4	4	6	5	5	4	4	3	4
33	5	2	4	6	3	4	6	5	7	6	83	5	5	5	4	6	5	5	3	4	4
34	6	3	5	4	3	5	7	6	5	5	84	6	6	6	5	4	3	3	4	4	5
35	2	4	6	5	4	4	7	7	6	5	85	7	7	4	6	5	4	4	5	5	5
36	3	3	6	6	5	4	6	3	5	4	86	6	8	5	4	4	3	2	6	6	5
37	4	4	7	7	6	5	2	2	5	5	87	7	4	6	5	5	4	3	7	4	4
38	5	5	8	6	7	5	3	3	4	6	88	4	5	3	6	5	5	4	6	5	4
39	6	6	9	6	4	2	4	4	4	5	89	4	2	4	6	6	6	5	4	4	5
40	5	7	4	7	3	3	3	4	5	6	90	5	3	5	7	6	6	5	5	4	5
41	6	3	5	2	4	4	4	5	5	6	91	2	4	6	5	7	4	4	4	5	4
42	7	4	6	3	4	5	5	6	6	6	92	3	3	7	6	5	4	4	3	5	5
43	3	5	2	1	5	5	6	6	5	6	93	4	4	5	7	4	3	5	2	6	5
44	4	4	3	2	6	5	7	4	6	3	94	5	5	6	5	5	4	3	3	7	6
45	5	4	4	3	6	6	3	3	6	2	95	6	5	7	4	3	5	4	4	5	5
46	6	5	5	4	7	6	4	4	5	3	96	5	6	4	5	3	4	5	5	6	5
47	7	6	6	5	5	3	5	5	4	4	97	5	3	4	3	4	5	6	5	5	6
48	6	7	5	6	4	4	3	4	5	5	98	6	4	5	4	4	6	6	6	5	5
49	7	4	6	3	5	5	4	5	6	6	99	3	5	6	5	5	5	5	5	6	4
50	8	5	2	4	5	5	4	3	7	7	100	4	4	7	6	4	5	5	4	4	1
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	5	5	5	5	5	4	3	3	6	51	3	5	4	3	6	6	6	5	3	5
2	3	6	6	6	5	5	5	4	4	4	52	4	3	5	4	7	5	6	4	4	3
3	4	5	5	5	3	5	4	5	5	5	53	5	4	4	5	7	6	5	3	2	4
4	5	4	5	4	4	4	5	5	6	6	54	3	4	5	6	7	6	6	4	3	4
5	5	4	4	3	4	5	5	6	5	5	55	4	4	6	4	6	3	5	2	3	5
6	4	5	4	4	5	5	6	4	6	5	56	4	5	5	5	2	4	5	3	3	6
7	4	4	5	4	3	6	6	5	4	3	57	5	4	4	5	3	4	5	4	4	7
8	2	5	5	5	4	6	4	4	4	4	58	6	5	4	2	2	5	5	4	5	6
9	3	6	6	5	5	6	5	4	4	5	59	4	6	5	3	3	3	6	5	4	6
10	4	6	7	6	6	4	4	4	5	5	60	5	4	5	4	4	4	6	5	5	4
11	5	6	6	6	4	5	3	5	4	6	61	5	3	4	5	5	5	4	4	3	5
12	5	5	6	5	4	2	4	5	5	7	62	4	4	4	6	6	6	5	4	4	5
13	6	5	4	4	4	3	5	4	6	6	63	5	4	5	5	6	4	6	3	4	6
14	5	6	5	4	4	4	6	5	5	6	64	2	5	5	6	3	5	4	4	4	6
15	5	4	5	4	3	5	6	5	5	4	65	3	5	5	4	4	5	5	4	4	7
16	3	5	2	5	4	6	5	5	5	5	66	4	6	5	3	3	4	5	5	5	5
17	4	6	3	5	5	6	5	5	4	3	67	5	6	4	3	4	4	5	6	5	6
18	5	4	4	6	6	5	5	5	5	4	68	6	5	3	4	3	5	6	6	6	3
19	6	5	5	6	5	5	4	6	3	4	69	4	4	4	4	4	6	5	5	4	4
20	6	5	6	5	5	3	5	5	4	4	70	3	5	4	3	5	6	6	5	3	3
21	7	6	5	5	5	4	5	5	5	5	71	3	5	5	4	4	5	7	4	4	3
22	6	7	5	4	3	3	6	6	5	5	72	2	6	5	4	4	6	3	5	5	4
23	6	5	5	4	4	4	4	6	6	5	73	3	6	6	5	5	6	4	5	5	5
24	2	5	3	5	5	5	5	6	5	4	74	4	7	4	4	4	3	2	5	6	5
25	3	2	4	5	6	6	6	5	5	4	75	5	7	5	4	5	4	3	4	5	6
26	4	3	5	5	6	6	6	5	4	4	76	6	4	4	5	4	3	4	5	6	4
27	2	4	5	6	6	6	5	6	4	4	77	5	5	4	4	5	4	5	5	5	5
28	3	3	6	6	6	4	5	1	4	5	78	4	6	5	4	5	5	6	6	4	3
29	3	4	5	6	5	5	5	2	5	5	79	4	4	5	5	4	6	7	5	4	4
30	4	5	5	5	4	4	5	3	6	6	80	3	5	3	5	5	7	4	4	3	4
31	5	5	6	1	4	5	4	4	5	6	81	4	5	4	6	6	3	5	5	4	4
32	3	5	4	2	3	4	5	5	6	5	82	5	5	5	5	5	4	3	3	4	5
33	4	3	5	3	4	5	6	5	5	5	83	5	6	6	5	3	3	4	4	4	5
34	5	4	6	4	4	6	7	6	5	4	84	6	5	5	6	4	3	4	5	5	5
35	3	4	6	5	5	5	5	5	5	5	85	6	6	5	3	3	4	5	5	6	6
36	4	3	7	6	5	3	6	2	5	5	86	5	6	4	4	4	4	3	5	5	4
37	4	4	6	7	6	4	3	3	6	6	87	5	5	4	5	5	5	4	6	5	5
38	5	5	6	5	5	5	4	3	5	7	88	3	4	3	6	6	5	5	5	4	5
39	6	6	7	2	5	3	5	4	5	6	89	4	3	4	6	7	4	6	5	5	5
40	4	6	3	3	4	4	4	5	6	6	90	5	4	5	6	5	5	4	4	3	5
41	5	4	2	3	5	4	5	6	6	6	91	3	5	6	6	4	4	5	5	4	5
42	5	5	3	4	4	5	6	6	6	5	92	4	4	6	5	4	4	5	2	5	6
43	4	5	3	2	5	5	6	6	2	5	93	4	5	6	4	4	4	6	3	6	6
44	4	4	4	3	6	4	6	3	3	2	94	5	5	5	4	5	5	4	4	6	5
45	5	5	4	4	6	5	4	4	4	3	95	6	4	4	2	4	6	5	5	6	4
46	5	6	5	5	6	6	5	4	4	4	96	4	4	4	3	4	5	6	6	5	5
47	5	6	6	3	5	2	4	5	5	5	97	4	3	5	4	5	5	7	4	4	4
48	5	7	4	4	5	3	4	5	6	6	98	4	3	6	5	5	6	5	5	4	4
49	6	3	3	4	4	4	5	6	6	6	99	3	4	6	5	5	5	4	3	5	5
50	6	4	3	5	5	5	5	4	6	6	100	4	4	7	6	5	4	5	3	5	2
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	5	5	6	4	5	5	4	4	5
2	4	6	5	5	4	6	4	5	5	5
3	5	4	5	4	3	4	5	5	5	6
4	5	5	4	3	4	4	3	6	6	4
5	4	5	2	4	5	5	4	5	5	4
6	5	4	3	5	6	6	5	5	4	5
7	5	5	4	5	4	5	5	4	5	4
8	3	5	5	6	5	6	5	4	2	5
9	4	6	6	5	5	5	4	2	3	5
10	5	7	6	4	5	5	4	3	4	4
11	6	5	5	4	4	4	4	4	5	5
12	6	5	4	4	4	3	4	5	6	4
13	5	5	3	4	2	4	5	5	6	5
14	6	4	4	4	3	5	6	6	4	4
15	4	5	5	4	4	6	5	5	5	4
16	4	6	3	5	5	6	6	4	3	4
17	3	6	4	6	6	5	5	3	4	4
18	4	5	5	5	6	6	5	4	5	5
19	5	6	6	5	4	5	4	5	4	5
20	6	5	5	5	5	4	5	5	4	5
21	6	6	4	4	3	3	5	6	5	6
22	5	5	5	2	4	4	6	6	5	5
23	5	4	4	3	5	5	5	6	5	4
24	3	3	2	4	5	6	6	5	4	5
25	4	3	3	3	6	6	6	4	4	3
26	5	4	4	4	7	5	5	3	5	2
27	3	5	5	5	5	5	5	4	4	3
28	4	4	5	6	5	4	5	2	5	4
29	4	5	5	5	4	4	3	3	6	5
30	5	5	6	3	4	4	4	4	6	6
31	6	5	5	2	5	5	4	5	6	5
32	4	4	3	3	4	5	5	5	5	5
33	5	4	4	4	5	6	6	5	5	3
34	4	5	5	5	5	6	6	4	3	3
35	4	3	6	6	5	6	5	5	3	4
36	5	4	6	6	5	4	4	3	4	4
37	5	5	6	5	5	5	4	4	4	5
38	6	6	6	4	5	3	5	4	5	6
39	7	6	5	3	5	4	5	5	6	5
40	5	5	2	4	3	2	5	6	6	6
41	6	5	3	4	4	3	6	6	5	4
42	4	4	4	5	5	4	6	5	4	4
43	5	4	4	3	6	5	6	5	3	5
44	4	4	5	4	6	5	5	1	4	3
45	5	5	5	5	6	6	5	2	4	4
46	6	6	6	5	5	4	4	3	5	5
47	6	6	6	4	3	3	4	4	5	4
48	4	6	3	5	4	3	5	5	6	5
49	5	4	4	3	5	4	5	6	6	5
50	5	5	4	4	4	5	6	5	5	5
2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	4	3	4	5	6	6	6	4	6
52	5	4	4	4	6	6	6	2	5	4
53	5	5	5	5	5	6	5	3	3	3
54	4	5	6	6	6	5	5	4	4	4
55	5	5	6	3	4	4	5	3	4	5
56	5	6	4	4	3	4	4	3	4	6
57	6	5	5	4	2	5	5	4	5	6
58	6	6	5	3	3	6	5	5	6	6
59	3	5	4	4	4	4	6	6	5	4
60	2	3	4	4	5	5	7	3	6	2
61	3	4	2	5	6	6	5	4	4	3
62	4	4	3	6	6	6	2	5	4	4
63	5	5	4	4	5	5	3	4	5	5
64	3	6	5	5	4	5	4	4	4	6
65	4	6	4	3	3	4	3	5	5	6
66	5	7	5	4	4	5	4	6	6	6
67	4	5	3	4	4	3	5	6	4	5
68	3	4	4	4	4	4	4	4	5	3
69	3	5	3	5	5	5	5	5	2	3
70	4	5	4	4	6	6	3	6	3	4
71	2	5	5	5	5	4	4	2	4	4
72	3	6	6	5	5	3	4	3	3	4
73	4	5	5	4	4	4	3	3	4	5
74	5	6	5	5	4	4	3	4	5	5
75	5	6	4	5	5	4	4	5	5	6
76	4	5	3	4	5	4	5	5	6	4
77	4	6	4	5	3	5	6	5	3	4
78	5	5	4	5	4	6	4	6	3	4
79	3	5	5	5	5	5	5	3	4	5
80	4	6	4	6	4	4	5	4	4	4
81	4	6	5	5	5	4	4	4	4	5
82	5	6	6	4	4	3	4	4	5	6
83	6	7	5	5	4	3	5	4	3	6
84	5	4	4	5	3	4	5	5	4	5
85	5	3	4	4	4	4	6	6	4	5
86	4	3	5	3	5	5	4	6	4	5
87	3	3	3	4	5	6	5	3	5	3
88	4	4	3	5	5	5	6	4	5	4
89	5	4	4	4	6	5	3	3	4	4
90	6	5	5	5	4	4	4	4	4	3
91	4	6	6	5	5	4	5	5	4	4
92	5	5	5	4	4	5	4	3	5	5
93	4	4	5	5	5	5	4	4	5	6
94	5	4	4	4	5	4	5	5	5	3
95	4	4	4	3	5	5	5	4	6	4
96	4	3	4	4	5	6	5	5	3	4
97	5	1	5	5	6	6	4	4	4	4
98	3	2	6	6	5	5	4	3	4	4
99	4	3	7	6	6	4	4	4	4	5
100	5	4	6	5	5	5	4	3	5	3
2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	4	4	5	3	4	5	5	5
2	4	5	5	4	2	4	5	6	6	5
3	4	4	4	3	3	3	6	6	5	4
4	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5
5	3	5	3	5	5	5	5	5	5	4
6	4	5	4	6	6	4	4	4	5	5
7	5	5	5	5	5	5	4	5	3	4
8	4	6	6	6	4	3	4	5	3	5
9	5	6	5	4	5	4	5	3	4	6
10	5	6	4	4	3	4	5	4	5	5
11	5	5	4	4	4	4	5	5	5	5
12	6	4	3	4	5	4	4	6	6	5
13	4	4	4	5	3	5	5	5	5	4
14	4	3	5	5	4	5	5	5	4	3
15	5	4	4	5	5	5	5	5	4	4
16	4	4	4	6	5	4	5	3	3	5
17	4	5	5	5	5	4	6	4	4	5
18	5	5	5	5	4	4	3	2	5	6
19	6	4	5	5	5	4	4	3	5	6
20	7	5	4	3	6	3	5	4	5	5
21	4	5	3	4	4	4	6	5	5	5
22	5	4	4	3	5	5	6	5	5	4
23	5	3	5	4	6	6	6	4	5	5
24	3	4	3	5	5	5	5	4	4	4
25	4	4	4	4	6	5	3	5	5	2
26	5	5	4	5	5	5	4	3	4	3
27	4	5	5	6	5	3	5	4	5	4
28	5	5	5	4	4	2	4	3	5	5
29	5	6	4	5	3	3	4	4	6	6
30	5	4	5	4	3	4	5	5	6	5
31	6	4	6	3	4	5	5	5	5	6
32	4	4	4	4	5	6	6	5	4	4
33	4	5	5	4	6	5	4	4	5	3
34	5	6	5	5	5	6	5	4	4	3
35	5	4	6	5	5	4	4	5	4	4
36	5	5	6	5	5	3	5	4	5	5
37	5	6	5	4	4	3	5	5	5	6
38	6	5	4	5	3	4	6	5	6	6
39	5	5	4	4	2	5	5	6	6	5
40	5	5	3	5	3	3	6	6	5	5
41	5	4	4	5	4	4	5	5	4	4
42	5	3	5	6	5	5	5	5	5	4
43	5	4	5	4	6	5	5	4	3	5
44	5	5	5	5	6	4	5	2	4	4
45	6	6	6	5	4	4	4	3	5	5
46	6	5	5	4	4	5	4	4	4	6
47	6	6	5	4	3	4	5	5	5	5
48	5	5	4	4	4	4	5	6	5	6
49	6	4	5	4	5	5	6	6	5	5
50	4	4	4	5	5	6	6	4	6	4
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	3	3	4	5	6	6	6	5	4	3
52	3	4	5	5	7	5	4	3	4	3
53	4	5	5	6	5	5	3	4	4	4
54	4	6	6	5	5	4	4	5	5	5
55	5	6	5	4	4	3	3	4	5	5
56	6	6	2	5	2	4	4	4	5	6
57	6	5	3	5	3	5	5	5	6	5
58	4	5	4	4	4	5	6	5	5	5
59	2	4	5	5	5	5	7	6	5	4
60	3	4	5	5	6	6	5	4	5	3
61	4	5	3	6	6	6	4	5	5	4
62	5	5	4	6	5	5	3	5	5	5
63	6	5	5	5	5	4	4	5	4	6
64	4	6	3	5	3	3	5	5	5	7
65	5	6	4	4	4	4	4	6	6	6
66	5	6	5	5	3	5	5	6	6	5
67	3	5	4	4	4	4	6	6	5	5
68	4	5	4	5	5	5	5	3	5	3
69	4	4	3	6	6	5	5	4	3	4
70	5	5	4	5	6	5	4	5	4	5
71	3	6	5	6	5	3	5	3	3	5
72	4	7	4	6	3	4	3	4	4	5
73	5	6	5	5	2	5	4	4	5	6
74	6	3	5	5	3	5	4	5	6	6
75	4	4	3	1	4	5	5	6	5	6
76	5	3	4	2	5	5	5	4	6	4
77	5	4	4	3	4	6	6	5	4	5
78	4	4	5	4	5	6	5	4	4	4
79	4	5	5	5	6	4	5	4	4	4
80	5	5	5	6	4	5	4	4	4	5
81	5	6	6	3	3	3	5	4	5	6
82	6	4	6	4	4	4	4	3	6	6
83	5	5	3	2	3	4	5	4	4	6
84	4	3	4	3	4	4	6	5	5	4
85	3	4	4	4	4	5	7	6	5	3
86	3	3	5	4	5	6	4	5	5	4
87	2	4	4	5	6	5	5	4	2	4
88	3	5	4	6	5	6	4	3	3	5
89	4	5	5	4	4	4	3	4	4	3
90	5	5	5	4	5	5	4	4	5	4
91	5	6	4	3	4	2	5	5	5	5
92	5	4	5	4	5	3	5	4	6	5
93	4	5	5	5	4	4	5	5	4	3
94	4	4	5	4	4	5	5	6	5	4
95	3	5	5	4	5	6	6	4	3	4
96	4	4	4	5	6	5	4	4	4	4
97	5	2	5	5	5	4	4	4	5	4
98	4	3	6	5	6	3	4	4	4	4
99	4	4	4	4	4	3	4	3	5	5
100	5	5	5	4	2	4	5	4	6	4
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	4	5	4	4	5	5	4	6
2	5	3	3	5	3	5	6	6	5	4
3	5	3	4	4	4	3	5	7	4	5
4	4	2	5	5	4	4	5	5	3	4
5	4	3	4	6	5	4	4	5	4	5
6	5	4	5	7	5	5	4	2	5	3
7	6	5	6	5	4	4	5	3	4	4
8	5	6	4	5	5	4	2	4	4	5
9	5	5	4	5	5	5	3	4	4	6
10	6	4	4	4	4	5	3	5	5	5
11	5	4	5	4	5	4	4	6	5	4
12	3	3	4	2	5	5	5	4	4	4
13	4	4	5	3	4	5	5	5	4	1
14	5	4	4	4	5	6	4	3	4	2
15	4	5	5	5	5	4	4	4	3	3
16	4	5	5	6	4	5	3	4	4	4
17	5	5	5	6	4	4	4	5	5	5
18	5	4	5	4	3	5	4	3	6	6
19	6	5	6	4	4	3	5	4	6	5
20	4	4	5	3	5	4	5	5	5	5
21	5	5	2	4	3	5	6	5	5	2
22	5	5	3	4	4	4	5	4	5	3
23	4	2	4	5	5	5	5	5	4	4
24	4	3	3	6	5	4	4	5	3	5
25	5	4	4	4	5	5	4	5	2	3
26	6	5	5	5	4	4	5	4	3	4
27	5	6	4	4	5	4	5	5	4	5
28	5	5	4	4	5	3	4	4	5	5
29	5	4	3	5	4	4	5	5	6	3
30	5	4	3	5	4	4	5	5	5	4
31	5	3	4	4	5	5	5	5	3	4
32	4	4	4	4	6	5	5	6	4	5
33	5	5	5	5	6	6	5	3	3	4
34	6	6	6	5	5	5	4	4	4	4
35	6	5	5	5	5	5	3	4	5	5
36	6	6	5	4	5	3	4	4	5	6
37	6	4	4	5	3	4	4	3	5	4
38	5	5	4	5	4	5	5	4	6	5
39	4	3	5	3	2	6	6	5	4	5
40	3	4	4	4	3	4	5	5	5	2
41	4	3	5	5	4	5	5	4	4	2
42	5	4	6	6	5	5	5	4	4	3
43	5	5	5	5	5	4	4	5	4	4
44	6	6	6	5	5	4	4	3	5	5
45	6	5	5	5	4	4	5	4	6	5
46	6	6	5	3	4	4	5	5	4	6
47	5	4	5	4	3	5	5	5	5	6
48	4	5	3	5	4	5	6	6	5	3
49	4	4	4	4	5	5	5	5	5	3
50	3	3	5	5	5	6	6	5	5	3
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	4	4	4	6	6	5	4	6	4	3
52	4	5	5	5	5	4	5	4	3	4
53	4	6	6	5	5	5	4	5	4	4
54	5	6	5	4	4	5	3	6	5	5
55	6	5	5	4	4	4	3	5	6	6
56	5	5	3	5	3	5	4	5	6	4
57	4	5	3	4	4	5	5	6	6	4
58	4	4	4	5	3	6	6	6	4	4
59	3	4	5	5	4	6	5	5	3	4
60	4	2	6	6	5	5	6	4	4	4
61	3	3	4	6	5	5	4	4	5	5
62	4	4	5	5	5	4	4	5	4	6
63	5	5	6	5	4	4	4	5	5	6
64	5	5	4	5	4	3	5	4	6	5
65	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5
66	5	4	4	4	3	5	6	6	5	5
67	4	4	5	5	4	4	6	6	4	3
68	5	3	3	6	5	5	5	4	4	3
69	4	4	4	7	6	5	5	4	4	4
70	5	5	5	6	6	5	5	3	4	4
71	4	6	6	6	4	4	5	4	4	5
72	5	6	5	6	2	4	3	5	5	6
73	6	5	5	4	3	4	4	5	5	6
74	6	4	5	5	4	5	4	6	6	6
75	2	4	4	2	5	5	5	7	5	4
76	3	4	4	3	6	6	6	5	5	4
77	4	4	4	4	5	6	5	5	5	2
78	5	5	5	5	6	6	5	4	5	3
79	5	6	6	6	5	5	5	4	4	4
80	5	6	4	6	3	5	4	4	5	5
81	6	6	5	4	4	4	4	5	6	6
82	6	5	6	4	4	5	4	3	7	7
83	3	5	4	3	4	4	5	4	5	5
84	4	4	4	4	4	5	6	5	6	3
85	4	3	3	5	4	6	6	6	5	3
86	4	4	4	5	5	5	5	5	4	4
87	3	3	5	6	6	3	5	3	3	5
88	4	4	4	7	4	4	3	4	4	6
89	5	5	5	5	5	5	4	5	3	4
90	6	6	5	3	5	5	5	4	4	5
91	4	6	3	4	5	3	6	5	5	6
92	5	5	4	5	5	4	5	5	6	4
93	4	4	4	4	4	5	6	6	5	4
94	5	5	4	2	5	5	6	6	5	4
95	4	4	4	3	6	4	6	4	4	4
96	1	5	5	4	5	5	4	5	5	5
97	2	3	6	5	4	3	4	4	4	4
98	3	4	6	4	5	4	5	5	5	4
99	4	5	4	3	3	4	4	4	6	5
100	5	3	4	4	3	4	5	5	6	5
4	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	5	3	5	4	5	5	5	5	5
2	5	3	4	5	4	6	6	5	5	5
3	4	2	5	5	5	4	6	5	3	5
4	3	3	6	6	5	4	5	3	4	3
5	3	4	5	7	6	5	5	4	5	4
6	4	5	6	7	3	4	5	3	5	4
7	5	5	6	5	4	5	4	4	5	5
8	6	6	5	5	4	5	3	5	5	6
9	5	4	4	4	4	5	4	5	5	6
10	6	4	5	4	5	4	4	6	6	6
11	4	3	4	4	5	4	5	6	4	5
12	4	4	5	3	5	5	6	4	5	4
13	4	4	5	4	5	6	3	4	5	2
14	4	5	5	5	4	5	4	4	5	3
15	4	6	6	5	5	3	3	5	4	3
16	5	6	6	4	5	4	4	5	5	4
17	5	5	5	5	4	4	5	4	6	5
18	6	5	3	4	4	4	4	4	7	4
19	5	4	4	3	5	4	5	5	5	5
20	4	3	4	3	6	5	6	5	6	4
21	5	4	3	4	4	6	4	4	5	3
22	5	4	4	5	5	5	4	5	4	4
23	5	3	5	6	5	4	4	5	5	3
24	5	4	4	4	5	5	5	4	2	4
25	5	4	5	5	2	5	5	3	3	4
26	6	5	4	4	3	5	4	4	4	5
27	5	5	4	4	2	4	4	5	5	6
28	5	4	3	4	3	4	5	5	5	4
29	5	2	4	5	4	5	5	5	4	4
30	5	3	4	6	5	5	5	4	4	4
31	4	4	4	5	6	4	5	4	3	4
32	4	5	4	5	6	5	4	5	1	5
33	5	5	5	6	3	4	5	4	2	5
34	5	6	5	5	4	5	5	4	3	5
35	6	6	5	5	3	4	4	5	4	6
36	5	5	4	4	4	4	3	5	5	5
37	5	3	5	3	4	5	4	4	5	3
38	2	4	5	4	5	5	5	4	5	4
39	3	4	5	4	3	5	6	5	4	3
40	4	5	5	5	4	5	4	4	2	3
41	3	4	6	5	4	5	3	5	3	3
42	4	5	6	6	5	4	2	5	4	4
43	5	6	6	4	4	5	3	5	5	5
44	6	5	5	5	4	4	4	4	6	6
45	6	4	4	3	4	5	5	5	6	4
46	3	5	5	4	3	5	6	5	5	5
47	4	4	5	4	4	6	6	5	5	4
48	4	5	4	4	5	6	5	5	3	4
49	3	5	4	5	5	6	4	4	4	3
50	4	4	5	6	6	3	3	5	4	4
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	5	5	5	5	5	4	4	5	3	4
52	5	5	6	5	3	3	5	4	4	4
53	5	5	5	4	3	4	3	5	5	5
54	4	6	3	5	3	3	4	6	5	5
55	5	5	4	5	4	4	4	6	5	5
56	5	3	2	5	4	5	5	6	4	4
57	4	3	3	5	5	6	5	5	4	2
58	5	4	4	5	4	4	4	5	3	3
59	4	5	5	6	5	5	5	6	2	4
60	5	3	6	6	4	4	5	5	3	3
61	4	4	5	5	4	4	4	4	4	4
62	5	5	4	6	4	4	4	5	5	5
63	6	3	5	5	4	5	4	6	5	6
64	5	4	3	4	5	4	5	5	5	4
65	3	4	4	5	5	5	6	5	5	3
66	3	4	5	5	4	5	5	4	4	4
67	4	3	6	6	5	5	5	3	3	4
68	4	3	4	6	5	5	4	3	4	4
69	4	4	5	6	5	5	3	4	4	5
70	5	5	5	5	4	5	3	3	5	5
71	5	4	6	4	5	4	4	4	5	6
72	6	5	4	4	3	2	4	5	6	5
73	4	5	5	4	4	3	5	6	6	4
74	4	4	5	5	5	4	5	5	5	5
75	3	4	5	3	6	5	4	4	4	5
76	4	4	5	4	6	6	5	4	5	4
77	5	5	5	5	6	4	4	5	5	3
78	5	6	6	6	5	4	4	4	4	4
79	5	5	7	4	4	4	4	5	5	4
80	4	6	5	5	4	3	4	5	6	5
81	5	6	4	3	4	4	5	5	6	5
82	5	5	4	4	5	5	5	4	6	5
83	4	4	3	4	5	5	5	5	5	4
84	5	3	3	4	5	6	6	5	5	3
85	5	4	4	5	5	5	5	5	4	3
86	5	5	5	6	6	5	5	5	3	4
87	4	4	6	5	5	4	5	4	4	4
88	5	5	4	5	2	4	4	3	3	5
89	6	5	5	4	3	5	5	4	4	5
90	6	4	5	4	4	6	5	5	5	6
91	5	4	4	5	3	4	5	6	5	5
92	4	4	4	4	4	5	6	6	4	4
93	4	3	4	5	5	6	6	5	4	4
94	5	4	4	3	6	6	6	4	4	5
95	5	4	5	4	6	5	5	4	4	5
96	2	5	5	5	3	5	4	4	2	4
97	3	4	6	5	4	4	3	4	3	5
98	4	5	6	5	5	5	4	5	4	5
99	4	5	4	4	4	3	5	5	5	6
100	5	4	5	4	4	4	4	5	5	3
5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	4	4	3	5	6	5	5	5	5	51	5	6	6	5	4	4	4	3	4	4	1	4	4	4	4	6	6	6	5	5	4	51	4	5	5	5	4	5	4	4	5	5
2	5	4	3	4	5	5	5	5	5	4	52	6	5	3	3	4	4	4	4	4	5	2	5	3	2	5	6	6	4	4	4	5	52	5	6	4	3	4	3	3	5	5	5
3	4	3	4	4	6	5	5	5	4	3	53	5	4	4	4	4	3	4	5	5	5	3	5	4	3	5	5	5	4	5	4	3	53	6	3	5	4	3	4	4	6	5	5
4	4	4	5	5	5	5	5	4	4	3	54	5	3	4	5	4	4	5	6	5	5	4	5	5	4	5	6	4	4	5	3	4	54	5	4	4	4	4	5	5	6	5	6
5	4	5	6	6	5	5	5	3	3	4	55	5	4	5	5	4	5	4	6	5	5	5	5	6	5	5	5	5	4	4	4	5	55	5	3	5	4	5	6	5	5	4	5
6	5	6	6	5	4	5	6	4	4	5	56	3	3	3	5	5	6	5	3	3	4	6	5	5	5	5	4	3	5	5	5	6	56	3	4	4	5	5	5	5	4	4	4
7	6	6	4	5	5	5	4	5	4	6	57	4	4	4	3	5	5	4	4	3	3	7	6	5	5	5	5	4	5	5	5	4	57	4	4	5	4	6	5	2	5	4	4
8	4	5	4	3	3	5	4	5	5	5	58	5	5	4	4	5	5	4	3	4	4	8	5	5	4	4	4	5	5	5	5	5	58	5	5	5	5	4	5	3	4	5	4
9	5	4	4	4	4	3	5	6	6	5	59	5	6	5	5	5	4	5	4	1	5	9	5	3	5	4	5	4	4	6	4	5	59	5	6	5	5	5	4	4	5	2	5
10	5	4	4	5	5	4	5	5	5	5	60	5	4	4	4	3	3	5	5	2	4	10	5	2	3	5	6	5	5	5	4	4	60	6	5	5	4	4	2	4	6	3	5
11	4	4	5	5	5	5	6	6	4	4	61	5	5	5	5	4	2	5	4	3	5	11	3	3	4	5	6	6	5	4	5	4	61	5	4	5	5	4	3	5	4	4	6
12	4	3	5	4	6	4	5	4	4	4	62	4	4	5	4	3	3	5	5	4	6	12	4	4	5	5	6	5	5	4	4	4	62	5	4	3	5	4	4	6	5	5	4
13	4	4	5	5	6	5	4	4	4	3	63	5	4	5	4	4	4	4	6	5	5	13	5	5	6	6	4	5	5	3	5	4	63	5	2	4	5	5	5	5	6	5	5
14	5	5	6	6	5	5	4	4	3	4	64	4	4	3	4	5	5	5	4	4	5	14	4	6	6	5	5	4	4	3	3	5	64	4	3	4	4	6	6	6	5	4	4
15	5	6	5	4	6	4	4	5	4	4	65	4	4	4	4	4	6	5	5	4	3	15	5	5	5	4	4	5	3	4	4	5	65	4	4	5	4	5	6	3	4	5	4
16	5	6	4	4	4	4	5	4	5	5	66	4	5	4	5	5	6	4	3	5	3	16	5	6	3	4	4	4	4	4	5	5	66	5	4	3	5	5	6	4	4	4	4
17	5	5	3	5	5	4	4	5	6	6	67	4	3	5	5	5	5	5	4	2	4	17	6	4	4	4	5	4	5	5	5	6	67	5	4	4	6	6	5	4	5	3	4
18	5	4	4	5	3	3	4	5	6	5	68	4	4	5	5	4	4	3	4	3	4	18	6	3	4	4	3	4	5	6	5	4	68	5	5	4	4	5	3	4	4	4	5
19	4	2	5	4	4	4	5	5	3	5	69	5	5	6	3	3	3	3	4	4	5	19	4	3	4	5	4	5	6	5	4	4	69	5	5	5	4	4	3	4	3	5	6
20	5	3	4	3	5	5	6	5	4	4	70	5	5	6	4	4	4	4	4	5	6	20	5	4	5	4	5	6	5	5	5	5	70	6	5	4	3	5	4	4	4	6	5
21	3	4	4	4	4	5	5	5	5	4	71	6	5	3	3	5	5	5	5	5	5	21	4	5	5	5	5	5	4	3	5	5	71	5	3	4	2	2	5	5	5	6	5
22	4	3	5	5	5	5	5	5	4	5	72	5	5	3	4	4	3	5	5	5	4	22	3	4	6	5	6	5	3	4	4	4	72	4	4	4	3	3	4	6	6	5	3
23	5	4	6	5	5	5	5	5	5	2	73	5	3	4	5	5	4	6	6	5	3	23	4	5	5	5	5	4	4	5	5	3	73	3	4	5	4	4	5	4	5	3	4
24	4	5	5	5	5	4	4	5	3	3	74	4	4	5	5	5	5	5	4	5	4	24	5	6	4	5	5	5	3	5	4	4	74	4	3	4	5	5	6	5	4	4	5
25	5	4	4	4	3	5	3	4	4	4	75	3	2	6	4	6	6	5	5	3	5	25	6	5	5	4	4	4	4	5	5	5	75	2	3	5	5	6	3	3	5	4	5
26	6	5	5	5	4	4	4	5	5	5	76	4	3	6	5	5	5	4	4	4	5	26	6	4	5	3	4	4	5	6	6	5	76	3	4	5	5	6	4	4	3	5	5
27	4	3	4	4	3	5	5	5	4	6	77	5	4	6	4	4	4	4	3	5	4	27	5	4	3	3	4	5	6	5	5	5	77	4	5	5	5	4	4	4	4	5	5
28	5	4	4	4	4	5	6	5	5	5	78	6	5	5	5	5	5	4	4	4	5	28	4	5	4	4	5	6	6	4	5	4	78	5	5	4	4	4	4	5	4	4	6
29	4	3	4	5	5	5	6	4	5	4	79	6	6	4	4	5	5	4	5	5	4	29	4	4	3	5	5	6	5	4	5	4	79	6	4	5	3	3	4	4	5	5	5
30	5	4	5	5	5	6	5	5	4	4	80	5	5	4	4	4	4	5	5	6	5	30	4	5	4	4	6	6	4	5	5	4	80	5	4	4	4	4	5	5	5	5	4
31	5	4	4	6	6	5	3	5	3	3	81	5	4	4	4	5	5	5	6	4	4	31	5	5	5	4	6	4	4	5	4	3	81	4	4	5	4	4	5	5	6	4	5
32	5	5	5	5	5	4	4	4	2	4	82	3	4	4	4	4	4	5	5	5	4	32	5	6	5	5	4	5	4	5	3	4	82	4	4	4	5	4	5	6	3	4	5
33	6	5	5	5	4	4	4	4	3	5	83	4	3	4	4	5	5	6	4	4	5	33	6	6	6	5	5	4	4	5	4	5	83	3	3	5	5	5	4	4	4	3	3
34	6	5	5	5	3	5	4	4	4	4	84	3	4	4	4	6	6	5	4	4	2	34	6	4	4	4	4	4	4	5	5	5	84	4	4	5	5	5	5	3	4	4	3
35	5	4	5	3	4	5	5	5	5	5	85	4	5	5	5	5	4	4	4	4	3	35	4	5	3	4	3	3	5	6	6	5	85	5	5	6	6	4	4	3	4	5	4
36	6	5	5	3	5	4	3	6	6	5	86	5	4	6	6	6	5	3	5	2	4	36	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5	86	4	5	5	5	5	4	4	5	3	5
37	3	4	4	4	5	5	4	4	5	4	87	5	5	5	5	4	3	3	5	3	3	37	4	3	4	5	5	5	5	5	5	4	87	5	5	5	4	4	3	3	6	4	4
38	3	5	5	4	6	6	5	5	5	5	88	5	6	5	5	3	3	4	4	4	4	38	4	3	4	5	6	5	5	5	4	5	88	6	5	3	5	4	2	4	5	4	5
39	4	4	3	5	4	5	4	5	4	4	89	5	5	5	4	4	4	4	5	5	5	39	5	3	4	5	5	5	4	4	3	4	89	5	4	4	5	5	3	5	6	5	5
40	3	5	4	6	5	5	5	5	2	4	90	4	4	5	5	5	5	5	6	6	5	40	4	4	5	6	5	5	5	4	3	5	90	4	3	3	4	5	4	6	4	5	5
41	4	5	5	5	5	5	2	5	3	4	91	5	4	4	3	4	3	6	5	4	6	41	5	5	5	4	5	5	3	4	4	5	91	4	4	3	4	5	4	5	4	4	4
42	5	6	5	4	4	5	3	5	4	5	92	4	5	4	4	5	4	6	5	5	3	42	6	5	5	5	5	4	4	5	5	5	92	5	5	4	5	6	5	4	5	3	4
43	5	5	5	4	5	4	4	5	5	6	93	5	4	2	5	6	5	5	4	5	4	43	5	4	4	4	4	4	4	5	5	6	93	3	5	3	5	5	5	4	4	4	5
44	6	5	2	2	5	5	4	5	6	4	94	5	4	3	4	4	4	4	4	3	5	44	5	5	3	3	5	5	5	6	6	5	94	4	5	4	5	5	5	4	5	4	5
45	4	5	3	3	4	4	5	5	6	5	95	5	5	4	5	5	4	4	5	4	4	45	5	4	4	4	4	3	6	6	6	4	95	5	5	5	5	4	4	4	5	4	4
46	4	3	4	4	4	5	5	6	4	4	96	3	6	5	4	4	4	4	5	3	5	46	5	4	4	5	5	4	5	5	4	5	96	4	6	4	5	3	3	5	4	4	5
47	4	4	4	4	5	6	5	6	4	5	97	4	5	6	4	4	5	4	5	4	6	47	4	4	4	5	6	5	5	4	3	4	97	5	5	5	4	4	4	5	5	5	5
48	2	4	5	5	5	6	6	5	3	5	98	5	5	4	4	4	5	5	5	5	5	48	3	4	5	6	6	4	5	4	4	5	98	4	4	4	3	3	5	5	5	6	4
49	3	4	5	6	4	4	3	5	4	4	99	5	5	4	4	4	4	6	6	5	5	49	4	5	5	5	5	5	4	4	4	5	99	4	4	4	4	4	4	6	5	5	4
50	4	5	5	5	5	4	4	2	5	3	100	5	3	3	4	5	5	4	6	6	4	50	5	5	6	5	3	5	4	3	4	4	100	4	3	3	5	5	5	4	4	4	1
6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	4	4	5	6	6	5	3	4	5	51	5	5	4	3	5	5	3	4	6	5
2	3	4	3	5	5	4	4	3	3	4	52	6	3	5	3	5	4	4	5	5	5
3	4	5	4	5	5	5	3	4	3	4	53	5	4	4	4	4	5	5	5	4	4
4	5	5	5	4	4	3	4	3	4	5	54	3	3	3	5	5	4	6	5	3	5
5	6	5	5	5	4	4	4	4	5	5	55	4	4	4	5	5	5	6	4	3	4
6	5	6	4	5	3	4	5	4	5	4	56	3	5	3	6	5	6	5	3	4	5
7	5	5	5	4	3	5	5	5	6	5	57	4	4	4	4	5	4	3	4	4	4
8	2	4	4	5	3	6	6	5	4	5	58	5	5	4	5	5	4	4	3	5	5
9	3	4	5	4	4	5	5	4	5	5	59	5	6	4	4	4	3	4	4	3	6
10	4	3	4	5	5	5	5	4	4	5	60	5	4	5	4	5	3	4	5	4	5
11	4	4	5	6	6	4	4	5	4	4	61	6	5	5	5	4	4	5	5	5	4
12	5	4	5	5	5	2	4	3	5	5	62	4	4	4	5	5	4	5	4	4	5
13	5	5	6	5	3	3	5	4	5	5	63	4	3	5	5	5	5	5	5	3	4
14	5	5	5	4	4	4	3	4	4	5	64	2	4	4	4	6	6	4	4	4	5
15	6	5	5	3	4	5	4	4	5	6	65	3	5	5	5	5	5	4	4	4	5
16	3	5	2	3	4	5	5	5	5	5	66	4	5	4	5	4	4	4	4	4	5
17	4	5	3	3	5	4	5	5	6	4	67	5	5	5	5	5	4	4	5	4	5
18	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	68	5	5	5	4	3	3	5	4	5	6
19	4	4	3	4	5	5	4	6	4	3	69	6	3	6	3	4	4	5	4	5	5
20	4	4	4	4	6	3	5	4	4	4	70	5	4	4	3	4	5	5	5	5	5
21	3	5	5	5	4	4	4	4	4	3	71	5	3	5	3	3	6	6	5	4	5
22	4	5	5	5	5	5	4	5	4	4	72	3	4	4	3	4	5	5	5	5	4
23	5	5	5	4	5	5	4	5	5	4	73	4	5	5	4	5	5	5	5	4	5
24	4	5	3	4	4	5	4	5	5	5	74	5	4	4	5	5	5	5	5	5	4
25	5	2	4	4	5	5	5	6	6	4	75	3	4	5	4	5	4	4	4	5	5
26	5	3	4	4	5	5	5	6	4	5	76	4	5	6	5	4	2	5	4	4	6
27	2	4	4	4	5	6	5	5	4	4	77	5	4	4	4	4	3	5	5	5	6
28	3	3	5	5	5	4	6	3	4	4	78	6	5	5	4	3	4	4	5	4	5
29	2	4	4	6	5	5	4	2	4	4	79	6	4	4	4	4	5	5	5	5	4
30	3	5	5	5	5	5	4	3	4	3	80	4	5	3	4	5	5	6	6	5	4
31	4	6	5	5	5	4	3	4	5	4	81	3	4	4	4	5	5	4	4	4	5
32	5	6	3	5	3	4	4	5	4	5	82	4	4	5	5	5	6	5	4	4	5
33	6	3	4	5	4	3	5	5	4	5	83	4	4	4	5	6	5	4	4	4	4
34	6	4	4	5	4	4	5	6	5	5	84	5	5	5	5	4	3	4	4	4	4
35	3	5	4	5	4	3	6	6	5	5	85	4	5	5	4	5	4	4	4	5	4
36	4	4	5	5	4	4	5	4	5	5	86	5	6	5	3	4	4	3	5	4	5
37	3	4	4	6	5	5	3	3	4	5	87	4	4	5	4	5	2	4	6	5	5
38	4	4	5	5	6	4	4	4	3	4	88	5	4	2	5	5	3	5	4	5	3
39	5	4	5	6	5	3	4	4	4	5	89	4	3	3	5	5	4	5	5	5	4
40	5	5	4	6	4	4	3	5	4	5	90	5	2	4	5	3	5	6	5	4	4
41	6	4	5	3	3	3	4	5	5	6	91	3	3	4	5	4	5	5	5	3	5
42	4	5	5	4	4	4	5	5	6	5	92	4	2	5	6	5	4	5	3	4	5
43	4	5	3	2	4	4	5	6	6	6	93	3	3	4	5	5	4	4	3	5	5
44	5	5	4	3	5	5	6	4	6	4	94	4	4	4	4	3	5	4	4	5	4
45	4	4	3	4	5	4	4	4	5	3	95	5	5	5	4	4	3	4	5	5	5
46	5	4	4	5	6	5	5	5	4	4	96	5	4	3	4	4	4	5	5	5	4
47	4	4	5	5	6	4	5	5	4	3	97	4	4	4	4	4	4	6	6	5	5
48	4	5	5	6	4	5	4	5	5	4	98	5	3	4	4	4	5	6	6	4	5
49	5	5	6	4	4	4	5	4	5	5	99	4	4	5	4	5	4	5	6	4	5
50	6	4	3	5	4	5	5	4	5	5	100	3	3	4	5	5	5	5	3	4	2
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	4	5	6	5	5	4	4	4	4	51	4	5	5	4	4	4	4	5	4	3
2	4	5	4	6	4	4	3	4	4	5	52	4	4	4	3	5	5	5	5	5	4
3	5	6	5	4	4	5	2	4	4	5	53	4	5	4	4	4	6	6	4	3	5
4	5	5	4	4	5	3	2	4	5	6	54	4	4	4	5	5	5	5	5	3	4
5	6	5	5	3	5	4	3	5	6	5	55	4	5	5	5	6	4	5	3	4	3
6	4	5	4	4	4	5	4	5	5	4	56	2	6	4	6	3	5	5	4	4	4
7	5	4	2	3	4	6	5	6	5	3	57	3	5	5	5	4	5	4	3	5	5
8	3	5	3	4	4	5	5	5	4	4	58	4	6	5	3	3	4	4	4	6	5
9	2	5	4	5	5	6	5	4	4	4	59	5	6	4	4	4	4	4	5	4	4
10	3	4	5	6	5	4	4	4	5	4	60	5	5	5	3	5	4	5	6	5	4
11	4	5	5	5	5	3	3	4	5	4	61	5	4	1	4	5	5	5	5	4	5
12	5	5	5	4	4	3	3	4	4	5	62	5	4	2	5	6	5	6	5	4	4
13	6	4	4	4	3	4	4	5	5	5	63	4	4	3	5	4	4	5	4	4	4
14	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5	64	3	5	4	5	4	5	5	5	4	5
15	4	4	3	3	4	5	4	5	5	4	65	4	5	5	5	5	5	5	4	5	5
16	4	5	3	3	4	6	5	5	5	5	66	5	6	5	4	4	5	4	4	4	4
17	3	5	4	4	5	5	6	4	4	4	67	6	6	5	4	5	4	3	5	5	5
18	4	5	5	5	5	5	5	5	4	3	68	6	6	4	4	4	3	3	5	6	4
19	4	5	4	5	6	4	3	3	3	4	69	5	4	2	4	5	4	4	5	5	5
20	5	3	5	5	5	4	4	4	3	3	70	4	4	3	4	5	5	5	6	4	4
21	4	4	5	5	4	3	5	5	4	4	71	4	4	3	4	4	5	6	5	5	4
22	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5	72	3	5	3	4	5	6	4	4	4	5
23	5	5	4	4	3	3	5	5	6	5	73	3	5	4	5	5	6	5	2	5	4
24	3	5	4	4	4	4	5	6	5	5	74	4	5	5	5	5	4	3	3	5	4
25	4	3	3	2	5	5	5	5	4	4	75	4	5	6	4	5	4	4	4	5	5
26	5	4	4	3	4	6	6	5	2	4	76	5	5	5	5	5	3	4	5	5	5
27	3	5	5	4	5	5	4	4	3	4	77	6	5	3	5	2	4	5	6	6	6
28	4	4	6	5	5	5	5	2	4	2	78	5	4	4	5	3	5	5	6	5	4
29	3	5	5	5	5	4	4	3	5	3	79	4	5	4	4	4	6	5	5	5	4
30	4	6	6	5	4	5	3	4	5	4	80	4	5	4	4	5	6	5	5	4	5
31	5	5	5	2	4	4	3	4	5	5	81	4	3	5	5	5	4	5	3	4	5
32	4	6	4	3	4	4	4	4	5	6	82	5	4	6	6	6	5	4	4	4	4
33	5	4	4	3	4	4	5	5	5	5	83	3	5	5	5	4	4	4	4	4	5
34	6	3	3	4	5	5	6	6	3	4	84	4	4	6	5	5	3	5	4	4	4
35	4	4	4	4	5	4	5	5	4	4	85	5	5	4	3	3	4	5	3	5	5
36	3	4	5	4	5	4	4	3	5	3	86	5	5	5	2	4	5	4	4	5	5
37	3	4	5	5	5	5	4	4	3	4	87	5	5	5	3	4	3	5	5	5	5
38	4	5	5	5	5	4	4	3	4	5	88	3	5	2	4	4	4	5	5	5	4
39	5	5	6	3	5	4	4	4	5	6	89	4	4	3	3	5	5	6	4	5	3
40	5	5	4	4	4	5	4	5	5	6	90	5	3	4	4	4	5	5	5	3	2
41	6	5	3	4	4	3	5	6	6	6	91	4	4	5	5	5	5	5	5	4	3
42	5	4	4	4	4	4	5	4	4	5	92	5	3	6	6	5	4	5	3	5	3
43	5	4	4	3	5	5	6	5	3	5	93	4	4	5	4	4	5	3	4	4	4
44	4	5	5	4	5	5	5	4	4	3	94	5	5	5	3	3	5	4	5	5	5
45	4	4	4	5	6	5	5	5	4	4	95	6	5	5	3	4	4	4	5	6	5
46	4	4	5	6	6	5	4	4	4	3	96	4	5	3	4	5	5	5	5	6	5
47	4	4	6	4	6	3	4	5	4	3	97	5	4	4	4	4	5	6	5	4	4
48	5	5	5	5	5	4	4	5	5	4	98	4	4	4	5	5	6	6	6	3	3
49	5	4	4	5	4	4	5	4	4	5	99	3	3	4	3	6	5	5	4	4	4
50	5	5	4	4	3	3	4	5	5	5	100	4	4	5	4	4	4	4	3	5	3
9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	5	5	5	3	4	4	4	4	4
2	5	6	5	5	4	3	4	3	5	5
3	6	5	6	5	4	4	3	4	4	5
4	6	5	5	3	4	4	3	5	5	5
5	5	5	3	4	5	5	4	5	5	5
6	4	4	3	4	5	5	5	5	5	4
7	5	5	3	4	5	6	6	5	5	4
8	4	5	4	5	5	6	4	5	3	5
9	3	5	5	5	4	5	5	3	3	4
10	4	5	6	5	4	4	4	4	4	4
11	4	6	6	5	5	4	4	5	4	5
12	5	5	5	4	5	4	4	2	5	5
13	6	5	4	4	3	4	5	3	6	4
14	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
15	4	3	3	3	5	5	5	5	6	4
16	3	3	4	4	4	5	5	4	4	5
17	3	4	5	5	5	5	4	3	4	5
18	4	4	4	6	5	5	5	4	5	4
19	4	5	5	4	4	5	3	3	4	5
20	5	4	6	5	5	4	4	3	4	4
21	5	5	5	5	4	4	5	4	5	5
22	5	5	4	3	4	5	5	5	6	5
23	4	4	4	4	4	4	6	6	6	5
24	4	4	3	5	5	5	6	5	5	5
25	4	3	4	3	6	6	5	4	4	4
26	5	4	3	4	5	4	5	4	3	3
27	4	5	4	5	5	5	4	4	4	4
28	5	4	5	6	4	4	4	3	4	3
29	4	5	5	5	4	4	4	4	5	4
30	5	6	5	4	4	4	4	4	5	5
31	5	4	4	3	4	4	4	5	5	5
32	4	5	4	3	4	5	5	4	6	5
33	4	4	4	3	5	5	5	5	5	4
34	4	4	2	4	5	5	5	5	4	3
35	4	4	3	4	6	5	5	5	4	3
36	4	4	4	5	5	5	4	4	4	3
37	4	5	5	5	5	5	4	3	3	4
38	5	6	6	3	5	3	4	4	4	5
39	6	5	5	4	5	4	5	3	5	6
40	5	5	3	3	3	3	5	4	4	5
41	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5
42	3	4	3	4	4	5	5	5	4	4
43	4	4	4	4	5	6	5	5	4	4
44	4	3	5	5	5	5	5	2	4	4
45	4	4	5	6	6	5	5	2	4	5
46	5	5	6	4	5	4	4	3	3	4
47	5	5	6	5	4	4	4	4	4	4
48	5	5	4	4	4	4	1	5	4	5
49	6	5	5	4	5	4	2	5	5	6
50	4	5	4	5	3	4	3	6	4	4
51	5	5	4	4	4	5	4	5	5	4
52	5	4	4	4	5	6	5	3	4	4
53	3	5	4	5	4	5	5	3	4	4
54	3	5	5	5	5	4	5	4	4	5
55	4	5	6	4	5	3	5	4	5	2
56	3	6	5	5	4	4	2	4	5	3
57	4	5	6	5	3	5	3	4	5	4
58	5	5	4	4	4	4	4	5	5	5
59	4	5	5	3	4	5	5	5	5	5
60	3	4	5	4	5	5	6	4	5	3
61	4	5	2	5	5	5	6	4	5	3
62	4	4	3	4	6	5	3	5	4	4
63	5	4	4	5	4	4	4	5	5	3
64	4	5	5	6	5	5	3	4	2	4
65	5	6	5	4	4	4	4	4	3	5
66	6	6	5	4	5	4	4	4	4	5
67	5	4	4	4	4	4	4	5	5	5
68	4	5	5	4	4	4	4	5	6	4
69	4	3	3	5	5	4	5	5	3	4
70	4	4	4	5	6	5	4	5	3	5
71	3	4	3	5	5	5	5	3	4	4
72	4	5	4	5	5	4	4	3	3	5
73	4	6	5	5	5	5	4	2	4	5
74	5	6	6	5	5	5	4	3	5	5
75	5	5	5	5	5	4	2	4	5	5
76	4	5	4	5	5	4	3	3	6	4
77	5	4	4	5	3	3	4	4	4	5
78	5	4	4	5	4	4	5	5	4	5
79	4	4	4	4	5	5	5	4	5	5
80	4	4	5	5	5	5	4	4	4	5
81	4	4	6	6	6	5	4	3	4	5
82	5	5	5	5	5	4	5	4	5	3
83	4	6	6	5	5	4	3	4	4	4
84	5	5	5	5	4	4	4	3	5	5
85	5	4	3	4	3	4	5	4	5	5
86	5	4	4	3	4	5	5	5	5	6
87	4	4	4	3	4	4	4	4	6	4
88	4	5	3	4	5	5	5	5	5	4
89	4	4	4	3	6	6	4	4	5	2
90	5	4	4	4	5	5	5	5	4	3
91	5	5	5	5	5	4	4	5	3	2
92	5	4	5	5	5	2	5	4	4	3
93	5	5	4	5	4	3	4	4	5	4
94	6	4	4	4	4	4	5	5	5	4
95	5	5	5	4	5	5	5	5	6	4
96	4	4	4	4	5	5	6	5	4	5
97	4	2	4	4	5	6	5	4	4	3
98	4	3	3	5	6	6	5	4	3	4
99	4	4	4	4	6	5	5	4	4	3
100	4	5	5	5	5	3	5	3	5	4

11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	5	5	5	4	3	4	4	3	5
2	5	6	6	5	3	3	4	4	4	6
3	5	5	5	4	4	3	4	5	5	5
4	6	3	5	4	3	4	4	5	5	6
5	4	4	3	5	4	4	5	5	5	4
6	5	5	3	4	5	5	5	5	6	5
7	4	4	3	5	5	5	4	5	4	4
8	5	5	4	6	5	4	5	4	4	4
9	4	5	5	5	5	4	5	4	4	5
10	5	5	5	5	4	4	4	5	4	4
11	5	6	5	5	5	4	5	4	5	5
12	6	4	4	4	4	4	5	3	5	6
13	5	4	4	5	4	4	5	4	6	5
14	4	3	4	5	5	4	5	5	5	4
15	5	4	4	4	6	5	5	6	5	5
16	3	3	5	5	5	5	4	4	4	4
17	4	4	6	4	6	5	5	4	4	5
18	3	4	5	5	5	5	4	3	5	5
19	3	4	6	5	5	5	4	4	5	6
20	4	5	5	3	5	4	4	3	5	5
21	5	5	4	3	4	5	5	4	6	6
22	5	4	4	4	4	3	5	5	6	5
23	4	4	5	4	4	4	5	5	5	3
24	4	4	3	5	5	5	5	5	5	4
25	4	4	4	4	5	5	4	5	5	3
26	4	5	4	5	5	5	4	4	4	4
27	4	4	5	6	5	4	4	4	4	5
28	5	5	5	4	5	3	4	3	4	4
29	5	5	4	4	4	4	4	4	5	5
30	5	4	5	4	4	4	5	5	6	6
31	5	4	4	3	4	4	4	6	6	4
32	3	5	4	3	5	5	5	4	4	5
33	4	5	4	4	6	5	5	5	4	4
34	5	5	3	3	6	6	5	5	5	4
35	4	5	4	4	6	5	4	5	5	4
36	5	5	5	5	6	4	5	4	3	4
37	5	6	5	5	5	4	5	4	4	5
38	5	5	4	4	4	4	5	4	5	6
39	6	5	4	4	3	5	5	4	6	5
40	4	5	4	4	4	4	6	5	5	6
41	5	4	4	5	3	5	4	5	5	5
42	4	4	4	4	4	6	5	6	5	5
43	4	4	5	5	5	6	5	5	4	4
44	4	4	5	5	6	4	5	3	4	4
45	4	5	6	6	4	5	5	3	4	5
46	4	5	5	5	4	4	4	4	4	5
47	5	5	5	4	4	4	4	4	5	5
48	5	5	4	4	4	4	2	4	5	5
49	6	5	4	4	4	4	3	5	6	6
50	4	4	5	5	4	4	4	5	5	4
51	4	4	4	5	5	5	5	5	5	3
52	4	4	5	5	6	5	5	4	5	4
53	3	5	3	6	5	5	4	3	4	4
54	4	5	4	5	5	3	5	4	5	4
55	3	6	5	5	5	4	4	4	5	3
56	4	5	3	5	3	5	3	5	5	4
57	5	3	3	5	4	4	4	5	5	5
58	5	4	4	4	2	5	5	6	6	5
59	3	5	3	4	3	6	6	5	5	4
60	4	2	4	5	4	6	5	5	5	4
61	4	3	3	4	5	6	5	4	5	4
62	4	4	4	4	5	4	4	5	5	3
63	4	5	5	5	5	5	3	5	4	4
64	5	6	4	5	4	4	2	5	3	5
65	6	4	4	5	5	3	3	4	4	6
66	5	5	5	5	3	4	4	5	5	6
67	4	5	4	5	3	3	5	6	6	5
68	5	3	5	5	4	4	5	4	6	4
69	4	4	4	5	4	5	4	4	4	4
70	5	5	4	5	5	5	5	4	4	3
71	4	3	4	6	6	4	4	4	4	4
72	5	4	5	6	4	5	3	2	4	5
73	5	5	5	4	3	4	4	3	5	6
74	6	4	6	5	3	5	3	4	5	5
75	5	5	4	2	4	4	3	5	6	6
76	5	4	5	3	5	5	4	4	6	5
77	5	4	4	2	4	4	4	5	5	5
78	5	4	4	3	5	5	5	5	4	4
79	5	4	4	4	6	5	4	5	4	2
80	3	4	4	5	5	6	4	3	3	3
81	4	5	5	4	4	4	5	4	4	4
82	4	5	4	4	4	4	4	4	5	4
83	4	5	4	3	4	3	4	4	5	5
84	5	4	4	4	5	4	3	4	6	5
85	4	4	3	3	3	5	4	5	5	4
86	4	4	4	4	4	4	5	6	4	4
87	3	3	5	4	5	5	5	5	3	3
88	3	4	4	5	5	6	5	4	4	3
89	4	4	5	4	5	5	4	3	3	3
90	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4
91	5	5	5	4	5	3	3	5	4	3
92	6	5	5	5	6	3	4	4	5	4
93	5	5	4	4	4	3	5	5	5	4
94	5	5	5	5	4	4	5	5	5	5
95	4	4	5	4	5	5	5	5	4	4
96	4	5	4	4	5	4	5	5	5	4
97	5	3	5	5	6	5	5	4	3	4
98	5	4	3	4	5	4	5	5	4	5
99	5	5	4	5	5	4	4	3	5	4
100	5	6	5	5	3	4	5	3	4	5

Tabelle für die Zahlen bis 12000, w

	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	1	2	1064	3059	5642	8512	3	359	731	1073	1464	1880	2287	2726	3060	3466	3871	4257
	8	9	1072	3087	5824	8576	10	368	736	1080	1466	1890	2288	2729	3067	3472	3888	4268
	27	16	1125	3197	5833	8587	17	371	738	1088	1468	1907	2304	2736	3071	3474	3895	4285
	64	28	1216	3256	5840	8729	24	375	745	1091	1483	1917	2323	2746	3085	3481	3914	4291
	125	35	1241	3376	5859	9000	29	378	750	1099	1485	1945	2325	2753	3086	3483	3926	4313
	216	54	1332	3383	5896	9009	36	397	755	1126	1513	1952	2330	2755	3088	3501	3933	4320
	343	65	1339	3402	5913	9056	43	405	757	1128	1520	1968	2332	2756	3095	3503	3934	4339
	512	72	1343	3439	5957	9207	55	408	762	1133	1522	1970	2339	2760	3114	3508	3951	4346
	729	91	1358	3456	6048	9262	62	415	764	1136	1536	1971	2343	2772	3123	3520	3952	4376
10	1000	126	1395	3473	6119	9269	66	433	775	1149	1539	1978	2349	2773	3142	3527	3960	4383
	1331	128	1456	3500	6175	9288	73	434	783	1152	1548	2001	2355	2779	3151	3529	3968	4390
	1728	133	1458	3528	6244	9325	80	440	792	1161	1555	2008	2358	2787	3174	3536	3985	4395
	2197	152	1512	3591	6293	9331	81	459	794	1189	1559	2017	2365	2789	3176	3537	3989	4399
	2744	189	1547	3718	6344	9386	92	466	801	1197	1574	2024	2386	2792	3184	3540	3993	4402
	3375	217	1674	3744	6561	9477	99	469	811	1198	1576	2027	2395	2798	3186	3555	4012	4418
	4096	224	1729	3887	6641	9603	118	471	820	1217	1581	2059	2403	2800	3198	3564	4040	4421
	4913	243	1736	3925	6750	9604	127	476	853	1224	1583	2061	2414	2809	3205	3571	4050	4437
	5832	250	1755	4075	6832	9728	129	495	856	1240	1584	2064	2421	2816	3212	3581	4059	4440
	6859	280	1792	4097	6840	9773	134	496	857	1242	1611	2068	2440	2834	3221	3592	4061	4447
20	8000	341	1843	4104	6860	9826	136	514	862	1243	1637	2069	2447	2835	3224	3598	4076	4456
	9261	344	1853	4123	6867	9928	141	521	863	1249	1672	2072	2456	2843	3240	3599	4083	4458
	10648	351	1944	4160	6886	9990	153	528	881	1250	1675	2079	2458	2853	3257	3618	4087	4466
		370	2000	4221	6923	10197	155	532	882	1268	1682	2087	2465	2870	3261	3625	4098	4473
		407	2060	4312	6984	10234	160	540	902	1280	1686	2098	2477	2872	3264	3653	4102	4480
		432	2071	4375	7075	10261	179	547	918	1288	1701	2124	2484	2877	3269	3655	4103	4499
		468	2198	4394	7110	10592	190	557	919	1305	1730	2125	2512	2878	3275	3662	4105	4500
		513	2205	4439	7163	10649	192	560	944	1333	1737	2135	2521	2883	3283	3672	4112	4503
		520	2224	4472	7202	10656	197	566	946	1340	1738	2160	2538	2896	3303	3689	4124	4519
		539	2240	4608	7371	10675	218	567	953	1341	1744	2185	2541	2925	3320	3709	4131	4528
30		559	2261	4706	7471	10712	225	577	972	1344	1753	2186	2547	2927	3322	3716	4139	4536
		576	2322	4825	7560	10744	232	584	979	1347	1756	2187	2548	2933	3331	3719	4141	4564
		637	2331	4914	7588	10745	244	586	980	1351	1763	2196	2567	2934	3377	3726	4150	4587
		686	2413	4921	7657	10773	251	593	1002	1359	1782	2199	2572	2944	3381	3728	4161	4591
		728	2457	4940	7859	10864	253	603	1009	1366	1793	2206	2582	2953	3384	3745	4168	4597
		730	2540	4941	8001	10955	258	623	1016	1367	1799	2213	2583	2961	3391	3752	4185	4609
		737	2662	4977	8008	10989	270	638	1025	1370	1800	2216	2604	2968	3403	3768	4187	4610
		756	2709	5038	8027	10991	277	640	1028	1385	1801	2225	2629	2969	3410	3771	4197	4616
		793	2728	5096	8029	11160	281	645	1029	1396	1819	2232	2663	2987	3413	3782	4200	4635
		854	2745	5103	8064	11375	288	648	1032	1403	1844	2241	2665	2990	3429	3788	4202	4654
40		855	2752	5129	8125	11377	307	664	1035	1407	1851	2248	2670	2994	3430	3799	4222	4655
		945	2771	5256	8190	11458	314	684	1051	1415	1854	2251	2673	3000	3438	3807	4224	4672
		1001	2808	5425	8192	11648	342	687	1054	1422	1855	2262	2674	3005	3440	3808	4229	4688
		1008	2869	5427	8216	11664	345	694	1065	1432	1856	2267	2689	3024	3447	3816	4230	4707
		1024	2926	5488	8288	11772	349	701	1070	1457	1861	2269	2710	3051	3457	3843	4248	4714
45		1027	2960	5572	8343	11979	352	713	1071	1459	1870	2276	2717	3052	3464	3869	4256	4718
	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Summen von 2 oder 3 Cuben sind.

3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	
5554	5958	6335	6824	7171	7589	8037	8370	8758	9234	9584	9991	10387	10809	11207	11663	
5573	5960	6336	6831	7174	7596	8054	8371	8792	9241	9587	9992	10389	10826	11224	11665	
5580	5965	6345	6833	7175	7615	8056	8372	8793	9263	9602	9998	10401	10837	11234	11672	
5599	5977	6352	6841	7183	7622	8065	8386	8800	9270	9605	10000	10413	10846	11253	11674	
5608	5984	6357	6848	7190	7624	8072	8406	8802	9271	9611	10009	10440	10865	11256	11675	
5613	5985	6369	6856	7200	7641	8075	8407	8803	9272	9612	10016	10450	10869	11257	11684	
5615	6000	6371	6857	7203	7652	8081	8408	8838	9277	9619	10017	10457	10870	11259	11691	
5636	6021	6391	6861	7210	7658	8091	8413	8854	9289	9630	10042	10477	10872	11261	11712	
5641	6037	6408	6868	7216	7665	8093	8432	8855	9296	9631	10053	10485	10891	11285	11718	
5643	6038	6418	6875	7227	7675	8100	8441	8859	9305	9667	10054	10502	10898	11298	11720	10
5650	6040	6425	6887	7229	7684	8110	8468	8863	9307	9668	10056	10538	10926	11320	11728	
5653	6049	6427	6894	7235	7685	8126	8471	8891	9315	9674	10060	10540	10928	11321	11744	
5669	6056	6434	6896	7244	7687	8128	8478	8919	9316	9693	10071	10555	10934	11331	11745	
5670	6075	6460	6903	7262	7713	8133	8490	8921	9326	9719	10115	10577	10935	11332	11753	
5697	6082	6462	6904	7266	7714	8152	8494	8930	9332	9729	10116	10593	10936	11334	11773	
5704	6084	6469	6913	7288	7721	8154	8504	8945	9333	9736	10125	10600	10956	11376	11780	
5706	6096	6488	6924	7290	7750	8163	8513	8947	9339	9738	10144	10603	10960	11378	11789	
5725	6103	6509	6931	7291	7769	8169	8520	8988	9343	9755	10169	10604	10961	11383	11799	
5767	6112	6518	6950	7293	7776	8171	8533	9001	9352	9757	10198	10619	10963	11385	11800	
5768	6120	6553	6957	7300	7782	8189	8535	9008	9358	9774	10205	10650	10982	11402	11801	20
5770	6122	6560	6965	7326	7804	8191	8539	9010	9360	9781	10206	10657	10990	11404	11836	
5788	6127	6562	6966	7327	7814	8193	8541	9017	9385	9785	10207	10662	10992	11439	11864	
5803	6129	6569	6973	7344	7832	8198	8559	9024	9387	9792	10215	10664	10997	11441	11880	
5825	6146	6572	6985	7352	7839	8200	8560	9027	9389	9800	10224	10676	10999	11456	11887	
5831	6154	6587	6987	7370	7840	8202	8568	9029	9394	9819	10226	10683	11016	11459	11889	
5834	6156	6588	6992	7372	7847	8217	8577	9036	9395	9820	10235	10702	11018	11466	11897	
5841	6167	6591	7011	7379	6860	8219	8584	9037	9399	9827	10240	10709	11019	11467	11923	
5848	6173	6625	7022	7398	7867	8224	8588	9057	9413	9834	10242	10713	11032	11473	11925	
5851	6176	6631	7048	7418	7873	8232	8595	9064	9423	9837	10262	10717	11053	11474	11951	
5858	6183	6636	7056	7435	7883	8243	8603	9072	9450	9843	10269	10719	11055	11485	11955	30
5860	6200	6642	7073	7450	7886	8245	8614	9073	9456	9853	10271	10720	11059	11500	11962	
5867	6202	6649	7076	7453	7892	8250	8631	9083	9458	9854	10285	10728	11080	11501	11970	
5886	6217	6668	7083	7472	7903	8254	8637	9088	9478	9890	10288	10737	11087	11502	11980	
5888	6239	6669	7093	7479	7923	8256	8640	9099	9485	9898	10298	10739	11088	11503	11987	
5897	6245	6686	7102	7496	7931	8280	8651	9120	9494	9907	10304	10746	11104	11522	11988	
5904	6252	6687	7109	7498	7972	8289	8657	9125	9504	9918	10315	10752	11114	11528	11989	
5914	6256	6705	7111	7506	7983	8296	8686	9134	9511	9920	10322	10753	11116	11554	11991	
5915	6264	6751	7118	7535	7984	8315	8701	9181	9512	9929	10325	10771	11157	11565		
5921	6271	6756	7119	7545	8002	8316	8702	9190	9521	9936	10331	10772	11161	11567		
5923	6272	6758	7137	7552	8009	8317	8704	9192	9523	9944	10332	10774	11168	11583		40
5937	6294	6766	7138	7561	8016	8341	8712	9199	9541	9946	10333	10776	11171	11591		
5939	6300	6777	7139	7568	8021	8344	8728	9208	9547	9947	10338	10781	11187	11592		
5940	6301	6805	7153	7569	8028	8351	8730	9215	9550	9951	10340	10784	11197	11593		
5941	6308	6814	7155	7575	8030	8352	8737	9216	9568	9955	10359	10800	11205	11649		
5949	6320	6819	7164	7587	8035	8369	8756	9225	9576	9989	10386	10808	11206	11656		45
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	

6.

Theorie der Anziehung eines Ellipsoïds.

(Von *E. Heine*, Professor zu Bonn.)

Die Untersuchungen, welche ich hier mitzutheilen beabsichtige, nehmen denselben Gegenstand wieder auf, über welchen ich bereits im Jahre 1844 eine Abhandlung in diesem Journal, Band 29 veröffentlichte. Es wurde dort das Potential einer ellipsoïdischen Schale mit beliebiger Massenvertheilung, *aus seinem Werthe für sämmtliche Puncte der innern Oberfläche*, für alle Puncte des innern, hohlen Raumes berechnet, während ich damals noch nicht im Stande war, die entsprechende Aufgabe für das Potential in Bezug auf äufsere Puncte zu einer ähnlichen Lösung zu führen. Ich mufste mich damit begnügen, das Resultat für den letzten Fall vermittelst der von *Lamé* geschaffenen E darzustellen, denen ich noch eine neue Functionengattung F hinzufügte, die aus der E definirt wurde. (Man vergl. dort S. 194.)

Durch die Methode, welche ich hier in Kürze entwickeln werde, um die weitere Ausführung späteren Nachträgen zu überlassen, lassen sich beide Aufgaben mit gleicher Leichtigkeit behandeln, indem ich das Potential einer durch zwei confocale Ellipsoïden begrenzten Schale, *wenn die Art der Massenvertheilung in dieser Schale gegeben ist,* für alle Puncte, die ihr nicht angehören, durch ganz ähnliche Mittel finde, die Puncte mögen innerhalb des hohlen Raumes, oder über die äufsere Begrenzungsfläche hinaus liegen. Hieraus ergiebt sich die Anziehung einer solchen Schale auf irgend welche Puncte, und zwar, wie aus dem Endresultate hervorgeht, ohne dafs es nöthig wäre, jene Gleichungen höherer Grade zu bilden und aufzulösen, die *Lamé* in seiner wichtigen Abhandlung im IV. Bande des *Liouville*schen Journals definirt hat.

Die Schale, welche wir betrachten, sei durch zwei confocale Ellipsoïden begrenzt, von denen das gröfsere die Achsen ϱ_0, $\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}$, $\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}$, das kleinere die ϱ_1, $\sqrt{(\varrho_1^2-b^2)}$, $\sqrt{(\varrho_1^2-c^2)}$ haben mag. Ferner bedeuten x, y, z und x_1, y_1, z_1 die rechtwinklichen Coordinaten zweier Puncte, bezogen auf die Hauptachsen der Ellipsoïden. Es kommt dann unsere Aufgabe darauf hinaus, eine geeignete Entwickelung des Ausdrucks

$$(A.)\quad R=\frac{1}{\sqrt{((x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2)}}$$

in eine Reihe zu finden. Wir setzen dazu

$$x = r\cos\theta \qquad x_1 = r_1\cos\theta_1$$
$$y = \sqrt{(r^2-b^2)}\sin\theta\cos\varphi \qquad y_1 = \sqrt{(r^2-b^2)}\sin\theta_1\sin\varphi_1$$
$$z = \sqrt{(r^2-c^2)}\sin\theta\sin\varphi \qquad z_1 = \sqrt{(r_1^2-c^2)}\sin\theta_1\sin\varphi_1'$$

und denken uns $r > r_1$. Der Ausdruck R, welcher sich bekanntlich in das Integral

$$R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\eta}{(x+iy\cos\eta+iz\sin\eta)-(x_1+iy_1\cos\eta+iz_1\sin\eta)}$$

verwandeln läfst (wenn wir $i=\sqrt{-1}$ setzen), geht, wenn unter dem Integralzeichen Zähler und Nenner zugleich durch $\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}$ dividirt werden, in

$$(B.)\qquad R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\frac{d\eta}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}}{\alpha-\beta}$$

über, wenn α und β folgende Ausdrücke sind:

$$\alpha = \frac{r}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}\cdot\cos\theta+\frac{i\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}\cdot\sin\theta\cos\varphi$$
$$+\frac{i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}\cdot\sin\theta\sin\varphi$$
$$\beta = \frac{r_1}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}\cdot\cos\theta_1+\frac{i\sqrt{(r_1^2-b^2)}\cos\eta}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}\cdot\sin\theta_1\cos\varphi_1$$
$$+\frac{i\sqrt{(r_1^2-c^2)}\sin\eta}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}\cdot\sin\theta_1\sin\varphi_1.$$

Den Bruch $\frac{1}{\alpha-\beta}$ entwickeln wir in eine Reihe, welche nach jenen bekannten Functionen fortschreitet, die wir durch die Buchstaben P bezeichnen, indem wir als Definition derselben die Gleichung aufstellen:

$$P_n(\beta) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left(\beta^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\beta^{n-2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2-n(2n-1)(2n-3)}\beta^{n-4}-\text{etc.}\right).$$

Es läfst sich leicht zeigen, dafs der Coëfficient von $P_n(\beta)$ bei dieser Art der Reihenentwickelung ein Integral der Differentialgleichung

$$(1-\alpha^2)\frac{\partial^2 Q}{\partial\alpha^2}-2\alpha\frac{\partial Q}{\partial\alpha}+n(n+1)Q = 0$$

ist: derselben, welcher auch $P_n(\alpha)$ genügt. Wir nennen das hierher ge-

Die Werthe von $P_n(\beta)$ und $Q_n(\alpha)$ werden endlich in die Form, in welcher ich sie unten gebe, gebracht, indem sowohl

$$\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{(x^2-1)}\cos(\psi-\chi))^n\cos m(\psi-\chi)\,d\chi$$

als auch

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{m(t+i\psi)}\,dt}{(y+\sqrt{(y^2-1)}\frac{1}{2}(e^{t+i\psi}+e^{-t-i\psi}))^{n+1}}$$

(wenn m und n ganze Zahlen bedeuten und $m<n+1$) von ψ unabhängig ist, also die Integrale resp. gleich

$$\int_0^{2\pi}(x+\sqrt{(x^2-1)}\cos\chi)^n\,d\chi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{mt}\,dt}{(y+\sqrt{(y^2-1)}\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}))^{n+1}}$$

werden. Es nehmen $P_n(\beta)$ und $Q_n(\alpha)$ die Gestalt an:

$$P_n(\beta)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\,\frac{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)^{-\frac{1}{2}n}}{\pi}$$

$$\times\sum_{m=0}^{m=n}i^m P_{n,m}(\cos\theta_1)\int_0^{2\pi}(r_1+\sqrt{(r_1^2-b^2)}\cos\chi\cos\eta+\sqrt{(r_1^2-c^2)}\sin\chi\sin\eta)^n\cos m(\chi-\varphi_1)\,dx$$

$$Q_n(\alpha)=\tfrac{1}{2}(2n+1)(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)^{\frac{1}{2}(n+1)}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{1.2\ldots.n}{1.2\ldots(n-p)}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2\ldots\ldots(n+p)}i^{-p}P_{n,p}(\cos\theta)$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{p(t+i\varphi)}+e^{-p(t+i\varphi)}}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta\,.\,\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta\,\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^{n+1}}\,dt+S.$$

Die Summen sind so zu nehmen, dafs für $m=0$ und $n=0$ die Hälften der rechten Seiten gesetzt werden; ferner ist

$$(1.)\qquad P_{n,p}(\cos\theta)$$

$$=\sin^p\theta\Big(\cos^{n-p}\theta-\frac{(n-p)(n-p-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-p-2}\theta+\frac{(n-p)\ldots(n-p-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\cos^{n-p-4}\theta-\cdots\Big)$$

und S ein solcher Ausdruck, dafs

$$\int_0^{2\pi}P_n(\beta)\,S\,\frac{d\eta}{\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}$$

verschwindet.

Stellen wir (*A.*), (*B.*), (*C.*) mit diesen Gleichungen zusammen, so erhalten wir folgendes Resultat der bisherigen Untersuchungen.

Es läfst sich R als eine unendliche Reihe

$$(2.)\qquad R=Z_0+Z_1+\cdots+Z_n+\cdots$$

darstellen, deren $n$tes Glied den Ausdruck

$$Z_n = \frac{2n+1}{4\pi^2} \sum_{m=0}^{m=n} \sum_{p=0}^{p=n} k_{n,p} i^{m-p} P_{n,m}(\cos\theta_1) P_{n,p}(\cos\theta) \times \int_{-\infty}^{\infty} (e^{p(t+i\varphi)} + e^{-p(t+i\varphi)})\, dt$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\chi-\varphi_1)\, d\chi \int_0^{2\pi} \frac{(r_1 + \sqrt{(r_1^2-b^2)}\cos\eta\cos\chi + \sqrt{(r_1^2-c^2)}\sin\eta\sin\chi)^n\, d\eta}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta.\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) + i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^{n+1}}$$

hat, worin die Summen nach m und p wie oben zu nehmen sind und zur Abkürzung

$$(3.)\qquad k_{n,p} = \frac{(1.3.5\ldots(2n-1))^2}{(1.2\ldots(n-p))(1.2\ldots(n+p))}$$

gesetzt ist.

Die Integration nach η läfst sich ausführen, indem wir die Zähler und die (-1)te Potenz des Nenners im Integral nach η, nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von η entwickeln. Wir führen dazu die Bezeichnungen *)

$$(4.)\quad \begin{cases} U_q^m(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} (r + \sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta\cos\chi \\ \qquad\qquad + \sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta\sin\chi)^n \cos m\chi \cos q\eta\, d\eta \\ u_q^m(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\chi \int_0^{2\pi} (r + \sqrt{(r^2-b^2)}\cos\chi \\ \qquad\qquad + \sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta\sin\chi)^n \sin m\chi \sin q\eta\, d\eta \\ W_q^p(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(e^{pt}+e^{-pt})\cos q\eta\, d\eta}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta.\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^{n+1}} \\ w_q^p(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(e^{pt}-e^{-pt})\sin q\eta\, d\eta}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta.\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^{n+1}} \end{cases}$$

ein und finden dann

$$(5.)\quad Z_n = \frac{2n+1}{2\pi} \sum_{m=0}^{m=n} \sum_{p=0}^{p=n} \sum_{q=0}^{q=n} k_{n,p} i^{m-p} P_{n,m}(\cos\theta_1) P_{n,p}(\cos\theta)$$
$$\times (U_q^m(r_1) W_q^p(r) \cos m\varphi_1 \cos p\varphi + u_q^m(r_1) w_q^p(r) \sin m\varphi_1 \sin p\varphi).$$

Für $m=0$, $p=0$, $q=0$ sind die Hälften der betreffenden Glieder zu setzen, so dafs also z. B. von dem Gliede, in welchem m und p zugleich Null sind, nicht aber q, der vierte Theil genommen werden mufs. *Ein Glied* wird hierbei das ganze Aggregat genannt, welches unter dem dreifachen Summenzeichen steht.

* * *

*) Die Gröfsen U, u, W, w sind zwar von n abhängig; es schien jedoch nicht nothwendig, diesen Buchstaben in die Bezeichnung aufzunehmen, indem wir jedes Z_n für sich betrachten, also auch nur von den Werthen der U und für ein bestimmtes n zu sprechen haben.

Die Zusammenstellung der Gleichungen (1.) bis (5.) liefert die Entwickelung von R, aus der sich die Lösung unserer Aufgaben ohne weitere Schwierigkeit ergiebt. Ehe wir zu dieser schreiten, wollen wir auf folgende Puncte aufmerksam machen:

I. Wenn zwei von den Gröfsen r, $\sqrt{(r^2-b^2)}$, $\sqrt{(r^2-b^2)}$ einander gleich werden, so sollen diese gleichen Linien $\sqrt{(r^2-b^2)}$ und $\sqrt{(r^2-c^2)}$ sein; und zwar ist b reell oder imaginär, je nachdem jede der gleichen Längen kleiner ist, oder gröfser als die dritte. Man findet dann ohne Mühe die Entwickelung, welche *Neumann* im 37ten Bande dieses Journals gegeben hat, indem die dreifache Summe im Werthe von Z_n für diesen Fall in eine einfache übergeht. Es verschwinden nämlich für $b=c$ sämmtliche U, u, W, w, in denen der obere Index nicht gleich dem untern ist, und die genannten Functionen hängen dann nur von einfachen Integralen von der Form

$$\int_0^{2\pi}(x+\cos\chi\sqrt{(x^2-1)})^n\cos m\chi\, d\chi$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{mt}\,dt}{(y+\sqrt{(\eta^2-1)}\,\frac{1}{2}(e^t+e^{-t}))^{n+1}}$$

ab, die sich nur durch constante, d. h. von x und y unabhängige Factoren, resp. von $P_{n,m}(x)$ und $Q_{n,m}(y)$ unterscheiden, wo wir unter $Q_{n,m}(y)$ die unendliche Reihe*) verstehen:

$$Q_{n,m}(y) = (1-y^2)^{\frac{1}{2}m}\Big(y^{-n-m-1}+\frac{(n+m+1)(n+m+2)}{2(2n+3)}y^{-n-m-3} \\ +\frac{(n+m+1)\dots(n+m+4)}{2.4(2n+3)(2n+5)}y^{-n-m-5}+\dots\Big).$$

II. Es ist offenbar Z_n reell, indem U und u, W und w, verschwinden, wenn nicht die obern Indices mit den untern zu gleicher Zeit grade oder ungrade sind. Es ist demnach $m-p$ eine gerade Zahl und i^{m-p} reell. Aus demselben Grunde umfafst auch die dreifache Summation in (5.) nicht $(n+1)^3$,

---

*) Wenn ich in einer früheren Abhandlung Gewicht darauf legte, dafs $Q_{0,0}$ ein einfacher logarithmischer Ausdruck sei, so geschah es, weil dieser Werth daselbst in einem Beispiele auftrat. (Dieses Journal f. M. Band 26, S. 198.) Die Formeln zur Reduction eines jeden $Q_{n,m}$ durch eine *endliche Anzahl* von Operationen auf $Q_{0,0}$ und $Q_{0,1}$, d. h. auf eine logarithmische und eine algebraische Function sind dort in d. Anm. 4. gegeben. Bei den Aufgaben, die daselbst vorliegen, schien die Darstellung der Q durch eine elegante Reihe — die hypergeometrische — nicht ungeeignet, indem mir eine Formel wie die *Neumann*sche nicht bekannt war, die mit der Einfachheit den Vortheil vereinigte, sogleich als logarithmischer und algebraischer Ausdruck von endlicher Gliederzahl aufzutreten.

sondern $(\frac{1}{2}(n+1))^3+(\frac{1}{2}n)^3$ oder $2(\frac{1}{2}(n+1))^3$ Werthe, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

III. Man wird leicht einsehen, dafs die Integrale $U(r)$ und $u(r)$ ausgeführt werden können, und ganze Functionen von r, $\sqrt{(r^2-b^2)}$ und $\sqrt{(r^2-c^2)}$ werden. Wenn gleich die W und w nicht so einfache Ausdrücke sind, so läfst sich doch zeigen, dafs dieselben sich auf elliptische Functionen durch eine endliche Anzahl von Operationen zurückführen lassen; und zwar erhalten jene Integrale die Grenzen r und ∞. Die W und w sind lineare Functionen dieser elliptischen Integrale. Wir wollen dies Resultat für die W nachweisen, und zwar, um bestimmter in Kürze das Wesentliche ausdrücken zu können, für die W mit geradem Index p, indem die übrigen Fälle sich auf ähnliche Art behandeln lassen werden.

Es können diese offenbar aus Integralen von der Form

$$(D.)\quad \int_0^{2\pi}\cos^{2g}\eta\, d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{(h+1)t}\,dt}{(\alpha+2\beta e^t+\gamma e^{2t})^{n+1}}$$

zusammengesetzt werden, wenn g und h ganze Zahlen bezeichnen, von denen die letzteren zwischen 0 und $2n$, mit Einschlufs der Grenzen liegen, wenn ferner α, β, γ durch folgende Gleichungen gegeben werden:

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta - i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta\\ \beta &= r\\ \gamma &= \sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta + i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\end{aligned}$$

Jedes W_p besteht aus einer endlichen Anzahl solcher Integrale, die noch mit gewissen Zahlen multiplicirt sind. In dem Integrale nach t machen wir $e^t=z$, und setzen

$$I_{n,h} = \int_0^{\infty}\frac{z^h\partial z}{(\alpha+2\beta+\gamma z^2)^{n+1}}.$$

Bekannte Reductionsformeln zeigen dann, dafs $I_{n,h}$ aus $I_{0,0}$ durch eine Gleichung von der Form

$$I_{n,h} = A + BI_{0,0}$$

berechnet werden kann, wo A, B gebrochene Functionen vorstellen, deren Zähler ganze Functionen von α, β, γ sind und deren Nenner ein Product zweier Factoren ist, nämlich einer ganzen Potenz von $\alpha\gamma$ und einer ganzen Potenz von $\beta^2-\alpha\gamma$, welches wir k nennen wollen. Der Integral-Ausdruck $(D.)$ zerfällt demnach in die Summe von Integralen:

$$(E.)\quad \int_0^{2\pi}A\cos^{2g}\eta\, d\eta + \int_0^{2\pi}BI_{0,0}\cos^{2g}\eta\, d\eta,$$

von denen das erste leicht ausgeführt werden kann, indem A, also auch $A\cos^{2g}\eta$, eine gebrochene Function von $\cos\eta$ und $\sin\eta$ ist. ($A\cos^{2g}\eta$ ist auch eine gebrochene Function von r, $\sqrt{(r^2-b^2)}$ und $\sqrt{(r^2-c^2)}$.) Die wirkliche Ausführung dieser Integration hat um so weniger Schwierigkeiten, als nach obiger Bemerkung der Nenner von A gleich $(\alpha\gamma)^{\mu}k^{\nu}$ ist, wenn μ und ν ganze Potenzexponenten bezeichnen und $\alpha\gamma$ und k einfache Gröfsen sind, nämlich

$$\begin{aligned}\alpha\gamma &= (r^2-b^2)\cos^2\eta+(r^2-c^2)\sin^2\eta\\ k &= b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta,\end{aligned}$$

so dafs sich die Reductionsformel

$$(F.)\quad \frac{r^2}{((r^2-b^2)\cos^2\eta+(r^2-c^2)\sin^2\eta)^{\mu}(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)^{\nu}}$$
$$=\frac{1}{((r^2-b^2)\cos^2\eta+(r^2-c^2)\sin^2\eta)^{\mu-1}(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)^{\nu}}$$
$$+\frac{1}{((r^2-b^2)\cos^2\eta+(r^2-c^2)\sin^2\eta)^{\mu}(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)^{\nu-1}}$$

benutzen läfst.

Wir wenden uns zum zweiten Theile von (E.), welcher auf elliptische Functionen führt, während der so eben betrachtete Theil keine Transcendente involvirt. Das Integral $I_{0,0}$ läfst sich ausführen und giebt

$$I_{0,0}=\frac{1}{2\sqrt{((b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta))}}\log\frac{r+\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}}{r-\sqrt{(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)}},$$

woraus man durch Differentiation nach r,

$$\frac{\partial I_{0,0}}{\partial r}=-\frac{1}{(r^2-b^2)\cos^2\eta+(r^2-c^2)\sin^2\eta}$$

findet, und somit den Ausdruck, welcher scheinbar complicirter als der frühere logarithmische ist:

$$I_{0,0}=\int_r^{\infty}\frac{\partial s}{(s^2-b^2)\sin^2\eta+(s^2-c^2)\sin^2\eta}.$$

Der vorliegende, B enthaltende Theil ist daher gleich

$$(G.)\quad \int_r^{\infty}\partial s\int_0^{2\pi}\frac{B\cos^{2g}\eta\,d\eta}{(s^2-b^2)\cos^2\eta+(s^2-c^2)\sin^2\eta},$$

wo auch $B\cos^{2g}\eta$ eine ganze Function von $\cos\eta$ und $\sin\eta$ ist, die wir für den Augenblick mit f bezeichnen wollen, dividirt durch das Product $(\alpha\gamma)^{\mu}k^{\nu}$. Indem man

$$\frac{1}{((s^2-b^2)\cos^2\eta+(s^2-c^2)\sin^2\eta)(\alpha\gamma)^{\mu}k^{\nu}}$$

in der Art zerlegt, wie es (*F.*) vorschreibt, zerfällt dieser Bruch in zwei Theile, von denen der eine

$$(H.)\qquad \frac{K}{s^\sigma((s^2-b^2)\cos^2\eta+(s^2-c^2)\sin^2\eta)}$$

ist, der andere eine Summe von Gliedern der Form

$$(I.)\qquad \frac{K}{s^\sigma(p\cos^2\eta+q\sin^2\eta)^\tau}.$$

Es bedeuten σ und τ ganze Zahlen, K, p, q von s unabhängige Gröfsen. Da $\int_r^\infty \frac{\partial s}{s^\sigma} = \frac{1}{(\sigma-1)r^{\sigma-1}}$, so läfst sich in dem Theile, der aus den Gliedern (*I.*) für (*G.*) entsteht, die Integration nach s und η ausführen, und es bleibt nun noch mit dem Integralzeichen der Theil, welcher aus dem Gliede (*H.*) entspringt, behaftet. Es ist derselbe

$$K\int_r^\infty \frac{\partial s}{s^\sigma}\int_0^{2\pi}\frac{f\,d\eta}{(s^2-b^2)\cos^2\eta+(s^2-c^2)\sin^2\eta}$$

oder (da das Integral nach η eine rationale Function von $\sqrt{(s^2-b^2)}$ und $\sqrt{(s^2-c^2)}$ sein wird)

$$K\int_r^\infty \frac{\psi.ds}{s^\sigma},$$

wo ψ eine nach $\sqrt{(s^2-b^2)}$ und $\sqrt{(s^2-c^2)}$ rationale Function bezeichnet. Es ist also das einzige unausgeführte Integral ein elliptisches.

* * *

Wir kehren nach diesen Abschweifungen zur Formel (5.) zurück, vermittelst welcher wir leicht die Anziehung der ellipsoïdischen Schicht, deren Dimensionen am Anfang dieser Abhandlung angegeben waren, auf irgend einen Punct finden. Hier mag nur der Fall betrachtet werden, dafs der angegebene Punct ein äufserer ist, d. h. über die gröfsere Umhüllung der Schale hinaus liegt, indem der Fall des innern Punctes sich auf eine ganz ähnliche Art erledigen läfst. Um die Formel (5.) mit der darin gebrauchten Bezeichnung anwenden zu können, nennen wir die rechtwinklichen Coordinaten des angezogenen Punctes x, y, z, die eines Punctes der Schale x_1, y_1, z_1. Führen wir auf die zu Anfang bestimmte Art Polarcoordinaten ein, so wird, wenn wir zur Abkürzung

$$(6.)\qquad A=(r_1^2-b^2)(r_1^2-c^2)\cos^2\theta_1+r_1^2\sin^2\theta_1((r_1^2-b^2)\sin^2\varphi_1+(r_1^2-c^2)\cos^2{}_1)\varphi$$

setzen:

$$\partial x_1 \partial y_1 \partial z_1 = A \frac{\sin\theta_1 \partial\theta_1 \partial\varphi_1 \partial r_1}{\sqrt{(r_1^2 - b^2)}\sqrt{(r_1^2 - c)}}.$$

Die Dichtigkeit der Schale im Puncte x_1, y_1, z_1, multiplicirt mit A, entwickeln wir in eine Reihe

$$X_0 + X_1 + \cdots + X_n + \cdots,$$

deren Glieder zur Classe jener Functionen gehören, die nach $\cos\theta_1$, $\sin\theta_1 \cos\varphi_1$ und $\sin\theta_1 \sin\varphi_1$ rational sind und deren $n$tes Glied X_n der Differentialgleichung

$$\frac{1}{\sin\theta_1} \frac{\partial\left(\sin\theta_1 \frac{\partial X_n}{\partial\theta_1}\right)}{\partial\theta_1} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} + n(n+1)X_n = 0$$

genügt. Wird noch

$$Y_n = \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} dr_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{\pi} \frac{X_n Z_n \sin\theta_1 \partial\theta_1}{\sqrt{(r_1^2 - b^2)}\sqrt{(r_1^2 - c^2)}}$$

gesetzt, so ist das gesuchte Potential der ellipsoïdischen Schale (in Bezug auf den äufsern Punct x, y, z), welches wir mit V bezeichnen,

$$(7.) \quad V = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n + \cdots.$$

Die Form von Y_n ist noch einer Vereinfachung fähig, indem bekanntlich

$$(8.) \quad X_n = \sum_{m=0}^{m=n} P_{n,m}(\cos\theta_1)(F_m(r_1)\cos m\varphi_1 + \Phi_m(r_1)\sin m\varphi_1)$$

gesetzt werden kann, wo F und Φ von der Massenvertheilung abhängige Functionen sind. Erwägt man, dafs

$$\int_0^{\pi} (P_{n,m}(\cos\theta))^2 \sin\theta\, \partial\theta = \frac{2}{(2n+1)k_{n,m}}$$

ist, so findet man für Y_n folgenden Endwerth:

$$(9.) \quad Y_n = \sum_{p=0}^{p=n} k_{n,p} i^{-p} P_{n,p}(\cos\theta)\left\{\cos p\varphi \sum_{q=0}^{q=n} \alpha_q W_q^p(r) + \sin p\varphi \sum_{q=1}^{q=n} \beta_q w_q^p(r)\right\},$$

für $p = 0$ und $q = 0$ die Hälfte des betreffenden Gliedes genommen, wenn α und β durch die Gleichungen (für $m = 0$ ist nicht die Hälfte zu nehmen)

$$(10.) \quad \alpha_q = \sum_{m=0}^{m=n} \frac{i^m}{k_{n,m}} \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{U_q^m(r) F_m(r)\, dr}{\sqrt{(r^2 - b^2)}\sqrt{(r^2 - c^2)}}$$

$$(11.) \quad \beta_q = \sum_{m=1}^{m=n} \frac{i^m}{k_{n,m}} \int_{\varrho_1}^{\varrho_0} \frac{u_q^m(r) \Phi_m(r)\, dr}{\sqrt{(r^2 - b^2)}\sqrt{(r^2 - c^2)}}$$

definirt sind.

Wäre nicht, wie eben angenommen war, die Massenvertheilung in der Schale, sondern der Werth des Potentials V für eine der Oberflächen, z. B. für $r=\rho_0$ gegeben, so würde man durch Auflösung linearer Gleichungen den Ausdruck von V für jedes r, welches gröfser als ρ_0 ist, aus vorstehenden Formeln leicht finden können. Denn da V für $r=\rho_0$ bekannt ist, so ist es auch Y_n für $r=\rho_0$, also auch

$$\sum_{q=0}^{q=n} \alpha_q W_q^p(\rho_0)$$

und

$$\sum_{q=1}^{q=n} \beta_q w_q^p(\rho_0),$$

für jedes p. Durch Auflösung der so entstehenden linearen Gleichungen erhält man die α und β, welche, in (9.) gesetzt, den allgemeinen Werth von Y_n und vermittelst (7.) den von V verschaffen.

* * *

Zum Schlusse dieser Untersuchung wenden wir in unsre Formeln auf ein volles homogenes Ellipsoïd mit der Dichtigkeit 1 an, dessen gröfste Achse ρ_0 sei. Behalten wir die frühere Bezeichnung bei, so ist $X_0+X_1+\cdots$ jetzt die Reihen-Entwickelung von A selbst (Vergl. Gleichung (61.)). Es verschwinden dann alle X aufser X_0 und X_2, und man hat

$$A = X_0+X_2$$

$$X_0 = \tfrac{1}{3}\sqrt{(r_1^2-b^2)}\sqrt{(r_1^2-c^2)}\,\frac{d(r_1\sqrt{(r_1^2-b^2)}\sqrt{(r_1^2-c^2)})}{dr_1}$$

$$X_2 = \tfrac{1}{3}(2b^2c^2-r_1^2(b^2+c^2))P_{2,0}(\cos\theta)+\tfrac{1}{6}(b^2-c^2)r_1^2P_{2,2}(\cos 2\theta)\cos 2\varphi.$$

Betrachten wir zunächst Y_0, so ist

$$F_0(r_1) = \tfrac{1}{3}\sqrt{(r_1^2-b^2)}\sqrt{(r^2-c^2)}\,\frac{d(r_1\sqrt{(r_1^2-b^2)}\sqrt{(r_1^2-c^2)})}{dr_1},$$

während die übrigen F und alle Φ verschwinden, so dafs (9. und 10.) den Ausdruck

$$Y_0 = \tfrac{1}{3}W_0^0(r)\cdot\rho_0\sqrt{(\rho_0^2-b^2)}\sqrt{(\rho_0^2-c^2)}$$

liefert, woraus (mit Berücksichtigung des Werthes von W, den man durch die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta.\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+e\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))}$$

$$= 2\int_r^{\infty}\frac{\partial s}{(s^2-b^2)\cos^2\eta+(s^2-c^2)\sin^2\eta}$$

erhält), hervorgeht

$$(12.)\quad Y_0 = \tfrac{4}{3}\pi\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}\int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}.$$

Zur Berechnung von Y_2 hat man

$$F_0(r_1) = \tfrac{1}{3}(2b^2c^2-r_1^2(b^2+c^2)),\qquad F_2(r_1) = \tfrac{1}{2}(b^2-c^2)r_1^2,$$

während F_1 und alle Φ verschwinden. Ferner ist

$$U_0^0(r_1) = \pi(br_1^2-b^2-c^2),\qquad U_2^2(r_1) = \tfrac{1}{4}(\pi(2r_1^2-b^2-c^2)),$$

$$U_0^2(r_1) = U_0^2(r_1) = \tfrac{1}{2}(\pi(c^2-b^2)).$$

Es wird also α_1 und β_9 gleich Null, dagegen

$$\alpha_0 = -\tfrac{4}{3}\pi(b^2+c^2)\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)},$$

$$\alpha_2 = \tfrac{4}{3}\pi(c^2-b^2)\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}$$

und hieraus

$$Y_2 = -\tfrac{1}{2}\pi\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}\{\tfrac{1}{3}P_{2,0}(\cos\theta)((b^2+c^2)W_0^0(r_1)+(b^2-c^2)W_2^0(r_1))$$
$$-\tfrac{1}{6}P_{2,2}(\cos\theta)\cos 2\varphi((b^2+c^2)W_0^2(r_1)+(b^2-c^2)W_2^2(r_1))\},$$

oder, wenn man für die W die Integral-Ausdrücke setzt*), welche (4.) dafür angiebt:

$$Y_2 = \tfrac{1}{3}(\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)})\Big\{-P_{2,0}(\cos\theta)\int_0^{2\pi}(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)\,d\eta\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta.\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^3}$$
$$+\tfrac{1}{3}P_{2,2}(\cos\theta)\cos 2\varphi\int_0^{2\pi}(b^2\cos^2\eta+c^2\sin^2\eta)\,d\eta\times$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}(e^{2t}+e^{-2t})\,dt}{(r+\sqrt{(r^2-b^2)}\cos\eta.\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})+i\sqrt{(r^2-c^2)}\sin\eta.\frac{1}{2}(e^t-e^{-t}))^3}\Big\}.$$

Durch die Mittel, die unter (III.) angegeben wurden, verwandelt man diese Doppel-Integrale in einfache, und erhält dadurch

$$(13.)\quad Y_2 = \pi\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}\Big\{-P_{2,0}(\cos\theta)\int_r^\infty\frac{(3r^2-s^2)\,ds}{s^2\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}$$
$$+P_{2,2}(\cos\theta)\cos 2\varphi\int_r^\infty\frac{\partial s}{\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}\Big(\frac{r^2-c^2}{s^2-c^2}-\frac{r^2-b^2}{s^2-b^2}\Big)\Big\}.$$

---

*) Wenn man die Doppel-Integrale, durch welche die W definirt sind, zuerst in elliptische verwandeln, und dann in Y_2 substituiren würde, so wäre das Verfahren für unsern Fall etwas schwieriger, und erst dann bequemer, wenn eine Tafel der W für eine Reihe von n bereits berechnet vorläge.

Durch Addition von Y_1 und Y_2 findet man V, so dafs unsere Aufgabe gelöst ist. Will man von unserer Form auf die einfachere, von *Dirichlet* gegebene, kommen, so setze man für $P_{2,0}(\cos\theta)$ und $P_{2,2}(\cos\theta)$ ihre Werthe, die resp. $\cos^2\theta - \frac{1}{3}$ und $\sin^2\theta$ sind. Dadurch erhält man

$$V = \pi\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}\int_r^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}\Big\{1-\frac{3r^2\cos^2\theta}{s^2}+\frac{r^2}{s^2}$$
$$+\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos 2\varphi\Big(\frac{r^2-c^2}{s^2-c^2}-\frac{r^2-b^2}{s^2-b^2}\Big)\Big\}.$$

Da

$$\cos 2\varphi\Big(\frac{r^2-c^2}{s^2-c^2}-\frac{r^2-b^2}{s^2-c^2}\Big)$$
$$=\Big(\frac{r^2-b^2}{s^2-b^2}+\frac{r^2-c^2}{s^2-c^2}\Big)-2\Big(\frac{r^2-b^2}{s^2-b^2}\cos^2\varphi+\frac{r^2-c^2}{s^2-c^2}\sin^2\varphi\Big)$$

ist, so geht das Integral von r bis ∞ in

$$2\int_r^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}\Big(1-\frac{r^2\cos^2\theta}{r^2}-\frac{(r^2-b^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(s^2-b^2)}-\frac{(r^2-c^2)\sin^2\theta\sin^2\varphi}{(s^2-c^2)}\Big)$$
$$+\sin^2\theta\int_r^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}\Big(\frac{r^2-b^2}{s^2-b^2}+\frac{r^2-c^2}{s^2-c^2}+\frac{r^2}{s^2}-1\Big)$$

über. Man überzeugt sich leicht davon, dafs das mit $\sin^2\theta$ multiplicirte Integral verschwindet, so dafs schliefslich erhalten wird:

$$V = 2\pi\varrho_0\sqrt{(\varrho_0^2-b^2)}\sqrt{(\varrho_0^2-c^2)}\int_r^\infty\frac{ds}{\sqrt{(s^2-b^2)}\sqrt{(s^2-c^2)}}\Big(1-\frac{x^2}{s^2}-\frac{y^2}{s^2-b^2}-\frac{z^2}{s^2-c^2}\Big).$$

Bonn, im Januar 1851.

7.

Note sur l'expression $\left(((a^a)^a)^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot a}}}}\right)^a$ et les fonctions inverses correspondantes.

(Par Mr. *F. Woepcke*, docteur agrégé à l'université de Bonn.)

1.

En appliquant à l'exponentielle le principe qui conduit de la somme au produit, du produit à l'exponentielle, on parvient à *deux* genres différents de fonctions, parceque la somme et le produit sont symétriques par rapport à leurs deux éléments constitutifs, tandis que l'exponentielle ne l'est pas. Désignons donc les expressions

$$\left(((a^a)^a)^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}\right)^a \quad \text{et} \quad a^{\left(a^{\left(a^{\cdot^{\cdot^{\cdot (a^a)}}}\right)}\right)}$$

par $\overset{m}{\frown}\!\!\!\!a$ et $\overset{m}{\smile}\!\!\!\!a$, m étant le nombre des répétitions de l'élément a.

L'exponentielle a^m n'est effectivement que produit ou quotient, tant que l'exposant est un entier positif ou négatif, la base étant quelconque. Elle prend un caractère particulier, essentiellement différent des fonctions inférieures, dès que l'exposant cesse d'être un nombre entier. D'une manière analogue on obtient

$$(1.)\qquad \overset{m}{\frown}\!\!\!\!a = a^{(a^{m-1})} \cdot e^{2\left\{\sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=m-1}(\mu_{\pm\varrho}\cdot a^{\varrho})\right\}\pi\sqrt{-1}},$$

a étant une quantité quelconque, réelle ou imaginaire, excepté zéro, et m étant un entier positif, ou négatif, ou zéro. L'exponentielle $a^{(a^{m-1})}$ représente une seule de ses valeurs, et μ_1, μ_2, μ_3 etc. expriment successivement 0 et tous les entiers positifs et négatifs.

Dans les cas de m négatif ou zéro, il suffira de remarquer qu'on a

$$(2.)\qquad \sqrt[a]{\sqrt[a]{\cdots\sqrt[a]{\sqrt[a]{a}}}} = \overset{2-m}{\frown}\!\!\!\!a,$$

m étant le nombre des répétitions de a dans le premier nombre, laquelle formule est analogue aux formules $(((a-a)-a)-a)-\cdots = a(2-m)$, $(((a:a):a):a):\cdots = a^{(2-m)}$, et

$$(3.)\quad \sqrt[a]{a} = \overset{0}{\frown}{a}:$$

expression qui me paraît susceptible d'un emploi utile dans le calcul de ces fonctions.

Dans le cas où a est un entier positif ou négatif, le second membre de l'équation (1.) devient identique avec

$$a^{(a^{m-1})} \cdot e^{2\{\mu.a^{m-1}\}\pi\sqrt{-1}},$$

ce qui à son tour est identique avec $a^{(a^{m-1})}$, cette dernière expression représentant toutes ses valeurs. Or comme $a^{(a^{m-1})}$ représente une série developpée suivant les puissances de m, qui ne cesse pas d'avoir un sens précis lorsque m, au lieu d'être entier positif ou négatif ou zéro, devient une quantité réelle ou imaginaire quelconque, on est en droit de définir par $a^{(a^{m-1})}$ l'expression $\overset{m}{\frown}{a}$, a étant un entier positif ou négatif, et m étant une quantité réelle ou imaginaire quelconque. Dans le développement de $\overset{m}{\frown}{a}$ suivant les puissances de m, m^n aura pour coefficient

$$\frac{1}{n!}\sum_{\mu=0}^{\mu=\infty}\sum_{\nu=n}^{\nu=\infty}\frac{(-1)^{\nu-n}.\mu^\nu(\log a)^{\mu+\nu}}{\mu!(\nu-n)!}.$$

D'un autre côté on voit aisément que $a^{(a^{m-1})}$, si par cette expression ou représente toutes ses valeurs, ***ne sera plus*** identique avec le sesond membre de l'équation (1.), pour un a réel ou imaginaire quelconque et un m entier positif ou négatif ou zéro.

Les valeurs de l'expression

$$\left(\overset{m}{\frown}{a}\right)^{\overset{a}{\log}\left(\overset{n+1}{\frown}{a}\right)} . e^{2\left\{\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m-2}(\mu_{\pm\varrho}.a^\varrho)\right\}\pi\sqrt{-1}}$$

comprendront nécessairement celles de l'expression

$$e^{\log a.a^{m+n-1}+2\left\{\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m+n-1}(\mu_{\pm\varrho}.a^\varrho)\right\}\pi\sqrt{-1}},$$

qui évidemment implique l'expression $\overset{m+n}{\frown}{a}$, telle qu'elle a été définie par l'équa-

tion (1.). Donc, en posant une fonction $f(x)$ qui dans toute sa généralité satisfait à la condition

$$f(m+n) = f(m)^{\overset{a}{\log}\{f(n+1)\}}.e^{2\left\{\sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=m}(\mu_{\pm\varrho}.a^\varrho)\right\}\pi\sqrt{-1}}$$

ou bien

$$(4.)\quad \log\{f(m+n)\} = \log\{f(m)\}.\frac{\log\{f(n+1)\}}{\log a} + 2\left\{\sum_{\varrho=0}^{\varrho=m}(\mu_{\pm\varrho}.a^\varrho)\right\}\pi\sqrt{-1},$$

cette fonction comprendra l'expression définie par l'équation (1.). Supposant $f(x)$ développée en série $f(x) = \sum\limits_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} C_\lambda.x_\lambda$: cette série aura un sens précis pour un x réel ou imaginaire, tandis que la définition de l'équation (1.) n'admettait pour m que des valeurs entières positives ou négatives ou zéro. C'est donc cette série qui représentera l'expression $\overset{m}{\frown}{a}$ dans toute sa généralité.

Voici une propriété des coefficients de cette série. En désignant par A_σ l'expression

$$\frac{1}{\sigma!}\left(\frac{d^\sigma \log f(x)}{dx^\sigma}\right)_{x=0} \text{ qui sera de la forme } \frac{C_\sigma}{C_0} + \frac{\varphi(C_{\sigma-1}, C_{\sigma-2}, \ldots, C_1, C_0)}{\sigma!(C_0)^\sigma},$$

φ désignant une fonction des éléments C_0, C_1, ... $C_{\sigma-1}$, algébrique entière et du degré σ, on aura:

$$\frac{\mu!\varrho!}{(\mu+\varrho)!}.\frac{1}{\log a}\left(\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty}\frac{(\nu+\varrho)!}{\nu!\varrho!}A_{(\nu+\varrho)}\right)A_\mu = A_{(\mu+\varrho)},$$

en exceptant le cas $\mu=0$, $\varrho=0$. Dans ce cas il faut encore diminuer le second membre de la quantité $2\left\{\sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=m}(\mu_{\pm\varrho}.a^\varrho)\right\}\pi\sqrt{-1}$.

Pour l'usage d'un calcul dans lequel ou emploierait la notation ci-dessus indiquée, on peut établir des formules telles que les suivantes:

$$\overset{m\pm n}{\frown}{a} = \left(\overset{m}{\frown}{a}\right)^{a^{\pm n}},\quad \overset{m}{\frown}{a.b} = \left(\overset{m}{\frown}{a}\right)^{b^{m-1}}.\left(\overset{m}{\frown}{b}\right)^{a^{m-1}},\quad \overset{m}{\frown}{a^b} = \left(\overset{b(m-1)+1}{\frown}{a}\right)^b {}^{*)},$$

$$\overset{m}{\frown}{\left(\overset{b}{\frown}{a}\right)} = \overset{(m-1)a^{b-1}+b}{\frown}{a},\quad \left(\overset{m}{\frown}{a}\right)^{\left(\overset{n}{\frown}{a}\right)^{\pm 1}} = \overset{m\pm a^{n-1}}{\frown}{a},\quad \overset{\left(\overset{m}{\frown}{b}\right)}{\log}\left(\overset{m}{\frown}{a}\right) = \frac{a^{m-1}.\log a}{b^{m-1}.\log b},\quad \overset{\left(\overset{n}{\frown}{a}\right)}{\log}\left(\overset{m}{\frown}{a}\right) = a^{m-n}.$$

---

*) Ce qui donne immédiatement $\overset{nb+1}{\frown}{\overset{b}{\sqrt{a}}} = \sqrt[b]{\overset{n+1}{\frown}{a}}$, $\overset{n.a^n+1}{\frown}{\left(\overset{a^n}{\sqrt{a}}\right)} = a$, $\overset{a+1}{\frown}{\overset{a}{\sqrt{a}}} = a$.

On peut obtenir ces formules en employant la suivante: $\log\left(\overset{m}{\widehat{a}}\right) = a^m . \log\left(\overset{0}{\widehat{a}}\right)$ qui dérive immédiatement de la relation $a^{(a^{m-1})} = \left(\sqrt[a]{a}\right)^{a^m}$. *P.e.* $\log\left(\overset{m\pm n}{\widehat{a}}\right)$ $= a^{m\pm n} \log\left(\overset{0}{\widehat{a}}\right) = a^m . a^{\pm n} \log\left(\overset{0}{\widehat{a}}\right) = \log \left\{\left(\overset{m}{\widehat{a}}\right)^{a^{\pm n}}\right\}$.

2.

En posant $\overset{m}{\widehat{a}} = h$, je me sers de la notation $\overset{m}{\psi\!\!/}h = a$, définie par l'équation

$$\overset{m}{\widehat{\left(\overset{m}{\psi\!\!/}h\right)}} = h.$$

De $h = a^{(a^{m-1})}$ on tire $\frac{dh}{da} = h . a^{m-2}\{1 + (m-1)\log a\}$, de sorte que, si m est un nombre positif entier ou fractionnaire plus grand que l'unité, tandis que h croît successivement de $+1$ à $+\infty$, a, ou $\overset{m}{\psi\!\!/}h$ passera également par toutes les valeurs successives depuis $+1$ jusqu'à $+\infty$.

D'un autre côté, de $a^{(a^{m-1})} = h$ il suit

$$\log a = \log h . e^{(1-m)\log a},$$

et par conséquent, en posant $\log a = y$, $\log h = x$, $e^{(1-m)} = k$, on a l'équation

$$(A.) \quad y = x . k^y,$$

dont la plus petite racine y est en vertu de la formule de *Lagrange*:

$$\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty} D^{\varrho-1} y . (k^y)^{\varrho}_{(0)} \frac{x^{\varrho}}{\varrho!},$$

c'est à dire

$$(B.) \quad y_0 = x \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty} (\varrho+1)^{\varrho-1} \frac{(\{1-m\}x)^{\varrho}}{\varrho!} = x . s;$$

et comme $y = \log(\overset{m}{\psi\!\!/}h)$, e^{y_0} sera une des valeurs de $\overset{m}{\psi\!\!/}h$, *cette valeur de $\overset{m}{\psi\!\!/}h$ pourra être réprésentée sous la forme d'une puissance de h*, puisque $e^{x . s} = h^s$.

Le $(\mu+1)^{\text{me}}$ terme de la série s, divisé par le μ^{me} terme, donne

$$\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{\mu-1}(1-m).x,$$

et comme le coefficient $\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{\mu-1}$ converge vers e, tandis que μ croit indéfiniment, la série s sera convergente dès qu'on a $(1-m)\log h = \frac{1}{e+\varepsilon}$, ε désignant une quantité très petite. C'est à dire, il faut qu'on ait

$$h = 1:\left\{e^{\frac{1}{(m-1)(e+\varepsilon)}}\right\}.$$

Posant $e^{\frac{1}{(m-1)(e+\varepsilon)}} = n$, $e+\varepsilon = e$, on a $\frac{dn}{dm} = \frac{n}{-c}\cdot\frac{1}{(m-1)^2}$; donc n est une fonction continue de m, tant que m est une quantité entière ou fractionnaire plus grande que l'unité. Pour $m = 1+\frac{1}{\infty}$, on a $h = \frac{1}{\infty}$, et pour $m = \infty$ on a $h = 1$; donc il correspond à chaque valeur de h, comprise entre 0 et 1, une limite supérieure de m, comprise entre 1 et ∞ et déterminée par l'équation $m = 1-\frac{1}{(e+\varepsilon)\log h}$, qui est telle qu'en désignant par m_h une valeur de m comprise entre l'unité et cette limite, la serie s sera convergente pour chaque combinaison h, m_h et fournira de cette manière une valeur $e^{s.\log h}$ de l'expression $\sqrt[m^h]{h}$ pour des valeurs de h comprises entre 0 et 1.

La formule (7.) de la notice de Mr. ***Eisenstein***, insérée dans ce Journal vol. 28. page 50, lorsqu'on y fait $m = 1$, s'identifie avec la relation (***B***.) obtenue ci-dessus. Comme il s'agissait ici d'exprimer en k et x, y à la première puissance seulement, et non à une puissance quelconque, on obtenait la relation (***B***.) d'une manière plus directe que par le procédé d'ailleur très-ingénieux de Mr. ***Eisenstein***. Mais on peut maintenant se servir de la formule (8.) de Mr. ***Eisenstein*** pour *développer* $\sqrt[m]{h}$ *en série suivant les puissances de* m. Car, en vertu de la relation $a = \sqrt[m]{h}$, cette formule, lorsqu'on y fait $\lambda = 1$, donne

$$\sqrt[m]{h} = \sum_{\varrho=0}^{\varrho=\infty}\frac{(1-\{m-1\}\varrho)^{\varrho-1}}{\varrho!}(\log h)^{\varrho},$$

d'où il suit immédiatement que le coefficient de la puissance m^r dans le déve-

loppement suivant les puissances de m, sera

$$\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{\varrho=n+1}^{\varrho=\infty}\frac{\varrho^{n-1}(\varrho+1)^{[\varrho-(n+1)]}}{\{\varrho-(n+1)\}!}(\log h)^\varrho.$$

De la même manière qu'on exprime la racine $\sqrt[m]{a}$ par l'exponentielle $a^{\frac{1}{m}}$, on pourra *ramener à la forme* $\overset{a}{\frown}$ *la fonction inverse qu'on vient de discuter*. Pour cela, il n'y a qu'à déterminer ξ de sorte qu'il satisfasse à l'équation

$$\overset{m}{\overbrace{\left(\overset{\xi}{\overbrace{h}}\right)}} = h.$$

En employant une des formules présentées à la fin du paragraphe précédent, on a

$$\overset{m}{\overbrace{\left(\overset{\xi}{\overbrace{h}}\right)}} = \overset{\xi+(m-1)h^{\xi-1}}{\overbrace{h}}.$$

On aura donc à faire $\xi+(m-1)h^{\xi-1}=1$, ou, en posant $\xi-1=v$, $1-m=w$:

$$(C.)\qquad v = w.h^v.$$

Nous venons de discuter cette équation. Pour sa plus petite racine on obtient

$$(D.)\quad \eta_0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty}(\varrho\log h)^{\varrho-1}.\frac{w^\varrho}{\varrho!},\ \text{c'est à dire}\ \eta_0 = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty}\frac{\varrho^{\varrho-1}(\log h)^{\varrho-1}(1-m)^\varrho}{\varrho!}.$$

Mais on avait $y_0=\sum_{\varrho=1}^{\varrho=\infty}\frac{\varrho^{\varrho-1}(1-m)^{\varrho-1}(\log h)^\varrho}{\varrho!}$, de sorte que $\eta_0=y_0\frac{1-m}{\log h}$ ou $\frac{\eta_0}{1-m}=s$. Donc $\xi_0=\eta_0+1$ sera une valeur qui satisfait à l'équation $\overset{\xi_0}{\overbrace{h}}=\sqrt[m]{h}$.

Ce résultat peut être vérifié aisément de la manière suivante. On a

$$\overset{\xi_0}{\overbrace{h}} = h^{(h^{\xi_0-1})} = h^{(h^{\eta_0})}.$$

Or η_0 étant une valeur qui satisfait à l'équation $(C.)$, on obtient $h^{\eta_0}=\frac{\eta_0}{w}$ $=\frac{\eta_0}{1-m}=s$; donc $\overset{\xi_0}{\overbrace{h}}=h^s$. Mais on a vu ci-dessus que h^s représente en effet l'expression $\sqrt[m]{h}$; donc $\overset{\xi_0}{\overbrace{h}}=\sqrt[m]{h}$ c. q. f. d.

Nous venons d'examiner la fonction qui, dans l'équation $\overset{m}{\widehat{a}} = h$ combine m et h pour produire a. Quant à l'autre qui produit m par la combinaison de a avec h et à laquelle correspond le logarithme dans la sphère de l'exponentielle, elle n'offre rien de particulièrement remarquable. En nous permettant l'emploi de la notation $\overset{a}{\text{llog}}\, h$, que nous définissons par l'équation

$$\overset{\overset{a}{\text{llog}}\, h}{\widehat{a}} = h,$$

on a $\overset{a}{\text{llog}}\, h = \overset{a}{\log}(\overset{a}{\log}\, h) + 1$ ce qu'on peut écrire aussi

$$\overset{a}{\text{llog}}\, h = \overset{a}{\log}\left\{\overset{\left(\overset{0}{\widehat{a}}\right)}{\log}\, h\right\}.$$

Remarque. Le principe qui de la somme fait naître le produit, du produit l'exponentielle, de l'exponentielle les fonctions $\overset{m}{\widehat{a}}$ et $\overset{m}{\breve{a}}$, ne conduit à aucune observation particulière, si on l'applique aux fonctions inverses. Cela est évident pour la soustraction et la division; quant à la racine et au logarithme, on a

$$\sqrt[a]{\cdot^{\cdot^{\cdot \sqrt[a]{\sqrt[a]{a}}}}} = \overset{2-m}{\widehat{a}}, \qquad \sqrt[\left(\left(\left(\sqrt[a]{a}\right)\sqrt{a}\right)\cdots\sqrt{a}\right)]{a} = a^{\left[\overset{m-1}{\breve{\left(\frac{1}{a}\right)}}\right]}:$$

expressions du genre de celles qui ont été déjà produites par l'application du principe à la fonction directe de l'exponentielle, tandis que les expressions

$$\overset{a}{\log}(\overset{a}{\log} \ldots\ldots \overset{a}{\log}(\overset{a}{\log}(\overset{a}{\log} a))), \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{a}{\log} a}{\log a}}{\vdots}}{\cfrac{\log a}{\log a}}$$

n'ont pas de sens analytique, parceque l'une implique le logarithme de 0, l'autre le logarithme rapporté à la base 1. Je fais observer que $\overset{2-m}{\breve{a}}$ conduit également à la première de ces deux expressions inadmissibles.

Rien ne s'oppose à ce qu'on applique de nouveau le principe aux fonctions $\overset{m}{\frown}{a}$ et $\overset{m}{\smile}{a}$. Mais on voit qu'à partir de là, les fonctions directes du même ordre se multiplient, de sorte qu'à partir de l'ordre de l'exponentielle, il existera généralement $2^{(n-3)}$ fonctions directes de l'ordre n, et à chacune de ces fonctions correspondront deux fonctions inverses.

Des recherches plus étendues permettraient de reconnaître si des fonctions du même ordre peuvent être ramenées l'une à l'autre, et de quelle manière on pourrait y arriver. J'observe par exemple que l'expression discutée par Mr. *Eisenstein* dans la notice citée ci-dessus, est le cas particulier de la fonction $\overset{m}{\smile}{a}$ qui correspond à $m = \infty$; et ce cas conduit, comme on l'a vu, à des formules qui rentrent dans la catégorie de la fonction $\overset{m}{\frown}{a}$.

Peut-être ne sera-t-il pas inutile de remarquer que les fonctions des ordres supérieurs présenteront des rapports qui ne peuvent être exprimés par des opérations inférieures; et que, de même qu'il existe des lois naturelles qui ne s'auraient être réprésentées que par des fonctions exponentielles, et nullement par des fonctions inférieures à celles-ci, il pourrait exister dans la nature des forces, agissant suivant des lois qui ne sauraient être convenablement représentées qu'à l'aide des opérations supérieures dont on vient d'indiquer l'étendue infinie.

Paris, mars 1851.

8.

Nachricht über *Jacobi's* wissenschaftlichen Nachlafs.

(Von *G. Lejeune Dirichlet.*)

Bald nach *Jacobi's* beklagenswerthem Tode hat mir Frau Professor *Jacobi* mit einem mich ehrenden Vertrauen den gesammten wissenschaftlichen Nachlafs meines unvergefslichen Freundes übergeben. Um zunächst eine allgemeine Übersicht über denselben zu gewinnen, war es erforderlich, die zahlreichen Handschriften des grofsen Mathematikers nach den Gegenständen zu ordnen. Dieses Geschäft, dem ich mich, gemeinschaftlich mit *Jacobi's* hiesigen Freunden, den Herren *Borchardt* und *Joachimsthal*, unterzogen habe, war nicht ohne Schwierigkeit, da die Manuscripte, wahrscheinlich in Folge wiederholten Wohnungswechsels, sich in grofser Unordnung befanden und die einzelnen zusammengehörigen Bogen oder Blätter, gewöhnlich ohne Pagination, nicht selten mühsam aus verschiedenen Convoluten hervorgesucht werden mufsten. Sobald diese vorläufige Arbeit beendigt sein wird, in deren Ausführung wir durch die momentan hier anwesenden Herren *Kummer* und *Rosenhain* unterstützt worden sind, sollen die Handschriften unter des Verewigten Freunde, die sich dazu bereit erklärt haben, zum Behufe einer ins Einzelne gehenden Durchsicht vertheilt werden. Es hat sich bei der vorläufigen Anordnung gefunden, dafs nur Weniges völlig zum Drucke bereit ist. Meistens liegen wiederholte Bearbeitungen derselben oder nahe verwandter Gegenstände vor, die offenbar, wenn gleich jede Zeitangabe in den Manuscripten fehlt, sehr verschiedenen Zeiten angehören. Es werden diese Bearbeitungen mit der gröfsten Sorgfalt durchzusehen und zu vergleichen sein, um auszumitteln, welche der früheren durch die späteren überflüssig geworden sind, oder was aus jenen herauszunehmen und in die späteren an geeigneter Stelle einzureihen sein wird, damit der Wissenschaft nichts Wesentliches von des grofsen, unermüdlichen Forschers Schöpfungen verloren gehe. Die zur Veröffentlichung geeigneten Abhandlungen werden im gegenwärtigen Journal gedruckt werden, in welchem, mit Ausnahme der beiden besonderen Werke: „Fundamenta nova etc." und „Canon arithmeticus", fast alle Arbeiten *Jacobi's* zuerst erschienen sind, und sollen später gesammelt werden; wie er dies schon selbst durch die Herausgabe des ersten Bandes seiner Werke (Berlin bei G. Reimer, 1846.) zu thun begonnen hatte.

Neben der Herausgabe der von *Jacobi* selbst verfafsten Abhandlungen beabsichtigen seine Freunde, die wichtigsten der von ihm in Königsberg und hier gehaltenen Universitätsvorlesungen der Öffentlichkeit zu übergeben. Allen, die an den Fortschritten der mathematischen Wissenschaften Interesse nehmen, ist es bekannt,

welchen Einflufs *Jacobi* auch in seinem Berufe als Universitätslehrer, dem er sich stets mit besonderer Liebe und dem seltensten Erfolge gewidmet hat, auf den grofsen Aufschwung geübt hat, den die mathematischen Studien während des letzten Vierteljahrhunderts in unserem deutschen Vaterlande genommen haben. Wenn jetzt die Kenntnifs der höheren Analysis unter uns in einem Grade verbreitet ist, wie zu keiner früheren Zeit, wenn zahlreiche jüngere Mathematiker die Wissenschaft in den verschiedensten Richtungen erweitern und bereichern: so hat er an einer so erfreulichen Erscheinung den gröfsten Antheil. Fast alle sind seine Schüler gewesen, selten ist ein aufkeimendes Talent seiner Aufmerksamkeit entgangen, keinem, sobald er es erkannt, hat sein fördernder Rath, seine aufmunternde Theilnahme gefehlt.

Damit einer so erfolgreichen Lehrthätigkeit, welcher der Tod ein so frühes Ziel gesetzt, wenigstens die Nachwirkung erhalten werde, die das gedruckte Wort in Ermangelung des lebendigen gesprochenen hervorzubringen vermag, werden die Freunde des Verewigten seine wichtigsten Vorlesungen in genauer Reproduction durch den Druck veröffentlichen. Sie sind der Überzeugung, dafs den Jüngern der Wissenschaft kein wirksameres Bildungsmittel in die Hand gegeben werden kann, als ihnen die Vorträge eines schöpferischen Geistes darbieten, der es sich zur besondern Aufgabe gemacht hatte, seine Zuhörer bei allen schwierigen Untersuchungen in den Gedankengang der Erfindung einzuweihen. Da *Jacobi* seine Vorlesungen immer ganz frei und ohne Benutzung einer schriftlichen Ausarbeitung gehalten hat, so enthält sein Nachlafs, bis auf wenige kurze Notizen, zwar nichts von seiner Hand, was auf seine Vorlesungen Bezug hat: dagegen finden sich in demselben sehr genaue Nachschriften seiner bedeutendsten Vorlesungen, welche von mehreren seiner ausgezeichnetsten Zuhörer herrühren und die er seit Jahren sorgfältig gesammelt hatte, theils um sich später dadurch die Vorbereitung auf seine Vorträge zu erleichtern, theils um sie bei der Ausarbeitung von Lehrbüchern zu benutzen, deren Herausgabe er beabsichtigte. Mit Hülfe dieser Nachschriften und anderer von gleicher Genauigkeit, die ihnen zu diesem Zwecke zur Disposition gestellt worden sind, werden *Jacobi's* Freunde im Stande sein, seine wichtigsten Vorlesungen mit grofser Treue zu reproduciren. Es können von diesen Vorlesungen, die in einzelnen Bänden erscheinen werden, hier vorläufig die folgenden: 1°. die über die Theorie der elliptischen Functionen, 2°. über die Kreistheilung und ihre Anwendungen auf die Zahlentheorie, 3°. über die analytische Mechanik, und endlich 4°. über die allgemeine Theorie der Curven und Flächen genannt werden. Bei einigen andern von geringerem Umfange bleibt die Entscheidung, ob sie zu drucken sind, noch vorbehalten. Berlin, im August 1851.

9.

Jacobi in Roma.

(Articolo necrologico.)

(Estratto dagli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche pubblicati in Roma. Marzo 1851.)

Se l'annunzio della morte dell'illustre *Jacobi*, mancato nell' ancor fresca età di 46 anni, ha vivamente afflitto tutti i cultori delle matematiche per essersi estinto, così innanzi tempo, il più grande o almeno uno de'più grandi luminari che si avesse la scienza, non è a dire di quanto dolore abbia costernato gli amici suoi, e tutti coloro che hanno avuto l'occasione di ammirarne, insieme coll'altezza dello ingegno, la semplicità et la bontà del cuore. Affabile, cortese, amabile e spiritoso nel conversare, di fede incorrotta, disinteressato, amico leale, sposo tenero e padre eccellente, egli era un vivo specbio, uno splendido esempio di virtù domestiche e cittadine. Queste belle e rare doti dell'animo noi avemmo la sorte di conoscere ed amare in Lui allorchè, viaggiando per l'Italia a cagion di salute, si trattenne qui in Roma per oltre a sei mesi in compagnia de'suoi illustri amici e colleghi sigg. *Dirichlet* e *Steiner*, dall'ottobre del 1843 fino all'aprile del 1844. Ei ci sta tuttora presente (o! dolce rimembranza) con quella sua maestosa persona dalla fronte omerica e dall'occhio vivace e penetrante; ancora ci par di vedere la gioja che gli brillò sul volto quando, nel visitare la preziosa biblioteca matematica del ch. prof. *Tortolini*, vi scorse un esemplare della sua grand' opera *Fundamenta*, ed il giornale del sig. *Crelle* ove ha depositato tante ammirabili produzioni dell'alta sua mente! Ancora ci suonano all' orecchio le parole onde egli esternava la sua ammirazione ed il suo affetto per la nostra Roma, che volentieri avrebbe scelta a sua patria seconda; e le parole onde commendava la nostra bellissima lingua nella quale si volle provare di scrivere. E scrisse egli tedesco in italiano, e, chi, lo crederebbe? scrisse non senza grazia, proprietà ed eleganza, come ne fanno testimonio tre sue importanti Memorie, e le libere traduzioni di una Memoria del sig. *Kummer*, e di un'altra del sig. *Steiner*,

inserite nel giornale arcadico (tomi 98 e 99) *). Ma di ciò non è da maravigliare; poichè sappiamo che sino da'più teneri anni ei fè conoscere, simile a *Pascal*, di qual penetrazione e vastità si fosse la sua mente, accoppiando allo studio delle scienze esatte (delle quali poi ha tanto servito al progresso, versando nelle loro profondità tesori di nuova luce) la coltura delle lettere greche e latine, e delle più nobili tra le moderne, non discaro alle muse avendo più di una volta composto versi nelle lingue di *Omero*, di *Virgilio*, e di *Klopstock*.

Ecco un breve cenno dell'uomo che tanto speravamo di rivedere tra noi, e che la morte ci ha rapito per sempre, quando appunto il suo spirito era pervenuto a quella forza, maturità e pienezza di sè che suol produrre frutti più abbondanti e più perfetti. Nel dolore che acerbamente ci affligge, non vogliamo rimanerci dal manifestare un desiderio, che sarà presto adempiuto, non ne dubitiamo, ed é che, nella patria del gran *Federico*, si faccia verso il grandissimo geometra *Jacobi* quello che per *Abel* già fece il suo pietoso maestro, raccogliendo in uno tutte le sue opere, tanto edite e sparse nei giornali quanto inedite, e formando così un immortale monumento che sarà di progresso per la scienza e di gloria per la nazione alemanna.

A nome degli amici di *Jacobi* in Roma.

D. Chelini.

---

*) *Memorie originali.* — Sopra le funzioni di due angoli proposte da *Laplace* nelle ricerche sulla figura della terra.

Sulla condizione di eguaglianza di due radici dell'equazione cubica dalla quale dipendono gli assi principali di una superficie di 2°. ordine.

Sul principio dell'ultimo moltiplicatore, e del suo uso come principio generale di meccanica.

Traduzioni. Sull'equazione cubica per la quale si determinano gli assi principali delle superficie di 2°. ordine, per *Kummer*.

Teoremi nuovi sulle coniche inscritte e circoscritte, per *Steiner*.

10.

Démonstration des formules de M. *Jacobi*, rélatives à la théorie de la rotation d'un corps solide.

(Par Mr. *Somoff*, professeur d'analyse à l'université de St. Petersbourg.)

On verra peut-être avec quelque intérêt dans ce mémoire la démonstration des belles formules, rélatives à la théorie de la rotation d'un corps solide, que l'illustre auteur des „*Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*" a publiées d'abord dans les comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris le 30 Juillet 1849 (T. XXIX No. 5) et puis dans le Journal de M. *Liouville*.

Je rappellerai avant tout les formules fondamentales de la théorie de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, dans le cas où aucune force n'agit sur le corps. Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque du corps par rapport à trois axes fixes, dont l'origine O est le point fixe, autour duquel s'effectue la rotation, et x', y', z' les coordonnées du même point par rapport aux axes principaux d'inertie, passant par O. Désignons par A, B, C les moments d'inertie rélatifs à ces seconds axes, et supposons $A > B > C$. Prenons le plan invariable pour le plan des x_1, y_1 et soient: θ l'angle z_1Oz', ψ l'angle compris entre l'axe Ox_1 et l'intersection ON des plans x_1Oy_1 et $x'Oy'$, enfin φ l'angle NOx'. En posant

$$\begin{aligned} x_1 &= ax' + by' + cz', \\ y_1 &= a'x' + b'y' + c'z', \\ z_1 &= a''x' + b''y' + c''z', \end{aligned}$$

on aura par les formules données par *Euler* pour la transformation des coordonnées:

$$(1.)\quad \begin{cases} a = \sin\varphi\sin\psi\cos\theta + \cos\varphi\cos\psi, & b = \cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \sin\varphi\cos\psi, \\ a' = \sin\varphi\cos\psi\cos\theta - \cos\varphi\sin\psi, & b' = \cos\varphi\cos\psi\cos\theta + \sin\varphi\sin\psi, \\ a'' = -\sin\varphi\sin\theta, & b'' = -\cos\varphi\sin\theta, \\ \qquad c = \sin\theta\sin\psi, & \\ \qquad c' = \sin\theta\cos\psi, & \\ \qquad c'' = \cos\theta. & \end{cases}$$

Soient p, q, r les vitesses de rotation autour des axes Ox', Oy', Oz', considérees comme composantes de la vitesse angulaire instantanée; l la valeur du moment principal des quantités du mouvement, et h la somme des forces vives. Cela posé, on aura

$$(2.)\quad \begin{cases} C\partial r+(B-A)pq\partial t=0,\ B\partial q+(A-C)rp\partial t=0,\ A\partial p+(C-B)qr\partial t=0, \\ Ap^2+Bq^2+Cr^2=h,\quad A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=l^2, \end{cases}$$

$$(3.)\qquad p^2 = \frac{l^2-Bh+(B-C)Cr^2}{(A-B)A},$$

$$(4.)\qquad q^2 = \frac{l^2-Ah+(A-C)Cr^2}{(B-A)B},$$

$$(5.)\quad a''=-\sin\varphi\sin\theta=\frac{Ap}{l},\quad b''=-\cos\varphi\sin\theta=\frac{Bq}{l},\quad c''=\cos\theta=\frac{Cr}{l}.$$

$$(6.)\qquad \partial t = \frac{\pm\sqrt{(AB)}.C\partial r}{\sqrt{[l^2-Bh+(B-C)Cr^2][Ah-l^2+(C-A)Cr^2]}}.$$

(Voyez le Traité de Mécanique de M. *Poisson.*)

La formule (6.) peut être écrite sous la forme

$$(6.\text{ bis})\qquad \partial t = \frac{\pm\sqrt{(AB)}}{\sqrt{(B-C)(A-C)}}.\frac{\partial r}{\sqrt{(r^2-Q)(P-r^2)}},$$

si pour abréger on fait

$$P = \frac{Ah-l^2}{(A-C)C},\qquad Q = \frac{Bh-l^2}{(B-C)C}.$$

Dans le cas considéré par M. *Jacobi*, on a $Ah>l^2$, $Bh>l^2$; par conséquent P et Q sont positifs et $P>Q$. Pour que ∂t soit réel, on doit avoir $r^2>Q$, $r^2<P$; donc on peut poser

$$r^2 = P\cos^2\varepsilon+Q\sin^2\varepsilon,$$

ε étant réel. Si de plus on fait

$$(7.)\qquad k' = \sqrt{\frac{Q}{P}} = \sqrt{\frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(B-C)(Ah-l^2)}},$$

on aura

$$(8.)\quad k = \sqrt{(1-k'^2)} = \sqrt{\frac{P-Q}{P}} = \sqrt{\frac{(A-B)(l^2-Ch)}{(B-C)(Ah-l^2)}},$$

$$r^2 = P(1-k^2\sin^2\varepsilon) = P\Delta^2(\varepsilon,k),$$

$$(9.)\qquad \partial t = \frac{\pm\sqrt{(ABC)}}{\sqrt{(B-C)(Ah-l^2)}}.\frac{\partial\varepsilon}{\Delta(\varepsilon,k)}.$$

Posant dans cette formule

$$(10.)\qquad \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}} = n,$$

et donnant au radical le signe $+$, pour que le temps croisse avec ε, elle devient

$$n\partial t = \frac{\partial\varepsilon}{\varDelta(\varepsilon, k)};$$

d'où l'on tire

$$nt + \tau = \int_0^\varepsilon \frac{\partial\varepsilon}{\varDelta(\varepsilon, k)},$$

τ désignant une constante arbitraire.

La valeur $nt+\tau$ se trouve ainsi exprimée par une fonction elliptique de première espèce, et c'est elle que M. *Jacobi* prend pour argument dans ses formules. Faisant $nt+\tau = u$, on aura

$$(11.)\quad \begin{cases} \varepsilon = \operatorname{am}(u), \qquad r^2 = P\varDelta^2\operatorname{am}(u, k), \\ r = \pm\sqrt{\dfrac{(Ah-l^2)}{(A-C)C}}\cdot\varDelta\operatorname{am}(u) = \pm\sqrt{\dfrac{(Ah-l^2)}{(A-C)C}}\cdot\dfrac{\sqrt{k'}\,\Theta_1(u)}{\Theta(u)}, \end{cases}$$

où $\Theta(u)$, $\Theta_1(u)$ sont des fonctions bien connues, qui jouent un si grand rôle dans la théorie des fonctions elliptiques.

Après avoir substitué cette valeur de r dans la formule (3.), on trouvera

$$p^2 = \frac{(l^2-Bh)+(B-C)\left(\dfrac{Ah-l^2}{A-C}\right)\varDelta^2\operatorname{am}(u)}{(A-B)A} = \frac{(B-C)C}{(A-B)A}(P\varDelta^2\operatorname{am}(u)-Q).$$

Mettant ici $1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u)$ au lieu de $\varDelta^2\operatorname{am}(u)$, ainsi que les valeurs de P et k^2, trouvées plus haut, on aura, toutes réductions faites:

$$(12.)\quad \begin{cases} p^2 = \dfrac{l^2-Ch}{A(A-C)}\cdot\cos^2\operatorname{am}(u), \\ p = \pm\sqrt{\dfrac{(l^2-Ch)}{A(A-C)}}\cdot\cos\operatorname{am}(u) = \pm\sqrt{\dfrac{(l^2-Ch)}{(A-C)A}}\cdot\sqrt{\dfrac{k'}{k}}\cdot\dfrac{H_1(u)}{\Theta(u)}. \end{cases}$$

De la même manière la formule (4.) donne

$$(13.)\quad \begin{cases} q^2 = \dfrac{Ah-l^2}{(A-B)B}\cdot k^2\sin^2\operatorname{am}(u) = \dfrac{l^2-Ch}{(B-C)B}\cdot\sin^2\operatorname{am}(u), \\ q = \pm\sqrt{\dfrac{(l^2-Ch)}{(B-C)B}}\cdot\sin\operatorname{am}(u) = \pm\sqrt{\dfrac{(l^2-Ch)}{(B-C)B}}\cdot\dfrac{H(u)}{\sqrt{k}\,\Theta(u)}. \end{cases}$$

Substituant ces valeurs de p, q, r dans les formules (5.) on les réduit par là à

$$(14.)\quad a'' = -\sin\varphi\sin\theta = \frac{Ap}{l} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{A-C}}\cdot\cos\operatorname{am}(u)$$
$$= \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{A-C}}\cdot\sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H_1(u)}{\Theta(u)},$$

$$(15.)\quad b'' = -\cos\varphi\sin\theta = \frac{Bq}{l} = \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{B-C}}\cdot\sin\operatorname{am}(u)$$

$$= \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{B-C}}\cdot\frac{H(u)}{\sqrt{k}\,\Theta(u)},$$

$$(16.)\quad c'' = \cos\theta = \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}}\cdot\Delta\operatorname{am}(u)$$

$$= \pm\frac{1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}}\cdot\frac{\sqrt{k'}\,\Theta_1(u)}{\Theta(u)}.$$

Tels sont les cosinus des angles $(x'Oz_1)$, $(y'Oz_1)$, $(z'Oz_1)$.

Les formules (14. et 15.) donnent

$$(17.)\quad \operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}\cdot\cot\operatorname{am}(u),$$

pour calculer l'angle φ, que fait l'axe x' avec la ligne des noeuds ON. Le facteur constant $\frac{A(B-C)}{B(A-C)}$ de cette formule est <1; donc on pourra poser $\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}} = \sin\beta$, désignant par β une quantité réelle. M. *Jacobi* considère β comme l'amplitude d'un argument elliptique $K'-a$, rapporté au module complémentaire k'; K' étant l'argument complet rélatif au même module. On a ainsi

$$\beta = \operatorname{am}(K'-a, k'),\quad K'-a = \int_0^\beta \frac{\partial\beta}{\Delta(\beta,k')},\quad K' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\beta}{\Delta(\beta,k')},$$

$$a = K' - \int_0^\beta\frac{\partial\beta}{\Delta(\beta,k')} = \int_\beta^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\beta}{\Delta(\beta,k')},$$

$$\sin\beta = \sin\operatorname{coam}(a,k') = \frac{\cos\operatorname{am}(a,k')}{\Delta\operatorname{am}(a,k')} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}.$$

De cette dernière formule on tire aisément les expressions suivantes:

$$\Delta\cos\operatorname{am}(a,k') = l\sqrt{\frac{A-B}{B(Ah-l^2)}} = \frac{k}{\Delta\operatorname{am}(a,k')},\quad \Delta\operatorname{am}(a,k') = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{B(l^2-Ch)}{B-C}},$$

$$\cos\operatorname{am}(a,k') = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{A(l^2-Ch)}{A-C}},\qquad \sin\operatorname{am}(a,k') = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}},$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{am}(a,k') = \sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A(l^2-Ch)}}.$$

Passant du module k' à k c. à d. de l'argument réel (a,k), à l'argument imaginaire (ai,k), on trouve (Fund. nova §. 19.):

$$(18.)\quad \sin\mathrm{am}(ai,k) = i\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(a,k') = i\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A(l^2-Ch)}} = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{H(ai)}{\Theta(ai)},$$

$$(19.)\quad \cos\mathrm{am}(ai,k) = \frac{1}{\cos\mathrm{am}(a,k')} = l\sqrt{\frac{A-C}{A(l^2-Ch)}} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\cdot\frac{H_1(ai)}{\Theta(ai)},$$

$$(20.)\quad \Delta\,\mathrm{am}(ai,k) = \frac{\Delta\,\mathrm{am}(a,k')}{\cos\mathrm{am}(a,k')} = \sqrt{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}} = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(ai)}{\Theta(ai)},$$

$$(21.)\quad \mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ai,k') = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{C(Ah-l^2)}{A-C}} = \frac{H(ai)}{\sqrt{k'}H_1(ai)};$$

par conséquent

$$(22.)\quad \begin{cases} \sqrt{\dfrac{l^2-Ch}{A(A-C)}} = \dfrac{l\sqrt{k}}{A\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{\Theta(ai)}{H_1(ai)} = \dfrac{l}{A}\cdot\dfrac{1}{\cos\mathrm{am}(ai)}, \\ \sqrt{\dfrac{l^2-Ch}{B(B-C)}} = \dfrac{l\sqrt{k}}{B}\cdot\dfrac{\Theta_1(ai)}{H_1(ai)} = \dfrac{l}{B}\cdot\dfrac{\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\cos\mathrm{am}(ai)}, \\ \sqrt{\dfrac{(Ah-l^2)}{C(A-C)}} = \dfrac{l}{iC\sqrt{k'}}\cdot\dfrac{H(ai)}{H_1(ai)} = \dfrac{l}{iC}\cdot\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ai). \end{cases}$$

En vertu de ces expressions les formules (11. .... 16.) peuvent être remplacées par celles-ci:

$$(23.)\quad \begin{cases} p = \pm\dfrac{l}{A}\cdot\dfrac{\Theta(ai)H_1(u)}{H_1(ai)\Theta(u)} = \pm\dfrac{l\cos\mathrm{am}(u)}{A\cos\mathrm{am}(ai)}, \\ q = \pm\dfrac{l}{B}\cdot\dfrac{\Theta_1(ai)H(u)}{H_1(ai)\Theta(u)} = \pm\dfrac{l\Delta\,\mathrm{am}(ai)\sin\mathrm{am}(u)}{B\cos\mathrm{am}(ai)}, \\ r = \pm\dfrac{l}{C}\cdot\dfrac{H(ai)\Theta_1(u)}{iH_1(ai)\Theta(u)} = \pm\dfrac{l\,\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ai)\Delta\,\mathrm{am}(u)}{iC}, \end{cases}$$

$$(24.)\quad \begin{cases} a'' = -\sin\varphi\sin\theta = \pm\dfrac{\Theta(ai)H_1(u)}{H_1(ai)\Theta(u)} = \pm\dfrac{\cos\mathrm{am}(u)}{\cos\mathrm{am}(ai)}, \\ b'' = -\cos\varphi\sin\theta = \pm\dfrac{\Theta_1(ai)H(u)}{H_1(ai)\Theta(u)} = \pm\dfrac{\Delta\,\mathrm{am}(ai)\sin\mathrm{am}(u)}{\cos\mathrm{am}(ai)}, \\ c'' = +\cos\theta \quad = \pm\dfrac{H(ai)\Theta_1(u)}{iH_1(ai)\Theta(u)} = \pm\dfrac{\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ai)\Delta\,\mathrm{am}(u)}{i}. \end{cases}$$

Les signes de p, q, r et ceux des cosinus a'', b'', c'' sont toujours les mêmes, et par dépendent par conséquent de la position des axes x', y', z' par rapport au plan invariable. Pour bien voir comment se meuvent ces axes dès l'origine de l'argument u, nous supposerons $t=0$ avec $u=0$, c. à d. $\tau=0$; alors on aura pour l'origine du mouvement:

$$p = \pm\frac{l}{A\cos\mathrm{am}(ai)} = \pm\sqrt{\frac{l^2-Ch}{A(A-C)}},$$
$$q = 0,$$
$$r = \pm\frac{l}{iC}\mathrm{tg}\,\mathrm{am}(ai) = \pm\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}};$$

et à cause de $q=0$ on a $b''=\frac{Aq}{l}=0$: donc l'axe Oy, à l'instant $t=0$, est dirigé suivant la ligne des noeuds. Supposons, pour fixer les idées, que, le plan invariable étant horizontal, l'axe du moment Oz_1 soit dirigé dans le sens de la pésanteur, et prenons la direction Ox' au dessus de ce plan; alors $x'Oz_1$ sera $>90^0$ et par suite a'' négatif. Il faut donc prendre p à l'origine avec le signe $-$, savoir $p=-\frac{l}{A\cos\operatorname{am}(ai)}$. Le temps allant à croître, on aura au commencement du mouvement:

$$p=-\frac{l\cos\operatorname{am}(u)}{A\cos\operatorname{am}(ai)},$$

et comme $\cos\operatorname{am}(u)$ diminue, l'angle $x'Oz_1$ diminuera aussi mais restant $>90^0$, jusqu'à $u=K$, c. à d. jusqu'à $t=\frac{K}{n}$. La direction Ox' à l'origine est perpendiculaire à la ligne des noeuds; peu après elle forme un angle aigu avec l'une des directions de cette droite, et un angle obtus avec son prolongement. Or un de ces angles est φ, et comme on suppose $y'ON=x'ON+90^0$, on prendra pour φ l'angle aigu; donc la direction de ON, à l'origine du mouvement, sera opposée à celle de Oy', et c'est à elle que se rapporte l'angle ψ. Le temps t et l'argument u allant à croître, l'angle $y'Oz_1$ deviendra obtus; donc on fera

$$\cos(y'Oz_1)=b''=\frac{Aq}{l}=-\frac{\Delta\operatorname{am}(ai)\sin\operatorname{am}(u)}{\cos\operatorname{am}(ai)};$$

par suite q sera négatif. Les valeurs de p et q étant négatives, ainsi que $B-A$, le produit $(B-A)pq$ sera aussi négatif; donc, en vertu de l'équation (1.) on a

$$C\partial r+(B-A)pq\,\partial t=0,$$

où ∂r doit être positif. Or

$$\partial r=\mp\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\cdot k^2\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(u)\,\partial u,$$

et comme $\sin\operatorname{am}(u)$, $\cos\operatorname{am}(u)$ et ∂u sont positifs, il faut prendre

$$r=-\sqrt{\frac{Ah-l^2}{C(A-C)}}\cdot\Delta\operatorname{am}(u)=-\frac{l\operatorname{tg}\operatorname{am}(ai)}{iC}\Delta\operatorname{am}(u),$$

pour que ∂r soit positif. Par suite

$$(25.)\qquad c''=\frac{Cr}{l}=\cos\theta=-\frac{\operatorname{tg}\operatorname{am}(ai)}{i}\Delta\operatorname{am}(u)$$

est aussi négatif; donc la direction de Oz' doit être prise au dessus du plan invariable.

Cela posé, on aura

$$(26.)\qquad \sin\varphi\sin\theta = \frac{\cos\operatorname{am}(u)}{\cos\operatorname{am}(ai)},\qquad \cos\varphi\sin\theta = \frac{\Delta\operatorname{am}(ai)\sin\operatorname{am}(u)}{\cos\operatorname{am}(ai)}.$$

La formule (25.) donne

$$(27.)\qquad \sin\theta = \frac{R}{\cos\operatorname{am}(ai)},$$

en posant, pour abréger,

$$R = \sqrt{(1-k^2\sin^2\operatorname{am}(ai)\sin^2\operatorname{am}(u))}.$$

Ce radical doit être pris avec le signe $+$, parceque $\sin\theta$ est toujours positif, l'angle θ ne pouvant excéder 180°. Des formules (26.) on tire

$$(28.)\quad \sin\varphi = \frac{\cos\operatorname{am}(u)}{R},\quad \cos\varphi = \frac{\Delta\operatorname{am}(ai)\sin\operatorname{am}(u)}{R},\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\operatorname{am}(u)}{\Delta\operatorname{am}(ai)\sin\operatorname{am}(u)}.$$

Cherchons maintenant l'angle ψ, compris entre la direction ON et une direction arbitraire Ox', ménée dans le plan invariable. Pour calculer cet angle, on se servira de l'une des formules:

$$(29.)\qquad \partial\psi = \frac{h-Cr^2}{l^2-C^2r^2}l\partial t,\qquad r\partial t = \partial\varphi - \cos\theta\,\partial\psi.$$

La première fait voir que ψ diminue quand t et u augmentent. Donc, il faut compter cet angle à partir de ON vers Ox' dans le sens du mouvement du noeud N. La seconde de ces formules est la plus avantageuse pour calculer l'angle ψ. On en tire

$$(30.)\qquad \partial\psi = \frac{\partial\varphi - r\partial t}{\cos\theta}.$$

La différentielle de la valeur $\operatorname{tg}\varphi$ (28.) donne

$$\partial\varphi = -\frac{\cos^2\varphi\,\partial\operatorname{am}(u)}{\sin^2\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u)},$$

et à cause de

$$\partial\operatorname{am}(u) = \Delta\operatorname{am}(u)\partial u,\qquad \cos^2\varphi = \frac{\Delta^2\operatorname{am}(ai)\sin^2\operatorname{am}(u)}{R^2},$$

cela se réduit à

$$\partial\varphi = -\frac{\Delta\operatorname{am}(ai)\Delta\operatorname{am}(u)\partial u}{R^2}$$

Après avoir substitué dans (30.) cette valeur de $\partial\varphi$, ainsi que celles de r et de $\cos\theta$, trouvées plus haut, on obtient

$$\partial\psi = \frac{i\Delta\operatorname{am}(ai)\partial u}{R^2\operatorname{tg}\operatorname{am}(ai)} - \frac{l\partial u}{Cn}.$$

Pour simplifier cette formule, il faut exprimer n en fonction de l'argument (ai). Or, en vertu des formules (20. et 21.) on a

$$\sqrt{(B-C)} = \sqrt{\frac{B(A-C)}{A}}\cdot\frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}(ai)}, \quad \sqrt{(Ah-l^2)} = \frac{l}{i}\sqrt{\frac{A-C}{C}}\cdot\mathrm{tg\,am}(ai),$$

et la substitution dans (10.) donne

$$(31.)\qquad n = \frac{l(A-C)}{iAC}\cdot\frac{\mathrm{tg\,am}(ai)}{\Delta\,\mathrm{am}(ai)},$$

par suite

$$\frac{l}{Cn} = \frac{iA}{A-C}\cdot\frac{\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\mathrm{tg\,am}(ai)},$$

$$\partial\psi = \frac{i\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\mathrm{tg\,am}(ai)}\left(\frac{1}{R^2}-\frac{A}{A-C}\right)\partial u,$$

ou bien aussi, après quelques réductions:

$$(32.)\qquad \partial\psi = \frac{ik^2\sin\mathrm{am}(ai)\cos\mathrm{am}(ai)\Delta\,\mathrm{am}(ai)\sin^2\mathrm{am}(u)\partial u}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ai)\sin^2\mathrm{am}(u)} - \frac{C}{A-C}\cdot\frac{i\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\mathrm{tg\,am}(ai)}\partial u.$$

Il est aisé de voir que $\frac{i\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\mathrm{tg\,am}(ai)}$ est la différentielle de $\log\sin\mathrm{am}(ai)$ par rapport à a; car

$$\frac{\partial\log\sin\mathrm{am}(ai)}{\partial a} = \frac{\cos\mathrm{am}(ai)}{\sin\mathrm{am}(ai)}\cdot\frac{\partial\,\mathrm{am}(ai)}{\partial a} \quad\text{et}\quad \frac{\partial\,\mathrm{am}(ai)}{\partial a} = i\Delta\,\mathrm{am}(ai),$$

donc

$$\frac{\partial\log\sin\mathrm{am}(ai)}{\partial a} = \frac{i\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\mathrm{tg\,am}(ai)}.$$

Or $\sin\mathrm{am}(ai) = \frac{H(ai)}{\sqrt{k}\,\Theta(ai)}$, donc

$$(33.)\qquad \frac{i\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{\mathrm{tg\,am}(ai)} = \frac{\partial\log H(ai)}{\partial u} - \frac{\partial\log\Theta(ai)}{\partial a}.$$

Par une propriété fondamentale des fonctions

$$Z(u) = \frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial u}\quad \text{(Fund. nova §. 53.)}$$

on a

$$(34.)\qquad \frac{k^2\sin\mathrm{am}(ai)\cos\mathrm{am}(ai)\Delta\,\mathrm{am}(ai)\sin^2\mathrm{am}(u)}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}(ai)\sin^2\mathrm{am}(u)} = Z(ai)+\tfrac{1}{2}Z(u-ai)-\tfrac{1}{2}Z(u+ai).$$

En vertu des formules (33. et 34.) l'expression (32.) se réduit à

$$\partial\psi = -\frac{C}{A-C}\frac{\partial\log H(ai)}{\partial a}\partial u + \frac{C}{A-C}\frac{\partial\log\Theta(ai)}{\partial a}\partial u + iZ(ai)\partial u$$
$$+\tfrac{1}{2}i[Z(u-ai)-Z(u+ai)]\,\partial u.$$

Mais

$$iZ(ai) = \frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial u}, \quad Z(u-ai) = \frac{\partial \log \Theta(u-ai)}{\partial u}, \quad Z(u+ai) = \frac{\partial \log \Theta(u+ai)}{\partial u},$$

donc

$$\partial\psi = -\frac{C}{A-C}\frac{\partial \log H(ai)}{\partial a}\partial u + \frac{A}{A-C}\frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}\partial u$$
$$+\tfrac{1}{2}i\left[\frac{\partial \log \Theta(u-ai)}{\partial u} - \frac{\partial \log \Theta(u+ai)}{\partial u}\right]\partial u.$$

Posant, pour abréger,

$$(35.)\qquad \frac{1}{A-C}\left[C\frac{\partial \log H(ai)}{\partial a} - A\frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}\right] = n',$$

et prenant l'intégrale, on obtient enfin

$$(36.)\qquad \psi + n'u + D = \tfrac{1}{2}i\log\left(\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)}\right),$$

D étant une constante arbitraire. Pour la déterminer soit $\psi = \psi_0$, pour l'instant $t = 0$. On aura

$$\psi_0 + D = \tfrac{1}{2}i\log\left(\frac{\Theta(-ai)}{\Theta(ai)}\right) = \tfrac{1}{2}i\log\left(\frac{\Theta(ai)}{\Theta(ai)}\right) = 0,$$

donc $D = -\psi_0$ et

$$\psi - \psi_0 + n'u = \tfrac{1}{2}i\log\left(\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)}\right).$$

Posant

$$(37.)\qquad \psi - \psi_0 + n'u = \psi - \psi_0 + nn't = \Omega$$

et passant des logarithmes aux nombres, on obtient

$$\sqrt{\left(\frac{\Theta(u+ai)}{\Theta(u-ai)}\right)} = e^{i\Omega}, \quad \sqrt{\left(\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)}\right)} = e^{-i\Omega},$$

et par suite

$$(38.)\qquad \cos\Omega = \frac{\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)}{2\sqrt{(\Theta(u+ai)\Theta(u-ai))}}, \quad \sin\Omega = \frac{\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)}{2i\sqrt{(\Theta(u+ai)\Theta(u-ai))}}.$$

Par la formule (3.) du §. 53. des *„Fundamenta nova"* on a

$$\sqrt{(\Theta(u+ai)\Theta(u-ai))}$$
$$= \frac{\Theta(u)\Theta(ai)}{\Theta(0)}\sqrt{(1-k^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u))} = \frac{\Theta(u)\Theta(ai)}{\Theta(0)}R;$$

donc

$$(39.)\qquad \begin{cases} \cos\Omega = \dfrac{\Theta(0)[\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)]}{2\Theta(u)\Theta(ai)R}, \\[2ex] \sin\Omega = \dfrac{\Theta(0)[\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)]}{2i\Theta(u)\Theta(ai)R}, \end{cases}$$

Il est facile maintenant de déterminer les directions des axes mobiles Ox, Oy, Oz, auxquels M. *Jacobi* rapporte la position du corps. Soit ON_0 la position initiale de ON, à l'instant t: l'angle NON_0 sera égal à la différence $\psi_0 - \psi$; donc, si l'on porte sur le plan invariable, a partir de ON_0 vers Ox_1, l'angle $nn't$, le second côté de cet angle déterminera une direction Ox de manière que $\angle xON = nn't - \psi_0 + \psi = \Omega$. D'ailleurs, il est évident que cette droite aura un mouvement uniforme dans le plan invariable; avec une vitesse nn'. Cela posé, ménons une perpendiculaire Oy à Ox, de sorte que $\angle yON_0 = 90^0 - \Omega$. Or les directions Ox, Oy avec la direction Oz opposée à Oz_1, formeront le système mentionné des axes mobiles, auxquels M. *Jacobi* rapporte la position du corps. Désignant par x, y, z les coordonnées d'un point, rapporté à ces axes, et posant

$$x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z',\quad y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z',\quad z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z',\quad \theta' = 180^0 - \theta,$$

on trouvera par la transformation des coordonnées, ou bien par la trigonométrie sphérique:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos\varphi\cos\Omega - \sin\varphi\sin\Omega\cos\theta',\\
\alpha' &= \cos\varphi\sin\Omega + \sin\varphi\cos\Omega\cos\theta',\\
\alpha'' &= -a'' = \sin\varphi\sin\theta,\\
\beta &= -\sin\varphi\cos\Omega - \cos\varphi\sin\Omega\cos\theta',\\
\beta' &= -\sin\varphi\sin\Omega + \cos\varphi\cos\Omega\cos\theta',\\
\beta'' &= -b'' = \cos\varphi\sin\theta,\\
\gamma &= \sin\Omega\sin\theta,\\
\gamma' &= -\cos\Omega\sin\theta,\\
\gamma'' &= \cos\theta' = -\cos\theta.
\end{aligned}$$

Il est maintenant aisé de parvenir aux formules rapportées à la fin de la page 99 du No. cité des „*Comptes rendus*." Il n'y a qu'à substituer dans les formules précédentes les valeurs trouvées de $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\sin\theta$, $\cos\theta'$, $\sin\Omega$, $\cos\Omega$. (Voyez les formules (25., 26., 27. et 39.)) On aura ainsi

$$\alpha = \frac{\Theta(0)}{2\Theta(u)\Theta(ai)\cos\operatorname{am}(ai)}\left[\frac{(\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(ai)\Delta\operatorname{am}(ai) + \sin\operatorname{am}(ai)\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u))\,\Theta(u+ai)}{R^2}\right]$$
$$+\frac{\Theta(0)}{2\Theta(u)\Theta(ai)\cos\operatorname{am}(ai)}\left[\frac{(\sin\operatorname{am}(u)\cos\operatorname{am}(ai)\Delta\operatorname{am}(ai) - \sin\operatorname{am}(ai)\cos\operatorname{am}(u)\Delta\operatorname{am}(u))\,\Theta(u-ai)}{R^2}\right].$$

Or, par les formules fondamentales de la théorie des fonctions elliptiques, on a

$$\frac{\sin \operatorname{am}(u) \cos \operatorname{am}(ai) \Delta \operatorname{am}(ai) \pm \sin \operatorname{am}(ai) \cos \operatorname{am}(u) \Delta \operatorname{am}(u)}{R^2}$$

$$= \sin \operatorname{am}(u \pm ai) = \frac{H(u \pm ai)}{\sqrt{k}.\, \Theta(u \pm ai)},$$

$$\cos \operatorname{am}(ai) = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)} \frac{H_1(ai)}{\Theta(ai)}, \quad \frac{\Theta(0)}{\sqrt{k'}} = \Theta(K) = \Theta_1(0),$$

donc, toutes réductions faites, on obtient

$$\alpha = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ai)+H(u-ai)]}{2\Theta(u) H_1(ai)};$$

de même on trouvera:

$$\beta = \frac{-\Theta(0)}{2\Theta(u)\Theta(ai)}\left[\frac{\cos \operatorname{am}(u+ai)\Theta(u+ai)+\cos \operatorname{am}(u-ai)\Theta(u-ai)}{\cos \operatorname{am}(ai)}\right.$$

$$= -\frac{\Theta(0)[H_1(u+ai)+H_1(u-ai)]}{2\Theta(u) H_1(ai)},$$

$$\gamma = \frac{\Theta(0)[\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)]}{2i\Theta(u)\Theta(ai) R} \cdot \frac{R}{\cos \operatorname{am}(ai)} = \frac{\Theta(0)\sqrt{\frac{k}{k'}} \cdot [\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)]}{2i\Theta(u) H_1(ai)},$$

ou, à cause de

$$\sqrt{\frac{k}{k'}} = \frac{H(K)}{\Theta(0)} \text{ (Fund. nova p. 173):}$$

$$\gamma = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)]}{2i\Theta(u) H_1(ai)};$$

$$\alpha' = \frac{\Theta(0)}{2i\Theta(u)\Theta(ai)\cos \operatorname{am}(ai)}[\sin \operatorname{am}(u+ai)\Theta(u+ai) - \sin \operatorname{am}(u-ai)\Theta(u-ai)]$$

$$= \frac{\Theta(0)[\Theta(u+ai)-H(u-ai)]}{2i\Theta(u)\sqrt{k'}.\, H_1(ai)} = \frac{\Theta_1(0)[H(u+ai)-H(u-ai)]}{2i\Theta(u) H_1(ai)},$$

$$\beta' = \frac{\Theta(0)[\cos \operatorname{am}(u-ai)\Theta(u-ai) - \cos \operatorname{am}(u+ai)\Theta(u+ai)]}{2i\Theta(u)\Theta(ai)\cos \operatorname{am}(ai)} = \frac{\Theta(0)[H_1(u-ai)-H_1(u+ai)]}{2i\Theta(u) H_1(ai)},$$

$$\gamma' = -\frac{\Theta(0)[\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)]R}{2\Theta(u)\Theta(ai) R \cos \operatorname{am}(ai)} = \frac{H_1(0)[\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)]}{2\Theta(u) H_1(ai)},$$

$$\alpha'' = -a'' = \frac{\Theta(ai) H_1(u)}{H_1(ai)\Theta(u)}, \quad \beta'' = -b'' = \frac{\Theta_1(ai) H(ai)}{H_1(ai)\Theta(u)}, \quad \gamma'' = -c'' = \frac{H(ai)\Theta_1(u)}{iH_1(ai)\Theta(u)}.$$

Ces expressions des neuf quantités: $\alpha, \beta, \ldots. \gamma''$ s'accordent parfaitement avec les formules de M. *Jacobi*.

La vitesse angulaire de la rotation instantanée $w = \sqrt{(p^2+q^2+r^2)}$ peut être décomposée en trois autres w_x, w_y, w_z, dont les axes de rotation sont les axes des coordonnées Ox, Oy, Oz. Or pour déterminer ces com-

posantes, on a

$$(40.)\quad \begin{cases} w_x = \alpha p + \beta q + \gamma r \\ = (p\cos\varphi - q\sin\varphi)\cos\Omega - [(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cos\theta' - r\sin\theta]\sin\Omega, \\ w_y = \alpha' p + \beta' q + \gamma' r \\ = (p\cos\varphi - q\sin\varphi)\sin\Omega + [(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cos\theta' - r\sin\theta]\cos\Omega, \\ w_z = \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r = -\frac{Ap^2+Bq^2+Cr^2}{l} = -\frac{h}{l}. \end{cases}$$

D'ailleurs, en vertu des formules trouvées plus haut, on a

$$p\sin\varphi = -\frac{l\cos^2\text{am}(u)}{AR\cos\text{am}(ai)}, \qquad q\cos\varphi = -\frac{l\Delta^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)}{BR\cos\text{am}(ai)},$$

$$q\cos\varphi = -\frac{l\Delta\,\text{am}(ai)\sin\text{am}(u)\cos\text{am}(u)}{AR\cos\text{am}(ai)}, \quad q\sin\varphi = -\frac{l\Delta\,\text{am}(ai)\sin\text{am}(u)\cos\text{am}(u)}{BR\cos\text{am}(ai)};$$

et par conséquent

$$(41.)\qquad p\sin\varphi + q\cos\varphi = -\frac{l}{AB}\cdot\frac{B\cos^2\text{am}(u) + A\Delta^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)}{R\cos\text{am}(ai)},$$

$$(42.)\qquad p\cos\varphi - q\sin\varphi = -\frac{l(B-A)}{AB}\cdot\frac{\Delta\,\text{am}(ai)\sin\text{am}(u)\cos\text{am}(u)}{R\cos\text{am}(ai)}.$$

Après avoir substitué la valeur $1-k^2\sin^2\text{am}(ai)$ de $\Delta^2\text{am}(ai)$, le numérateur de la formule (41.) se présentera sous la forme

$$B + (A-B)\sin^2\text{am}(u) - Ak^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u).$$

Or par les formules (18. et 8.) on a

$$A - B = \frac{-k^2A(B-C)\sin^2\text{am}(ai)}{C},$$

donc la valeur précédente se réduit à

$$\frac{B}{C}[C - Ak^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)]$$

et la formule (41.) se transforme en celle-ci

$$p\sin\varphi + q\cos\varphi = -\frac{l[C - Ak^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)]}{AC\cos\text{am}(ai)R}.$$

En vertu de cela et eu égard aux valeurs de $\sin\theta$, $\cos\theta'$ on obtient

$$(p\sin\varphi + q\cos\varphi)\cos\theta' - r\sin\varphi$$
$$= \frac{r[C - Ak^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)]}{AR\cos\text{am}(ai)} - \frac{rR}{\cos\text{am}(ai)} = \frac{r(C-A)}{AR\cos\text{am}(ai)};$$

mais par la formule (31.) on a

$$\frac{C-A}{A} = -\frac{iCn\Delta\,\text{am}(ai)}{l\,\text{tg}\,\text{am}(ai)},$$

donç

$$\frac{r(C-A)}{A} = n\Delta\,\mathrm{am}(ai)\Delta\,\mathrm{am}(u),$$

$$(43.)\qquad (p\sin\varphi+q\cos\varphi)\cos\theta'-r\sin\theta = \frac{n\Delta\,\mathrm{am}(ai)\Delta\,\mathrm{am}(u)}{R\cos\mathrm{am}(ai)}.$$

Tâchons maintenant à simplifier la formule (42.). On tire des formules (8., 19., 20.)

$$B-A = \frac{-k^2(B-C)(Ah-l^2)}{l^2-Ch},\qquad \frac{l\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{B\cos\mathrm{am}(ai)} = \sqrt{\left(\frac{l^2-C^2h}{(B-C)B}\right)},$$

donc

$$\frac{l(B-A)\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{AB\cos\mathrm{am}(ai)} = \frac{-k^2\sqrt{((B-C)(Ah-l^2))}.\sqrt{(Ah-l^2)}}{A\sqrt{((l^2-Ch)B)}}.$$

Mais

$$\sqrt{((B-C)(Ah-l^2))} = n\sqrt{(ABC)},\qquad \sqrt{\frac{Ah-l^2}{l^2-Ch}} = -i\sqrt{\frac{A}{C}}\cdot\sin\mathrm{am}(ai),$$

donc

$$\frac{l(B-A)\Delta\,\mathrm{am}(ai)}{AB\cos\mathrm{am}(ai)} = ik^2n\sin\mathrm{am}(ai);$$

par conséquent la valeur (42.) se réduit à

$$(44.)\qquad p\cos\varphi-q\sin\varphi = \frac{-ik^2n\sin\mathrm{am}(ai)\sin\mathrm{am}(u)\cos\mathrm{am}(u)}{R}.$$

En vertu des formules (40., 43. et 44.) on obtient

$$w_x = \frac{n\Theta(0)[\Delta\,\mathrm{am}(u-ai)\Theta(u-ai)-\Delta\,\mathrm{am}(u+ai)\Theta(u+ai)]}{2i\Theta(u)\Theta(ai)\cos\mathrm{am}(ai)},$$

et comme

$$\Delta\,\mathrm{am}(u\pm ai) = \sqrt{k'}\cdot\frac{\Theta_1(u\pm ai)}{\Theta(u\pm ai)},\qquad \cos\mathrm{am}(ai) = \sqrt{\left(\frac{k'}{k}\right)}\cdot\frac{H_1(ai)}{\Theta(ai)},$$

on a

$$(45.)\qquad w_x = \frac{n\sqrt{k}.\Theta(0)[\Theta_1(u-ai)-\Theta_1(u+ai)]}{2i\Theta(u)H_1(ai)}$$

$$= \frac{n\sqrt{k'}.H_1(0)[\Theta_1(u-ai)-\Theta_1(u+ai)]}{2i\Theta(u)H_1(ai)}.$$

On trouvera de même

$$(46.)\qquad w_y = \frac{n\Theta(0)[\Delta\,\mathrm{am}(u-ai)\Theta(u-ai)+\Delta\,\mathrm{am}(u+ai)\Theta(u+ai)]}{2\Theta(u)\Theta(ai)\cos\mathrm{am}(ai)}$$

$$= \frac{n\sqrt{k'}.H_1(0)[\Theta_1(u-ai)+\Theta_1(u+ai)]}{2\Theta(u)H_1(ai)}.$$

Enfin

$$(47.)\qquad w_z = -\frac{h}{l}.$$

Les formules (45., 46. et 47.) diffèrent des formules de la page 100 du No. cité des Comptes rendus, par les signes de $\Theta_1(u+ai)$, w_2 et par le coefficient f, qui est à remplacer, comme on le voit bien, par

$$n\sqrt{k'} = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}\cdot\sqrt[4]{\frac{(A-C)(Bh-l^2)}{(B-C)(Ah-l^2)}}.$$

Les formules de la page 100 du No. cité des Comptes rendus, données pour le développement des numérateurs des neuf cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \ldots. \gamma''$ peuvent être déduites très simplement des expressions connues

$$\Theta(u) = 1+2\sum_1^\infty(-1)^m q^{m^2}\cos(2mx),\quad H(u) = 2\sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}\sin(2m-1)x.$$

Substituant dans ces formules $u\pm ai$ au lieu de u, $x\pm\frac{\pi ai}{2K}$ au lieu de $x=\frac{\pi u}{2K}$ et faisant de plus $a=bK'$, on aura

$$\Theta(u\pm ai) = 1+2\sum_1^\infty(-1)^m q^{m^2}\cos\left(2mx\pm\frac{2mb\pi K'.i}{2K}\right),$$

$$H(u\pm ai) = 2\sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}\sin\left[(2m-1)x\pm\frac{(2m-1)b\pi K'.i}{2K}\right].$$

Or

$$\cos\left(2mx\pm\frac{2mb\pi K'.i}{2K}\right) = \tfrac{1}{2}\left(e^{2mix}.e^{\mp\frac{2mb\pi K'}{2K}}+e^{-2mix}.e^{\pm\frac{2mb\pi K'}{2K}}\right)$$
$$= \tfrac{1}{2}(q^{\pm mb}e^{2mix}+q^{\mp mb}e^{-2mix}),$$

$$\sin\left[(2m-1)x\pm\frac{(2m-1)b\pi K'}{2K}.i\right] = \frac{q^{\pm\frac{1}{2}(2m-1)b}.e^{(2m-1)ix}-q^{\mp\frac{1}{2}(2m-1)b}.e^{-(2m-1)ix}}{2i},$$

donc

$$\Theta(u+ai) = 1+\sum_1^\infty(-1)^m q^{m^2}(q^{mb}e^{2mix}+q^{-mb}e^{-2mix}),$$

$$\Theta(u-ai) = 1+\sum_1^\infty(-1)^m q^{m^2}(q^{-mb}e^{2mix}+q^{mb}e^{-2mix}),$$

$$iH(u+ai) = \sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}(q^{\frac{1}{2}(2m-1)b}.e^{(2m-1)ix}-q^{-\frac{1}{2}(2m-1)b}.e^{-(2m-1)ix}),$$

$$iH(u-ai) = \sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}(q^{-\frac{1}{2}(2m-1)b}.e^{(2m-1)ix}-q^{\frac{1}{2}(2m-1)b}.e^{-(2m-1)ix});$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2}[\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)] = 1+\sum_1^\infty(-1)^m q^{m^2-mb}(1+q^{2mb})\cos(2mx),$$

$$\frac{1}{2i}[\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)] = \sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{m^2-mb}(1-q^{2mb})\sin(2mx),$$

$$\frac{1}{2}[H(u+ai)+H(u-ai)] = \sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2-\frac{1}{2}(2m-1)b}(1+q^{(2m-1)b})\sin(2m-1)x,$$

$$\frac{1}{2i}[H(u+ai)-H(u-ai)] = \sum_1^\infty(-1)^{m-1}q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2-\frac{1}{2}(2m-1)b}(1-q^{(2m-1)b})\cos(2m-1)x.$$

Changeant u en $K-u$ et x en $\frac{1}{2}\pi - x$, on aura

$$\frac{1}{2}[\Theta_1(u-ai)+\Theta_1(u+ai)] = 1+\sum_1^\infty q^{m^2-mb}(1+q^{2mb})\cos(2mx),$$

$$\frac{1}{2i}[\Theta_1(u-ai)-\Theta_1(u+ai)] = \sum_1^\infty q^{m^2-mb}(1-q^{2mb})\sin(2mx),$$

$$\frac{1}{2}[H_1(u-ai)+H_1(u+ai)] = \sum_1^\infty q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2-\frac{1}{2}(2m-1)b}(1+q^{(2m-1)b})\cos(2m-1)x,$$

$$\frac{1}{2i}[H_1(u-ai)-H_1(u+ai)] = \sum_1^\infty q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2-\frac{1}{2}(2m-1)b}(1-q^{(2m-1)b})\sin(2m-1)x.$$

Ces séries sont très convergentes, parceque $q=e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ est ordinairement une fraction, dont la valeur ne surpasse pas $\frac{1}{23}$, et $b<1$. On se bornera aux puissances q^{9-36}, q^{6-26}, si l'on ne veut pousser les aproximations que jusqu'au 7me chiffre décimal.

On parviendra aux formules (1. ... 8.) du No. cité des Comptes rendus en opérant de la manière suivante:

Par les expressions de $\Theta(u)$, $H(u)$ en produits infinis (Fundam. nova §. 61.) on a

$$Z = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}+\frac{2Ky}{\pi}\right)}{H\left(\frac{2Ky}{\pi}\right)}$$

$$= \frac{[1-2q\cos 2(x+y)+q^2][1-2q^3\cos 2(x+y)+q^6][1-2q^5\cos 2(x+y)+q^{10}]\dots}{2q^{\frac{1}{4}}\sin y[1-2q^2\cos(2y)+q^4][1-2q^4\cos(2y)+q^8][1-2q^6\cos(2y)+q^{12}]\dots}.$$

Faisant ici $e^{2ix}=v$, $e^{2iy}=z$, on obtient

$$1-2q^n\cos(2y)+q^{2n} = (1-q^ne^{2iy})(1-q^ne^{-2iy}) = (1-q^nz)(1-q^nz^{-1}),$$

$$1-2q^n\cos 2(x+y)+q^{2n} = (1-q^nvz)(1-q^nv^{-1}z^{-1}),\quad \sin y = \frac{z-1}{2iz^{\frac{1}{2}}};$$

et par suite

$$Z=\frac{iz^{\frac{1}{2}}(1-qvz)(1-q^3vz)(1-q^5vz)\dots\times(1-qv^{-1}z^{-1})(1-q^3v^{-1}z^{-1})(1-q^5v^{-1}z^{-1})\dots}{q^{\frac{1}{4}}(z-1)(1-q^2z)(1-q^4z)(1-q^6z)\dots\times(1-q^2z^{-1})(1-q^4z^{-1})(1-q^6z^{-1})\dots}.$$

Cette fonction de z peut être décomposée en fractions simples sous la forme

$$Z = \frac{iz^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{A_0}{z-1}+\sum_1^\infty\frac{A_m}{1-q^{2m}z}+\sum_1^\infty\frac{B_m}{z-q^{2m}}\right].$$

Pour déterminer les coefficients A_0, A_m, B_m on a

$$(48.)\qquad A_0 = \left[\frac{q^{\frac{1}{4}}Z(z-1)}{iz^{\frac{1}{2}}}\right]_{z=1}$$

$$= \frac{(1-qv)(1-q^3v)(1-q^5v)\dots\times(1-qv^{-1})(1-q^3v^{-1})(1-q^5v^{-1})\dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots\times(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots},$$

$$A_m = \left[\frac{q^{\frac14} Z(1-q^{2m}z)}{iz^{\frac12}}\right]_{z=q^{-2m}}$$

$$= \frac{(1-q^{1-2m}v)(1-q^{3-2m}v)(1-q^{5-2m}v)\dots.(1-q^{-1}v)(1-qv)\dots.\times(1-q^{1+2m}v^{-1})\dots.}{(q^{-2m}-1)(1-q^{2-2m})(1-q^{4-2m})\dots.(1-q^{-2})(1-q^2)\dots.\times(1-q^{2+2m})\dots.},$$

$$B_m = \left[\frac{q^{\frac14} Z(z-q^{2m})}{iz^{\frac12}}\right]_{z=q^{2m}}$$

$$= \frac{q^{2m}(1-q^{1+2m}v)(1-q^{3+2m}v)(1-q^{5+2m}v)\dots.\times(1-q^{1-2m}v^{-1})(1-q^{3-2m}v^{-1})\dots.}{(q^{2m}-1)(1-q^{2+2m})(1-q^{4+2m})\dots.\times(1-q^{2-2m})(1-q^{4-2m})\dots.}.$$

Comparant les expressions de A_m et B_m à celle de A_0, il est aisé de voir que

$$A_m = -q^m v^m A_0, \quad B_m = q^m v^{-m} A_0;$$

donc

$$Z = \frac{iz^{\frac12} A_0}{q^{\frac14}}\left[\frac{1}{z-1} - \sum_1^\infty \frac{q^m v^m}{1-q^{2m}z} + \sum_1^\infty \frac{q^m v^{-m} z^{-1}}{1-q^{2m}z^{-1}}\right].$$

Posant $\frac{2Kx}{\pi} = u$, $\frac{2Ky}{\pi} = ai = ibK'$, on a $z = e^{-\frac{\pi bK'}{K}} = q^b$, $v^m = e^{2mix} = e^{\frac{\pi ui}{K}}$,

$Z = \frac{\Theta(u+ai)}{H(ai)}$, et par conséquent

$$(49.) \qquad \frac{\Theta(u+ai)}{H(ai)} = \frac{iA_0}{q^{\frac14}}\left[\frac{q^{\frac12 b}}{q^b-1} - \sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac12 b}.e^{2mix}}{1-q^{2m+b}} + \sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac12 b}.e^{-2mix}}{1-q^{2m-b}}\right].$$

Il reste à déterminer la valeur de A_0. Or d'après l'expression de $\Theta(u)$ on a

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{(1-qv)(1-q^3v)(1-q^5v)\dots.\times(1-qv^{-1})(1-q^3v^{-1})(1-q^5v^{-1})\dots.}{[(1-q)(1-q^3)\dots.]^2},$$

ce qui réduit la formule (48.) à

$$A_0 = \frac{\Theta(u)[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots.]^2}{\Theta(0)[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots.]^2},$$

et par une formule de la page 89 des „*Fundam. nova*", on a

$$\frac{[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots.]^2}{[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots.]^2} = \frac{\pi q^{\frac14}}{\sqrt{k.K}};$$

donc

$$A_0 = \frac{\Theta(u)\pi q^{\frac14}}{\Theta(0)\sqrt{k.K}}.$$

Or, comme

$$\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = \Theta(K) = \Theta_1(0), \qquad \sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)} = H(K) = H_1(0),$$

on obtient

$$\frac{\pi}{\sqrt{k.K}} = \frac{2}{\Theta_1(0)H_1(0)}$$



et par suite

$$A_0 = \frac{2\Theta(u).q^{\frac{1}{4}}}{\Theta(0)\Theta_1(0)H_1(0)}.$$

Après avoir substitué cette valeur de A_0 dans la formule (49.), elle se transformera en

$$(50.)\qquad H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0)\frac{i\Theta(u+ai)}{2H(ai)\Theta(u)}$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}+\sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}b}.e^{2mix}}{1-q^{2m+b}}-\sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}b}.e^{-2mix}}{1-q^{2m-b}}.$$

Mettant ici $-u$ au lieu de u, et remarquant que $\Theta(-u+ai)=\Theta(u-ai)$, $\Theta(-u)=\Theta(u)$ on verra que cette formule se réduit à

$$(51.)\qquad H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0)\frac{i\Theta(u-ai)}{2H(ai)\Theta(u)}$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}+\sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}b}.e^{-2mix}}{1-q^{2m+b}}-\sum_1^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}b}.e^{2mix}}{1-q^{2m-b}}.$$

Prenant la somme et la différence des valeurs (50. 51.) on obtient

$$H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0).\frac{i[\Theta(u+ai)+\Theta(u-ai)]}{2H(ai)\Theta(u)}$$

$$= \frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1-q^b}+2(q^{\frac{1}{2}b}-q^{-\frac{1}{2}b})\sum_1^\infty \frac{q^m(1+q^{2m})\cos(2mx)}{(1-q^{2m+b})(1-q^{2m-b})},$$

$$H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0).\frac{\Theta(u+ai)-\Theta(u-ai)}{2H(ai)\Theta(u)} = 2(q^{\frac{1}{2}b}+q^{-\frac{1}{2}b})\sum_1^\infty \frac{q^m(1-q^{2m})\sin(2mx)}{(1-q^{2m+b})(1-q^{2m-b})}.$$

Telles sont précisément les formules (1. et 2. page 101) du No. cité des „Comptes rendus." Les formules (3. et 4.) de la page suivante peuvent aussi être tirées des formules (50. 51.). En effet: les formules rapportées au commencement de la page 101, et qui ne diffèrent pas, au fond, des formules du §. 62 des „*Fundam. nova*", donnent

$$\frac{H(u+ai)}{\Theta(ai)} = -e^{-ix}.\frac{\Theta[u-i(K'-a)]}{H[i(K'-a)]}.$$

En vertu de cette formule, et de (51.), dans laquelle on changera a en $K'-a$, et par suite b en $1-b$, on trouve

$$(52.)\qquad H_1(0)\Theta(0)\Theta_1(0).\frac{H(u+ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)}$$

$$= -\frac{1}{i}\left[\frac{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}.e^{-ix}}{1-q^{1-b}}+\sum_1^\infty \frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}.e^{-(2m+1)ix}}{1-q^{2m+1-b}}-\sum_2^\infty \frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b}.e^{(2m-1)ix}}{1-q^{2m-1+b}}\right].$$

Substituant $-u$ à u, et remarquant que $H(-u+ai)=-H(u-ai)$, cette

formule se réduit à

$$(53.)\qquad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H(u-ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{1}{i}\left[\frac{q^{\frac12-\frac12 b}\cdot e^{ix}}{1-q^{1-b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac12-\frac12 b}\cdot e^{(2m+1)ix}}{1-q^{2m+1-b}}-\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac12+\frac12 b}\cdot e^{-(2m-1)ix}}{1-q^{2m-1+b}}\right].$$

En prenant la somme et la différence des formules (52. 53.), on obtiendra:

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H(u+ai)+H(u-ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{2q^{\frac12-\frac12 b}\sin x}{1-q^{1-b}}+2\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac12-\frac12 b}\sin(2m+1)x}{1-q^{2m+1-b}}+2\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac12+\frac12 b}\sin(2m-1)x}{1-q^{2m-1+b}},$$

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H(u+ai)-H(u-ai)}{2i\Theta(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{2q^{\frac12-\frac12 b}\cos x}{1-q^{1-b}}+2\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac12-\frac12 b}\cos(2m+1)x}{1-q^{2m+1-b}}-2\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac12+\frac12 b}\cos(2m-1)x}{1-q^{2m-1+b}},$$

et reunissant les termes analogues par rapport aux sin et cos, on aura enfin

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H(u+ai)+H(u-ai)}{2\Theta(ai)\Theta(u)}$$

$$=2\left(q^{\frac12 b}+q^{-\frac12 b}\right)\sum_0^\infty\frac{q^{\frac12(2m+1)}(1-q^{2m+1})\sin(2m+1)x}{(1-q^{2m+1+b})(1-q^{2m+1-b})};$$

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H(u+ai)-H(u-ai)}{2i\Theta(ai)\Theta(u)}$$

$$=2\left(q^{-\frac12 b}-q^{\frac12 b}\right)\sum_0^\infty\frac{q^{\frac12(2m+1)}(1+q^{2m+1})\cos(2m+1)x}{(1-q^{2m+1-b})(1-q^{2m+1+b})}.$$

Pour parvenir aux formules (7. et 8.) du No. cité des „Comptes rendus", il faut décomposer en fractions simples l'expression

$$\frac{\Theta_1(u+ai)}{H_1(ai)}$$

$$=\frac{z^{\frac12}(1+qvz)(1+q^3vz)(1+q^5vz)\ldots\times(1+qv^{-1}z^{-1})(1+q^3v^{-1}z^{-1})(1+q^5v^{-1}z^{-1})\ldots}{q^{\frac14}(1+z)(1+q^2z)(1+q^4z)(1+q^6z)\ldots\times(1+q^2z^{-1})(1+q^4z^{-1})(1+q^6z^{-1})\ldots}.$$

Posant

$$\frac{\Theta_1(u+ai)}{H_1(ai)}=\frac{z^{\frac12}}{q^{\frac14}}\left[\frac{A_1}{1+z}+\sum_1^\infty\frac{A_m}{1+q^{2m}z}+\sum_1^\infty\frac{B_m}{z+q^{2m}}\right]$$

on trouve

$$A_0=\frac{(1-qv)(1-q^3v)(1-q^5v)\ldots\times(1-qv^{-1})(1-q^3v^{-1})(1-q^5v^{-1})\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots\times(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}$$

$$=\frac{2\Theta(u)\,q^{\frac14}}{H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)},$$

$$A_m=q^m v^m A_0,\qquad B_m=q^m v^{-m}A_0;$$

donc

$$(54.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{\Theta_1(u+ai)}{2H_1(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{z^{\frac{1}{2}}}{1+z}+\sum_1^\infty\frac{q^m v^m z^{\frac{1}{2}}}{1+q^{2m}z}+\sum_1^\infty\frac{q^m v^{-m} z^{-\frac{1}{2}}}{1+q^{2m}z^{-1}}$$

$$=\frac{q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b}+\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac{1}{2}b}.\,e^{2mix}}{1+q^{2m+b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac{1}{2}b}.\,e^{-2mix}}{1+q^{2m-b}};$$

d'où l'on tire, en changeant u en $-u$,

$$(55.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{\Theta_1(u-ai)}{2H_1(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b}+\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac{1}{2}b}.\,e^{-2mix}}{1+q^{2m+b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac{1}{2}b}.\,e^{2mix}}{1+q^{2m-b}}.$$

En vertu de ces deux formules on a

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{\Theta_1(u+ai)+\Theta_1(u-ai)}{2H_1(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{2q^{\frac{1}{2}b}}{1+q^b}+2(q^{\frac{1}{2}b}+q^{-\frac{1}{2}b})\sum_1^\infty\frac{q^m(1+q^{2m})\cos(2mx)}{(1+q^{2m+b})(1+q^{2m-b})},$$

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{\Theta_1(u-ai)-\Theta_1(u+ai)}{2iH_1(ai)\Theta(u)}$$

$$=(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\sum_1^\infty\frac{q^m(1-q^{2m})\sin(2mx)}{(1+q^{2m+b})(1+q^{2m-b})}.$$

Au moyen de la formule (55.), changeant a en $K'-a$ et b en $1-b$, on obtient

$$(56).\ H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H_1(u+ai)}{2\Theta_1(ai)\Theta(u)}=H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{e^{-ix}\Theta_1[u-i(K'-a)]}{H_1[i(K'-a)]\Theta(u)}$$

$$=\frac{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}.\,e^{-ix}}{1+q^{1-b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}.\,e^{-(2m+1)ix}}{1+q^{2m+1-b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b}.\,e^{(2m-1)ix}}{1+q^{m-1+b}},$$

et, changent u en $-u$ dans cette dernière formule, on en déduit

$$(57.)\quad H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H_1(u-ai)}{2\Theta_1(ai)\Theta(u)}$$

$$=\frac{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}.\,e^{ix}}{1+q^{1-b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b}.\,e^{(2m+1)ix}}{1+q^{2m+1-b}}+\sum_1^\infty\frac{q^{m-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}b}.\,e^{-(2m-1)x}}{1+q^{2m-1+b}}.$$

Prenant la somme et la différence des valeurs (56. 57.) et réunissant les termes analogues par rapport aux sin et cos, on trouve enfin

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H_1(u+ai)+H_1(u-ai)}{2\Theta_1(ai)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}+q^{\frac{1}{2}b})\sum_{0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}(1+q^{2m+1})\cos(2m+1)x}{(1+q^{2m+1-b})(1+q^{2m-1+b})},$$

$$H_1(0)\,\Theta(0)\,\Theta_1(0)\cdot\frac{H_1(u+ai)-H(u-ai)}{2i\Theta_1(ai)\,\Theta(u)}$$

$$= 2(q^{-\frac{1}{2}b}-q^{\frac{1}{2}b})\sum_{0}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2m+1)}(1-q^{2m+1})\sin(2m+1)x}{(1+q^{2m+1-b})(1+q^{2m+1+b})}.$$

Il est facile de développer aussi en série assez convergeante la valeur de n', qui détermine la rotation de l'axe Ox dans le plan invariable. Pour cela développons les valeurs

$$\frac{\partial\log H(ai)}{\partial a},\qquad \frac{\partial\log\Theta(ai)}{\partial a}.$$

Or

$$\frac{\partial\log\Theta(u)}{\partial u} = \frac{\partial\left(\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)}\right)}{\partial u} = Z(u),$$

et par la formule (1.) du §. 47. des „*Fundam. nova*" on a

$$Z(u) = \frac{2\pi}{K}\left[\frac{q\sin 2x}{1-q^2}+\frac{q^2\sin 4x}{1-q^4}+\frac{q^3\sin 6x}{1-q^6}+\cdots\right];$$

posant $u=ai$, on trouvera

$$\text{(58.)}\qquad \frac{\partial\log\Theta(ai)}{\partial a} = \frac{\pi}{K}\left[\frac{q(q^b-q^{-b})}{1-q^2}+\frac{q^2(q^{2b}-q^{-2b})}{1-q^4}+\frac{q^3(q^{3b}-q^{-3b})}{1-q^6}+\cdots\right].$$

Par une des formules (page 101) du No. cité des „Comptes rendus", on a

$$H(ai) = ig\,\Theta[i(K'-a)],\quad \text{où}\quad g = e^{-\frac{\pi K'}{4K}+\frac{a\pi}{2K}} = q^{\frac{1}{4}}e^{\frac{a\pi}{2K}};$$

par suite

$$\log H(ai) = \log(iq^{\frac{1}{4}})+\frac{\pi a}{2K}+\log\Theta[i(K'-a)],$$

$$\frac{\partial\log H(ai)}{\partial a} = \frac{\pi}{2K}+\frac{\partial\log\Theta[i(K'-a)]}{\partial a} = \frac{\pi}{2K}-\frac{\partial\log\Theta[i(K'-a)]}{\partial(K'-a)}.$$

Pour avoir le développement du dernier terme de cette formule, on n'a qu'à changer b en $1-b$ dans la formule (58.). Cela donne

$$\frac{\partial\log H(ai)}{\partial a} = \frac{\pi}{K}\left[\tfrac{1}{2}-\frac{q(q^{1-b}-q^{-1+b})}{1-q^2}-\frac{q^2(q^{2-2b}-q^{-2+2b})}{1-q^4}-\cdots\right]$$

$$= \frac{\pi}{K}\left[\tfrac{1}{2}+\frac{q^b(1-q^{2-2b})}{1-q^2}+\frac{q^{2b}(1-q^{4-4b})}{1-q^4}+\cdots\right];$$

Donc

$$n' = \frac{1}{A-C}\left[C\frac{\partial \log H(ai)}{\partial a} - A\frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}\right]$$

$$= \frac{1}{A-C}\cdot\frac{\pi}{K}\left[\tfrac{1}{2}C + \frac{Cq^b(1-q^{2-2b})+Aq^{1-b}(1-q^{2b})}{1-q^2}+\cdots\right].$$

Observons que cette valeur est toujours positive: donc le mouvement de Ox se fait toujours dans le même sens.

Développons encore la valeur angulaire Ω, qui sert à déterminer la position de la ligne mobile des noeuds par rapport à l'axe Ox. On a trouvé plus haut

$$\Omega = \tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)},$$

et d'après les formules du §. 52. des „*Fundam. nova*" on a

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^u Z(u)\partial u = -2\left[\frac{q\cos 2x}{1-q^2}+\frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)}+\frac{q^3\cos 6x}{3(1-q^6)}+\cdots\right]+\text{const.}$$

De là, en substituant $u\mp ai$ au lieu de u, on obtient

$$\log\Theta(u-ai) = -\left[\frac{q(e^{2ix}.q^{-b}+e^{-2ix}.q^b)}{1-q^2}+\frac{q^2(e^{4ix}.q^{-2b}+e^{-4ix}.q^{2b})}{2(1-q^4)}+\cdots\right]+\text{const.}$$

$$\log\Theta(u+ai) = -\left[\frac{q(e^{-2ix}.q^{-b}+e^{2ix}.q^b)}{1-q^2}+\frac{q^2(e^{-4ix}.q^{-2b}+e^{4ix}.q^{2b})}{2(1-q^4)}+\cdots\right]+\text{const.}$$

par conséquent

$$\Omega = \tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)} = \frac{q^{1-b}(1-q^{2b})}{1-q^2}\sin 2x + \frac{q^{2-2b}(1-q^{4b})}{2(1-q^4)}\sin 4x+\cdots$$

Cette valeur peut aussi être exprimé par une fonction elliptique de troisième espèce, savoir

$$(59.)\quad \Omega = \tfrac{1}{2}i\log\frac{\Theta(u-ai)}{\Theta(u+ai)} = i\Pi(u,ai) - iuZ(ai)\quad (\textit{Fundam. nova}\ \text{p. } 146)$$

où

$$\Pi(u,ai) = \int_0^u \frac{k^2\sin\text{am}(ai)\cos\text{am}(ai)\Delta\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)\partial u}{1-k^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)},$$

$$Z(ai) = \frac{1}{K}\int_0^K \frac{k^2\sin\text{am}(ai)\cos\text{am}(ai)\Delta\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)\partial u}{1-k^2\sin^2\text{am}(ai)\sin^2\text{am}(u)}.$$

La valeur de Ω est nulle d'abord à l'instant $t=0$; parcequ'alors $u=0$, $x=0$. Puis elle croît et atteint un maximum, pour lequel la dérivée de (59.) est nulle. Donc, pour déterminer la valeur de u, qui repond

à ce maximum, on aura

$$\frac{ik^2 \sin \operatorname{am}(ai) \cos \operatorname{am}(ai) \varDelta \operatorname{am}(ai) \sin^2 \operatorname{am}(u)}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ai) \sin^2 \operatorname{am}(u)} = iZ(ai) = \frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a},$$

ou bien

$$\frac{k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ai) \sin^2 \operatorname{am}(u)}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am}(ai) \sin^2 \operatorname{am}(u)} = \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am}(ai)}{i \varDelta \operatorname{am}(ai)} \frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a} = \frac{\frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}}{\frac{\partial \log H(ai)}{\partial a} - \frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}},$$

d'où l'on tire

$$\sin \operatorname{am}(u) = \pm \frac{1}{k \sin \operatorname{am}(ai)} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}}{\frac{\partial \log H(ai)}{\partial a}}} = \pm \frac{\Theta(ai)}{\sqrt{k} . H(ai)} \cdot \sqrt{\frac{\frac{\partial \log \Theta(ai)}{\partial a}}{\frac{\partial \log H(ai)}{\partial a}}}.$$

Par cette formule on trouve u, et par suite $t = \frac{u}{n}$, qui repondent au maximum de Ω.

A l'instant $t = \frac{K}{n}$ la valeur de Ω s'évanouit encore, parcequ'alors

$$\Omega = \tfrac{1}{2} i \log \frac{\Theta(K - ai)}{\Theta(K + ai)} = i\Pi(K, ai) - iKZ(ai) = iKZ(ai) - iKZ(ai) = 0;$$

après quoi elle réprend les mêmes valeurs dans le sens négatif; et ainsi de suite.

Il est facile de discuter aussi les autres circonstances du mouvement.

St. Petersbourg le 20 Mai 1850.

11.

Über die Bedingung, unter welcher eine homogene ganze Function von n unabhängigen Variabeln durch lineäre Substitutionen von n andern unabhängigen Variabeln auf eine homogene Function sich zurückführen läfst, die eine Variable weniger enthält.

(Von Herrn Dr. *O. Hesse*, Prof. der Math. an der Universität zu Königsberg in Pr.)

Es sei u eine beliebige homogene ganze Function $m$ter Ordnung von den n Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$ und $u_1, u_2, \dots u_n$ seien die ersten, $u_{11}, u_{12}, \dots u_{22}, \dots u_{nn}$ die zweiten partiellen Differentialquotienten dieser Function nach den Variabeln genommen.

Durch die lineären Substitutionen:

$$x_x = a_1^{(x)} y_1 + a_2^{(x)} y_2 + \dots a_n^{(x)} y_n,$$

wo für k die Zahlen 1, 2, ... n zu setzen sind, geht die Function u in eine homogene Function $m$ter Ordnung von den neuen Variabeln $y_1, y_2, \dots y_n$ über, deren erste und zweite partielle Differentialquotienten, nach den neuen Variabeln genommen, durch $u^1, u^2, \dots u^n$ und $u^{11}, u^{12}, \dots u^{22}, \dots u^{nn}$ ausgedrückt werden sollen.

Bezeichnet man hierauf die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\begin{matrix} u_{11}, & u_{12}, & \dots \\ u_{21}, & u_{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

gebildete Determinante, welche *Determinante der Function u in Rücksicht auf die Variabeln* $x_1, x_2, \dots$ heifsen soll, durch $\triangle$; ferner die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten

$$\begin{matrix} u^{11}, & u^{12}, & \dots \\ u^{21}, & u^{22}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}$$

gebildete Determinante, welche *Determinante der Function u in Rücksicht auf die Variabeln* $y_1, y_2, \dots$ heifsen soll, durch ∇; endlich die aus den

n^2 Coëfficienten $a_\lambda^{(\varkappa)}$ der Substitutionen gebildete Determinante durch r, so ist

$$\nabla = r^2 \Delta.$$

In der That: differentiirt man die Function u nach der Variable $y_\varkappa$, indem man die Variabeln x als Functionen der y betrachtet, wie sie durch die Substitutionen gegeben sind, so erhält man

$$u^\varkappa = u_1 a_\varkappa^1 + u_2 a_\varkappa^2 + \cdots u_n a_\varkappa^n,$$

und, wenn man nochmals nach x_λ differentiirt:

$$\frac{\partial u^\varkappa}{\partial x_\lambda} = u_{1\lambda} a_\varkappa^1 + u_{2\lambda} a_\varkappa^2 + \cdots u_{n\lambda} a_\varkappa^n.$$

Derselbe Ausdruck findet sich aber auch, wenn man u_λ nach $y_\varkappa$ differentiirt. Man kann daher $\frac{\partial u^\varkappa}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial y_\varkappa} = u_\lambda^\varkappa$ setzen, und diese Gleichung geht, mit Rücksicht auf die Bezeichnung, in

$$u_\lambda^\varkappa = u_{1\lambda} a_\varkappa^1 + u_{2\lambda} a_\varkappa^2 + \cdots u_{n\lambda} a_\varkappa^n$$

über.

Es sei nun D die aus den n^2 Gröfsen $u_\lambda^\varkappa$ gebildete Determinante. Dann ist nach dem Hauptsatze der Determinantentheorie:

$$D = r\Delta.$$

Differentiirt man die obige Gleichung, durch welche $u^\varkappa$ ausgedrückt wird, nach y_λ, so erhält man:

$$u^{\varkappa\lambda} = u_1^\lambda a_\varkappa^1 + u_2^\lambda a_\varkappa^2 + \cdots u_n^\lambda a_\varkappa^n$$

und die aus den n^2 Gröfsen $u^{\varkappa\lambda}$ gebildete Determinante ∇ wird:

$$\nabla = rD = r^2\Delta.$$

Diese Gleichung, welche ich schon im 28. Bande S. 89 dieses Journals bewiesen habe, scheint wegen der häufigen Anwendungen, die davon gemacht werden können, wichtig genug, um sie auch, wie folgt, als Lehrsatz auszusprechen.

Lehrsatz 1.

„Wenn die n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ lineäre Functio-„nen der n unabhängigen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_n$ von der Form:

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots a_n^\varkappa y_n$$

„sind, so ist die Determinante einer gegebenen homogenen ganzen Function „der ersten Variabeln gleich der Determinante derselben Function in

„Rücksicht auf die andern Variabeln, dividirt durch das Quadrat der De-„terminante, gebildet aus den n^2 Coëfficienten, mit welchen die Variabeln „y_1, y_2, ... in den Functionen x_1, x_2 ... multiplicirt sind."

Aus diesem Lehrsatze ergiebt sich folgender

Lehrsatz 2.

„Wenn eine homogene ganze Function der n unabhängigen Variabeln „x_1, x_2, ... x_n durch die Substitutionen:

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots a_n^\varkappa y_n$$

„in eine Function der Variabeln y_1, y_2, ... y_n übergeht, in welcher eine „dieser Variabeln fehlt, so ist die Determinante dieser Function in Rück-„sicht auf die Variabeln x_1, x_2, ... x_n identisch gleich 0."

Denn: hat die Function u die Eigenschaft, dafs sie durch die angegebenen Substitutionen in eine Function der Variabeln y_1, y_2, ... y_{n-1} übergeht, in welcher die letzte Variable y_n fehlt, so wird ∇ identisch gleich 0, weil die Componenten $u^{1u} = u^{2n} = \ldots = u^{nn} = 0$ sind. Mithin wird auch $\triangle$ identisch gleich 0, da r nicht verschwinden kann, indem die Variabeln x_1, x_2, ... x_n von einander unabhängig sind.

Schwieriger ist der Beweis des umgekehrten

Lehrsatzes 3.

„Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function der „Variabeln x_1, x_2, ... x_n identisch verschwindet, so läfst sich die Function „durch lineäre Substitutionen von der Form

$$x_\varkappa = a_1^\varkappa y_1 + a_2^\varkappa y_2 + \cdots a_n^\varkappa y_n$$

„auf eine Function der Variabeln y_1, y_2, ... zurückführen, in welcher „eine dieser Variabeln fehlt."

Da die homogene ganze Function u, der Voraussetzung nach, von der Ordnung m ist, so ist:

$$\begin{aligned}
u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots u_{1n}x_n &= (m-1)u_1 \\
u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + \cdots u_{2n}x_n &= (m-1)u_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
u_{n1}x_1 + u_{n2}x_2 + \cdots u_{nn}x_n &= (m-1)u_n.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen nach x_1, x_2, ... x_n geben, insofern die Variabeln links in den Gleichungen explicite vorkommen, aufgelöset, Gleichungen von

der Form

$$\frac{\Delta_1 x_1}{m-1} = U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + \cdots U_{1n}u_n$$
$$\frac{\Delta_2 x_2}{m-1} = U_{21}u_1 + U_{22}u_2 + \cdots U_{2n}u_n$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\Delta_n x_n}{m-1} = U_{n1}u_1 + U_{n2}u_2 + \cdots U_{nn}u_n,$$

in welchen Δ die Determinante der Function u bedeutet, die eine homogene ganze Function von der Ordnung $n(m-2)$ ist, und wo die Gröfsen $U_{\varkappa\lambda} = U_{\lambda\varkappa}$ homogene ganze Functionen von der $(n-1)(m-2)$ten Ordnung sind, welche, wie bekannt, auch durch Differentiation der Determinante nach den Componenten, in der Art abgeleitet werden können, dafs:

$$U_{\varkappa\varkappa} = \frac{\partial\Delta}{\partial u_{\varkappa\varkappa}}, \quad 2U_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial\Delta}{\partial u_{\varkappa\lambda}} \text{ ist.}$$

Setzt man die Werthe von $u_1, u_2, \ldots u_n$ aus dem ersten Systeme von Gleichungen in das zweite, so erhält man, durch Gleichstellung der Coëfficienten gleicher Variabeln auf beiden Seiten, ein System von n^2 Gleichungen, welche sämmtlich in folgenden beiden

$$\Delta = U_{1\varkappa}u_{1\varkappa} + U_{2\varkappa}u_{2\varkappa} + \cdots U_{n\varkappa}u_{n\varkappa}$$
$$0 = U_{1\varkappa}u_{1\lambda} + U_{2\varkappa}u_{2\lambda} + \cdots U_{n\varkappa}u_{n\lambda}$$

inbegriffen sind, in welchen $\varkappa$ und λ die Zahlen $1, 2, \ldots n$ bedeuten. Ich bemerke noch, dafs diese Gleichungen, gleich wie die beiden vorhergehenden Systeme, *identische* Gleichungen sind, welche für alle Werthe der Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ erfüllt werden.

Man nehme nun an, dafs die Function u die in dem letzten Lehrsatze bezeichnete Eigenschaft habe und dafs die Determinante Δ dieser Function identisch verschwinde. Alsdann folgt aus den beiden letzten Gleichungen die identische Gleichung

$$0 = U_{1\varkappa}u_{1\lambda} + U_{2\varkappa}u_{2\lambda} + \cdots U_{n\varkappa}u_{n\lambda},$$

in welcher $\varkappa$ und λ die Zahlen $1, 2, \ldots n$, auch $\varkappa = \lambda$ sind. Aus dieser Gleichung geht ein ganzes System von n Gleichungen hervor, wenn man für λ nach einander $1, 2, \ldots n$ setzt. Betrachtet man in diesen n Gleichungen die Gröfsen $U_{1\varkappa}, U_{2\varkappa}, \ldots U_{n\varkappa}$ als die Unbekannten, so ist eine von den Gleichungen, wegen $\Delta = 0$, eine Folge der übrigen $n-1$ Gleichungen; welche dann

dazu dienen können, die Verhältnisse der Unbekannten zu finden. Setzt man in diesem Systeme von n Gleichungen λ statt x, so erhält man ein zweites System von n Gleichungen, von welchem Dasselbe gilt, wenn man in diesem Systeme $U_{1\lambda}$, $U_{2\lambda}$, ... $U_{n\lambda}$ als die Unbekannten betrachtet. Da sich aber beide Systeme nur in der Bezeichnung der Unbekannten unterscheiden, so müssen die ersten Unbekannten den letzteren proportional sein. Mithin wird, wenn man durch π einen noch zu bestimmenden Factor bezeichnet:

$$U_{1\varkappa} = \pi U_{1\lambda}, \quad U_{2\varkappa} = \pi U_{2\lambda}, \quad \ldots \quad U_{n\varkappa} = \pi U_{n\lambda}.$$

Dieser Factor π wird im Allgemeinen eine gebrochene Function der Variabeln x_1, x_2, ... sein können; wir werden indefs nachweisen, dafs derselbe eine ***Constante*** sein mufs.

In der That: dividirt man die $\varkappa$te, zuletzt aufgestellte Gleichung durch die λte Gleichung, so erhält man:

$$U_{\varkappa\varkappa} U_{\lambda\lambda} = U_{\varkappa\lambda}^2;$$

welche Gleichung beweiset, dafs $U_{\varkappa\varkappa}$, $U_{\lambda\lambda}$, $U_{\varkappa\lambda}$ einen gemeinschaftlichen Factor M vom $(n-1)(m-2)$ten Grade haben müssen. Diesen gemeinschaftlichen Factor haben demnach auch alle die Gröfsen U_{11}, U_{12}, ... U_{22}, ... U_{nn}. Bezeichnet man daher durch a_{11}, a_{12}, ... a_{22}, ... a_{nn} die constanten Factoren, mit welchen der Factor M zu multipliciren ist, um jene Gröfsen zu finden, so ergiebt sich

$$U_{11} = a_{11} M, \quad U_{12} = a_{12} M, \quad \ldots \quad U_{22} = a_{22} M, \quad \ldots \quad U_{nn} = a_{nn} M,$$

und die vorhergehende Gleichung geht, wenn man diese Werthe setzt, mit Weglassung der Factoren M, in

$$a_{\varkappa\varkappa}\, a_{\lambda\lambda} = a_{\varkappa\lambda}^2$$

über. Führt man nun, der Bequemlichkeit wegen, statt der n Constanten $a_{1\varkappa}$ die neuen Constanten a_1, a_2, ... a_n ein, indem man

$$a_{11} = a_1 a_1, \quad a_{12} = a_1 a_2, \quad a_{13} = a_1 a_3, \quad \ldots \quad a_{1n} = a_1 a_n$$

setzt, so folgt aus der letzten Gleichung, wenn man $\lambda = 1$ setzt:

$$a_{\varkappa\varkappa} = a_\varkappa^2;$$

und da $U_{11} : U_{21} : U_{\varkappa 1} = U_{1\lambda} : U_{2\lambda} : U_{\varkappa\lambda}$ ist, so ist auch $a_{11} : a_{21} : a_{\varkappa 1} = a_{1\lambda} : a_{2\lambda} : a_{\varkappa\lambda}$; woraus

$$a_{\varkappa\lambda} = a_\varkappa a_\lambda$$

folgt.

Diese Bemerkungen fasse ich zusammen im folgenden

Lehrsatz 4.

„Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function u der „unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \dots x_n$, $m$ten Grades, identisch verschwin- „det, so haben die partiellen Differentialquotienten U_{11}, $2U_{12}$, $2U_{13}$, ... „U_{22}, ... U_{nn} der Determinante, nach den Componenten genommen, einen, „allen gemeinschaftlichen Factor M vom $(n-1)(m-2)$ten Grade, und „die genannten partiellen Differentialquotienten stellen sich unter der „Form

$$U_{\varkappa\varkappa} = a_\varkappa a_\varkappa M, \qquad 2U_{\varkappa\lambda} = 2a_\varkappa a_\lambda M \quad \text{dar.“}$$

Setzt man diese Werthe der partiellen Differentialquotienten der Determinante in die identische Gleichung

$$\frac{\Delta x_1}{m-1} = U_{11}u_1 + U_{12}u_2 + \cdots U_{1n}u_n$$

und erwägt, dafs Δ identisch verschwindet, so erhält man, nach der Division mit a_1, die identische Gleichung

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots a_nu_n = 0,$$

welche folgenden Lehrsatz giebt:

Lehrsatz 5.

„Wenn die Determinante einer homogenen ganzen Function von „n Variabeln identisch verschwindet, so giebt es immer n Constanten, „mit welchen die ersten partiellen Differentialquotienten der Function zu „multipliciren sind, damit die Summe dieser Producte identisch ver- „schwinde.“

Wie diese n Constanten bestimmt werden können, ist aus dem Lehrsatz (4.) zu entnehmen.

Ich behaupte nun, dafs durch die Substitutionen:

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + \lambda a_1 \\ x_2 &= z_2 + \lambda a_2 \\ &\cdots\cdots \\ x_n &= z_n + \lambda a_n, \end{aligned}$$

wo $z_1, z_2, \dots z_n$ beliebige lineäre Functionen der $n-1$ neuen Variabeln $y_1, y_2, \dots y_{n-1}$ von der Form $z_\varkappa = b_1^\varkappa y_1 + b_2^\varkappa y_2 + \dots b_{n-1}^\varkappa y_{n-1}$ sind, und λ die

$n$te Variabele aus der Function u ist, die letzte Variable ganz verschwindet. In der That: macht man in der Function u die angegebenen Substitutionen, so erhält man durch die Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von λ:

$$u = w + \lambda Dw + \frac{\lambda^2}{1.2} D^2 w + \cdots \frac{\lambda^m}{1\,2 \ldots m} D^m w.$$

In dieser Entwickelung bedeuten w und Dw die Ausdrücke, in welche u und $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots a_n u_n$ übergehen, wenn man in denselben $z_1, z_2, \ldots z_n$ statt $x_1, x_1, \ldots x_n$ setzt. Ferner ist:

$$D^2 w = \frac{\partial Dw}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial Dw}{\partial z_2} a_2 + \cdots \frac{\partial Dw}{\partial z_n} a_n,$$

$$D^3 w = \frac{\partial D^2 w}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial D^2 w}{\partial z_2} a_2 + \cdots \frac{\partial D^2 w}{\partial z_n} a_n,$$

. . . .

$$D^m w = \frac{\partial D^{m-1} w}{\partial z_1} a_1 + \frac{\partial D^{m-1} w}{\partial z_2} a_2 + \cdots \frac{\partial D^{m-1} w}{\partial z_n} a_n.$$

Da aber der Ausdruck $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots a_n u_n$ identisch verschwindet, so verschwindet auch Dw identisch. Verschwindet aber Dw identisch, so verschwinden auch die partiellen Differentialquotienten dieser Function, nach $z_1, z_2, \ldots$ genommen, identisch: mithin auch $D^2 w$. Verschwindet ferner $D^2 w$ identisch, so verschwinden aus demselben Grunde auch $D^3 w$, $D^4 w, \ldots D^m w$. Es fallen also aus der Entwickelung von u nach Potenzen der $n$ten Variabeln λ diese gänzlich weg, und es wird durch die angegebenen Substitutionen $u = w$ zu einer homogenen Function der $n-1$ Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_{n-1}$.

Hierdurch ist nicht allein der Lehrsatz (3.) bewiesen, sondern auch der Weg angedeutet, auf welchem man zu den lineären Substitutionen gelangt, durch die eine gegebene homogene ganze Function auf eine andere zurückgeführt werden kann, welche eine Variable weniger enthält; unter der Voraussetzung, dafs Dies bei der gegebenen Function möglich ist.

Für die Fälle $n = 3$ oder $n = 4$ ergeben sich folgende bemerkenswerthe *geometrische* Sätze:

Lehrsatz 6.

„Wenn $u = 0$ die homogene Gleichung einer ebenen *Curve* $m$ter „Ordnung zwischen drei Linearcoordinaten bedeutet, so ist die Bedin-

„gung, dafs diese Curve m von einem und demselben Puncte ausge-
„hende gerade Linien vorstelle, das identische Verschwinden der Deter-
„minante $\triangle$ der Function u."

Lehrsatz 7.

„Wenn $u = 0$ die homogene Gleichung einer *Oberfläche* $m$ter
„Ordnung zwischen 4 Liniencoordinaten bedeutet, so ist die Bedingung,
„dafs diese Oberfläche ein Kegel sei, das identische Verschwinden der
„Determinante $\triangle$ der Function u."

Königsberg im März 1851.

12.

Développement de deux formules sommatoires.

(Par Mr. le Dr. *Schlömilch*, professeur à l'université de Jena.)

On sait que toute fonction $F(x)$ peut être développée en série infinie, de manière que l'on a

$$F(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + a_3\cos 3x + \cdots$$
$$\pi \geqq x \geqq 0,$$
$$F(x) = \qquad b_1\sin x + b_2\sin 2x + b_3\sin 3x + \cdots$$
$$\pi > x > 0,$$

ou bien, en remplaçant a_n et b_n par $\varphi(n)$ et $\psi(n)$,

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\varphi(0) + \varphi(1)\cos x + \varphi(2)\cos 2x + \cdots$$
$$F(x) = \quad \psi(1)\sin x + \psi(2)\sin 2x + \psi(3)\sin 3x + \cdots$$

Comme une opération quelconque entraine une opération inverse, les équations proposées conduisent immédiatement au problème, de trouver la fonction $F(x)$, si l'on connait *a priori* la forme des coefficients, $\varphi(n)$ et $\psi(n)$, c'est à dire, au problème de *sommer* les séries à droite. Nous donneront ici la solution de ce problème important, en développant les deux formules sommatoires

$$(1.)\quad \tfrac{1}{2}f(0) + f(1)\cos x + f(2)\cos 2x + f(3)\cos 3x + \cdots$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t} + e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,\frac{f(-t\sqrt{-1}) - f(+t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,dt$$

et

$$(2.)\quad f(1)\sin x + f(2)\sin 2x + f(3)\sin 3x + \cdots$$
$$= \int_0^\infty \frac{e^{(\pi-x)t} - e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t} - e^{-\pi t}}\,\tfrac{1}{2}\big(f(-t\sqrt{-1}) + f(+t\sqrt{-1})\big)\,dt,$$

qui ont lieu pour chaque x compris entre les limites $x = 0$ et $x = +\pi$.

I.

Nous commençons par quelques recherches sur la valeur de l'intégrale double

$$(2'.)\qquad S = \int_{\xi}^{\Xi} dx \int_{\eta}^{Y} F'(x+y\sqrt{-1})\,dy,$$

dans laquelle $F'(z)$ désigne la fonction dérivée de $F(z)$. En effectuant l'intégration relative à y, on trouve d'abord

$$(3.)\qquad S = \int_{\xi}^{\Xi} dx \left\{\frac{F(x+Y\sqrt{-1})-F(x+\eta\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}\right\}.$$

Pourvu que la fonction $F'(x+y\sqrt{-1})$ soit finie et continue entre les limites $x=\xi$, $x=\Xi$ et $y=\eta$, $y=Y$, l'ordre des intégrations relatives à x et y peut être renversé. Cela donne au lieu de (2.):

$$S = \int_{\eta}^{Y} dy \int_{\xi}^{\Xi} F'(x+y\sqrt{-1})\,dy$$
$$= \int_{\eta}^{Y} dy \{F(\Xi+y\sqrt{-1}) - F(\xi+y\sqrt{-1})\}.$$

En égalant les deux valeurs de l'intégrale double, qu'on vient de trouver, on a la formule:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_{\xi}^{\Xi}\{F(x+Y\sqrt{-1}) - F(x+\eta\sqrt{-1})\}\,dx$$
$$= \int_{\eta}^{Y}\{F(\Xi+y\sqrt{-1}) - F(\xi+y\sqrt{-1})\}\,dy.$$

Ici nous faisons $\xi=0$, $\Xi=+\infty$, $\eta=-\infty$, $Y=+\infty$ et nous supposons que l'on ait en même temps

$$(4.)\qquad F(x\pm\infty\sqrt{-1}) = 0,\quad (\infty > x > 0),$$
$$(5.)\qquad F(\infty+y\sqrt{-1}) = 0,\quad (\infty > y > -\infty).$$

L'équation précédente se réduit alors à celle-ci:

$$(6.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} F(y\sqrt{-1})\,dy = 0.$$

Soit p. e. $F(z) = \dfrac{f(z)}{a+z}$ et $f(z)$ une fonction dont la dérivée $f'(z)$ demeure finie et continue entre les limites $x=0$, $x=\infty$, $y=-\infty$, $y=+\infty$,

si l'on prend $z = x + y\sqrt{-1}$. Alors la fonction $F(x+y\sqrt{-1})$ et sujette aux conditions (4. et 5.), et par conséquent nous aurons

$$(7.)\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y\sqrt{-1})}{a+y\sqrt{-1}}\,dy = 0,$$

pourvu que la quantité a ne devienne zéro ou négative.

Les conclusions que nous venons de faire cessent d'être exactes si la fonction $F'(x+y\sqrt{-1})$ devient infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs comprises entre les limites dont il s'agit. Alors les expressions obtenues par la double intégration (3.) peuvent différer l'une de l'autre, et dépendent de l'ordre des intégrations; mais leur différence peut être calculée sans peine. Supposons que la fonction $F'(x+y\sqrt{-1})$ devienne infinie pour un seul système de valeurs $x = a$ et $y = b$ ($\Xi > a > \xi$ et $Y > b > \eta$), on pourra regarder l'intégrale double S comme la limite vers laquelle converge la somme

$$\int_{\xi}^{a-\varepsilon} dx \int_{\eta}^{Y} F'(x+y\sqrt{-1})\,dy + \int_{a+\varepsilon}^{\Xi} dx \int_{\eta}^{Y} F'(x+y\sqrt{-1})\,dy,$$

en désignant par ε un nombre infinement petit; et parceque la fonction $F'(x+y\sqrt{-1})$ demeure finie et continue entre les limites $x = \xi$, $x = a - \varepsilon$ et $x = a + \varepsilon$, $x = \Xi$, on pourra remplacer l'expression précédente par la suivante:

$$\int_{\eta}^{Y} dy \int_{\xi}^{a-\varepsilon} F'(x+y\sqrt{-1})\,dx + \int_{\eta}^{Y} dy \int_{a+\varepsilon}^{\Xi} F'(x+y\sqrt{-1})\,dx,$$

ce qui donne la valeur

$$\int_{\eta}^{Y} dy\,\{F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1}) - F(\xi+y\sqrt{-1})\}$$
$$+\int_{\eta}^{Y} dy\,\{F(\Xi+y\sqrt{-1}) - F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})\},$$

ou bien

$$\int_{\eta}^{Y} \{F(\Xi+y\sqrt{-1}) - F(\xi+y\sqrt{-1})\}\,dy$$
$$+\int_{\eta}^{Y} \{F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1}) - F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})\}\,dy.$$

En fésant converger ε vers la limite zéro, et en égalant le résultat à la valeur de S dans (3.), nous aurons:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int_{\xi}^{\Xi}\{F(x+Y\sqrt{-1})-F(x+\eta\sqrt{-1})\}dx$$

$$=\int_{\eta}^{Y}\{F(\Xi+y\sqrt{-1})-F(\xi+y\sqrt{-1})\}dy$$

$$+\lim\int_{\eta}^{Y}\{F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})-F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})\}dy.$$

Si la fonction $F(x+y\sqrt{-1})$ satisfait aux deux conditions $F(x\pm\infty\sqrt{-1})=0$ et $F(\infty+y\sqrt{-1})=0$, on aura, à l'aide des substitutions $\xi=0$, $\Xi=\infty$, $\eta=-\infty$, $Y=+\infty$:

$$(8.)\quad \int_{-\infty}^{\infty}F(y\sqrt{-1})\,dy.$$

$$=\lim\int_{-\infty}^{\infty}\{F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})-F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})\}dy.$$

Nous prenons pour exemple

$$F(z)=\frac{f(z)}{a-z},\qquad F(x+y\sqrt{-1})=\frac{f(x+y\sqrt{-1})}{a-x-y\sqrt{-1}},$$

en supposant que la fonction dérivée $f'(x+y\sqrt{-1})$ soit finie entre les limites $x=0$, $x=\infty$, $y=-\infty$, $y=+\infty$. Alors la fonction $F'(x+y\sqrt{-1})$ devient infinie pour le seul système $x=a$, $y=0$. Les conditions $F(\infty+y\sqrt{-1})=0$ et $F(x\pm\infty\sqrt{-1})=0$ étant satisfaites, nous aurons

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y\sqrt{-1})}{a-y\sqrt{-1}}dy$$

$$=\lim\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{f(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})}{\varepsilon-y\sqrt{-1}}+\frac{f(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})}{\varepsilon+y\sqrt{-1}}\right\}dy$$

$$=\lim\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\{f(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})+f(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})\}dy$$

$$+\lim\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\sqrt{-1}}{\varepsilon^2+y^2}\{f(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})+f(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})\}dy.$$

Si la derivée $\varphi'(y)$ est finie et continue entre les limites $y=-k$ et $y=+k$, on peut poser l'équation

$$\odot\quad \int_{-k}^{k}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\varphi(y)dy=\int_{-k}^{k}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\{\varphi(0)+y\varphi'(\lambda y)\}dy$$

$$=\pi\varphi(0)+\tfrac{1}{2}\varepsilon\int_{-k}^{k}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2}\varphi'(\lambda y),$$

en désignant par λ une quantité comprise entre les limites 1 et 0. Comme la fonction $\varphi'(\lambda y)$ est toujours finie, le maximum A et le minimum B de $\varphi'(\lambda y)$ seront des quantités finies. On en tire

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon A\int_{-k}^{k}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2} > \tfrac{1}{2}\varepsilon\int_{-k}^{k}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2}\varphi'(\lambda y) > \tfrac{1}{2}\varepsilon B\int_{-k}^{k}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2},$$

et par conséquent

$$\lim\left\{\tfrac{1}{2}\varepsilon\int_{-k}^{k}\frac{2y\,dy}{\varepsilon^2+y^2}\varphi'(\lambda y)\right\} = 0.$$

En passant aux limites dans l'équation ($\odot$), on trouve ici:

$$\lim\int_{-k}^{k}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\varphi(y)\,dy = \pi\varphi(0);$$

ce qu'il fallait démontrer.

Les limites dont il s'agit, se trouvent facilement à l'aide du théorème

$$\lim\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+y^2}\varphi(y)\,dy = \pi\varphi(0),$$

et on a

$$(9.)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(y\sqrt{-1})}{a-y\sqrt{-1}}\,dy = 2\pi f(a).$$

L'addition et la soustraction des équations (7. et 9.) donnent encore les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{a^2+y^2}f(y\sqrt{-1})\,dy = \pi f(a),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\sqrt{-1}}{a^2+y^2}f(y\sqrt{-1})\,dy = \pi f(a),$$

qui enfin peuvent être exprimées comme suit:

$$(10.)\quad \int_{0}^{\infty}\frac{a}{a^2+y^2}\,\frac{f(-t\sqrt{-1})+f(+t\sqrt{-1})}{2} = \tfrac{1}{2}\pi f(a),$$

$$(11.)\quad \int_{0}^{\infty}\frac{t}{a^2+t^2}\,\frac{f(-t\sqrt{-1})-f(+t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \tfrac{1}{2}\pi f(a).$$

II.

Les formules sommatoires qu'il s'agit de développer, ne sont qu'une conséquence très simple des formules que nous venons de trouver. On tire d'abord de la formule (11.):

$$\tfrac{1}{2}\pi\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+\cdots\}$$
$$=\int_{0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2t}+\frac{t\cos x}{1^2+t^2}+\frac{t\cos 2x}{2^2+t^2}+\cdots\right\}\frac{f(-t\sqrt{-1})-f(+t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,dt.$$

En fésant usage de la formule connue

$$\frac{1}{2t}+\frac{t\cos x}{1^2+t^2}+\frac{t\cos 2x}{2^2+t^2}+\frac{t\cos 3x}{3^2+t^2}+\cdots=\tfrac{1}{2}\pi\frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}},\quad \pi\geqq x\geqq 0,$$

on obtient immédiatement la première des formules proposées:

$$(12.)\quad \tfrac{1}{2}f(0)+f(1)\cos x+f(2)\cos 2x+f(3)\cos 3x+\cdots$$
$$=\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{f(-t\sqrt{-1})-f(+t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\,dt,\quad \pi\geqq x\geqq 0.$$

Par un procédé tout analogue on tire de la formule (10.):

$$\tfrac{1}{2}\pi\{f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\cdots\}$$
$$=\int_0^\infty\left\{\frac{\sin x}{1^2+t^2}+\frac{2\sin 2x}{2^2+t^2}+\cdots\right\}\tfrac{1}{2}(f(-t\sqrt{-1})+f(+t\sqrt{-1}))\,dt,$$

et comme on a

$$\frac{\sin x}{1^2+t^2}+\frac{2\sin 2x}{2^2+t^2}+\frac{3\sin 3x}{3^2+t^2}+\cdots=\tfrac{1}{2}\pi\frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}},\quad \pi>x>0,$$

on parvient immédiatement à la formule sommatoire

$$(13.)\quad f(1)\sin x+f(2)\sin 2x+f(3)\sin 3x+\cdots$$
$$=\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\tfrac{1}{2}(f(-t\sqrt{-1})+f(+t\sqrt{-1}))\,dt,\quad \pi>x>0.$$

Les formules (12. et 13.) supposent, que la fonction $f(u+t\sqrt{-1})$ ne devienne pas infinie entre les limites $u=0$, $u=\infty$, $t=-\infty$, $t=+\infty$. La fonction $f(z)=\frac{1}{a+z}$ p. e. satisfait aux conditions énoncées, et l'on a par conséquent:

$$\frac{1}{2a}+\frac{\cos x}{a+1}+\frac{\cos 2x}{a+2}+\frac{\cos 3x}{a+3}+\cdots$$
$$=\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-x)t}+e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{t\,dt}{a^2+t^2},\quad \pi\geqq x\geqq -\pi,$$

$$\frac{\sin x}{a+1}+\frac{\sin 2x}{a+2}+\frac{\sin 3x}{a+3}+\cdots$$
$$=\int_0^\infty\frac{e^{(\pi-x)t}-e^{-(\pi-x)t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,\frac{a\,t\,dt}{a^2+t^2},\quad \pi>x>-\pi.$$

Il ne serait pas difficile de développer beaucoup de formules semblables.

Jena, Mai 1848.

13.

Sulle equazioni differenziali lineari.

(Nota di *P. Tardy.* *))

(Estratta dagli Annali di Scienze Matematiche e Fisiche pubblicati in Roma. Aprile 1850.)

Nell'ultimo numero del „Dublin and Cambridge Mathematical Iournal" il Sig. *Malmstèn* professore nell' Università di Upsala ha enunciato il seguente teorema.

„Sieno $y_1, y_2, \ldots. y_{n-1}$ $n-1$ integrali particolari della equazione

$$(1.)\quad \frac{d^n y}{dx^n}+P\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+Ty=0;$$

„quella equazione sarà anche soddisfatta da

$$y_n = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_{n-1} z_{n-1},$$

„ove si ha in generale

$$z_r = (-1)^{n-1}\int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}}\cdot e^{\int P dx}\, dx$$

„ed

$$\frac{1}{R} = \Sigma\{\pm y_1 . y'_2 . y''_3 \ldots . y_{n-1}^{(n-3)}\},$$

„indicando con $y_r^{(n)}$ la derivata $(n)^{\text{esima}}$ $d'y_r$."

La dimostrazione che ora soggiungiamo poggia sopra un bellissimo teorema del sig. *Libri.* Cominciamo dal cercare l'equazione dell'ordine $n-1$ cui appartengono gli $n-1$ integrali particolari dati. Sia questa

$$(2.)\quad \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+B_1\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\cdots+B_{n-1}z=0.$$

Per determinare i coefficienti $B_1, B_2, \ldots. B_{n-1}$ abbiamo le $n-1$ seguenti equazioni

$$\begin{array}{l} y_1^{(n-1)}+B_1 y_1^{(n-2)}+\cdots+B_{n-1}y_1 \;\;= 0, \\ y_2^{(n-1)}+B_1 y_2^{(n-2)}+\cdots+B_{n-1}y_2 \;\;= 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_{n-1}^{(n-1)}+B_1 y_{n-1}^{(n-2)}+\cdots+B_{n-1}y_{n-1} = 0. \end{array}$$

*) La démonstration de ce théorème a été donnée d'abord par M. *Malmstèn* lui-même dans ce Journal, mais elle me semble moins simple que celle qui suit. *T.*

Il denominatore commune di queste incognite, cioè il *determinante* si può rappresentare dietro la notazione comunemente adottata con

$$D = \Sigma\{\pm y_1 . y_2' . y_3'' \ldots . y_{n-1}^{(n-2)}\},$$

ed il valore di B_1, che solo c'importa conoscere, è dato della formola

$$B_1 = \frac{\Sigma\{\pm y_1 y_2' \ldots . y_{n-2}^{(n-3)}(-y_{n-2}^{(n-1)})\}}{\Sigma\{\pm y_1 y_2' \ldots . y_{n-2}^{(n-3)} y_{n-1}^{(n-2)}\}},$$

ed è facile convincersi che il numeratore è la derivata del denominatore presa con segno contrario; avremo perciò

$$B_1 = -\frac{D'}{D}.$$

Ora le due equazioni (1. e 2.) dovendo coesistere, mercè il teorema di *Libri* l'integrazione della proposta è ridotta a quella delle due

$$\frac{du}{dx} + \left(P + \frac{D'}{D}\right)u = 0,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + B_{n-1}y = u.$$

La prima somministra

$$u = \frac{C_n}{D} e^{-\int P dx}.$$

Per integrare la seconda osserviamo che essendo noti tutti gl'integrali particolari quando il secondo membro di essa è nullo, possiamo esprimere il valore generale di y, con

$$y = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots + y_{n-1} z_{n-1},$$

ove $z_1, z_2, \ldots z_{n-1}$ sono funzioni che si determineranno dietro il noto principio della variazione delle costanti arbitrarie. Si ha

$$z_1 = \int v_1 u\,dx + C_1, \;\ldots\; z_r = \int v_r u\,dx + C_r, \;\ldots$$
$$z_{n-1} = \int v_{n-1} u\,dx + C_{n-1}$$

ed i valori di $v_1, v_2, \ldots v_r \ldots v_{n-1}$ sono forniti dalla risoluzione delle

$$y_1^{(n-2)} v_1 + y_2^{(n-2)} v_2 + \cdots + y_r^{(n-2)} v_r + \cdots + y_{n-1}^{(n-2)} v_{n-1} = 1,$$
$$y_1^{(n-3)} v_1 + y_2^{(n-3)} v_2 + \cdots + \cdots\cdots + y_{n-1}^{(n-3)} v_{n-1} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1 v_1 + y_2 v_2 + \cdots\cdots\cdots + y_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

Il valore generico di v_r può mettersi sotto la forma

$$v_r = \frac{\Sigma\{\pm y_1 y'_2 \ldots y^{(r-2)}_{r-1} y^{(r-1)}_{n-1} y^{(r)}_{r+1} \ldots y^{(n-3)}_{(n-2)}\}}{\Sigma\{\pm y_1 y'_2 \ldots y^{(r-2)}_{r-1} y^{(r-1)}_{n-1} y^{(r)}_{r+1} \ldots y^{(n-3)}_{n-2} y^{(n-2)}_{r}\}},$$

ove si vede che il numeratore è la derivata del denominatore rispetto ad $y^{(n-2)}_r$; e però sarà

$$v_r = \frac{1}{D} \frac{dD}{dy^{(n-2)}_r},$$

quindi

$$z_r = C_n \int \frac{1}{D^2} \frac{dD}{dy^{(n-2)}_r} e^{-\int P dx} + C_r,$$

e poichè

$$D = \frac{1}{R}, \quad \frac{dD}{dy^{(n-1)}_r} = -D^2 \frac{dR}{dy^{(n-2)}_r}$$

ne segue, cangiando il segno di C_n,

$$z_r = C_n \int \frac{dR}{dy^{(n-2)}_r} e^{-\int P dx} + C_r,$$

lo che dà il teorema di *Malmstèn*.

Firenze 8 Marzo 1850.

14.
Sulle equationi lineari alle differenze finite.

(Nota di *P. Tardy*, membro corrispondente dell'Accademia Pontifica de'Nuovi Lincei.)

(Estratta dagli Annali di Scienze Mathematiche e Fisiche pubblicati in Roma. Agosto 1850.)

Sia data un'equazione lineare alle differenze finite dell'ordine n,

$$(1.)\quad y_{x+n}+P_1 y_{x+n-1}+P_2 y_{x+n-2}+\cdots+P_n y_x=0,$$

ed un'altra pur lineare dell'ordine $m>n$ che debba coesistere con la prima, che abbia cioè comuni con essa tutti gl'integrali particolari

$$(2.)\quad z_{x+m}+A^{(1)}z_{x+m-1}+A^{(2)}z_{x+m-2}+\cdots+A^{(m)}z_x=0.$$

Il valore generale di z conterrà m constanti, quello di y ne conterrà n e pero sarà della forma

$$y=z=C_1 y^{(1)}+C_2 y^{(2)}+\cdots+C_{n-m}y^{(n-m)},$$

ove $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $\dots y^{(n-m)}$ rappresentano gli $n-m$ integrali particolari esclusivi della (1.).

Facciamo

$$(3.)\quad u_x=y_{x+m}+A^{(1)}y_{x+m-1}+A^{(2)}y_{x+m-2}+\cdots+A^{(m)}y_x,$$

e sostituendo per y il suo valore z sparirà da sè in virtù delle (2.), ed u_x risulterá una funzione della x contenente $n-m$ costanti arbitrarie in modo lineare. Però eliminando queste si avrà un'equazione lineare alle differenze finite dell' ordine $n-m$ che dinoteremo con

$$(4.)\quad u_{x+n-m}+a_1 u_{x+n-m-1}+a_2 u_{x+n-m-2}+\cdots+a_{n-m}u_x=0.$$

Rimettendo in questa per u_x il suo valore (3.) e paragonando la risultante con la proposta (1.), otterremo n equazioni

$$A^{(1)}_{x+n-m}+a_1=P_1,\quad A^{(2)}_{x+n-m}+a_1 A^{(1)}_{x+n-m-1}+a_2=P_2,$$
$$A^{(3)}_{x+n-m}+a_1 A^{(2)}_{x+n-m-1}+a_2 A^{(1)}_{x+n-m-2}+a_3=P_3,\ \text{ec.}$$

che procedono con legge manifesta e delle quali le prime $n-m$ serviranno a determinare i valori di a_1, a_2, ... a_{n-m}, e le altre ne forniranno le condizioni cui debbono verificare i coefficienti della (1.) e della (2.) perchè esse coesistano. Così la soluzione della (1.) è ricondotta a quella di due equa-

zioni: una, la (3.) dell' ordine m, e la seconda, la (4.), dell' ordine $n-m$, ed i coefficienti di quest'ultima si ottengono senza alcuna integrazione. Questo è il teorema fondamentale del sig. ***Libri*** trasportato alle equazioni alle differenze finite, e la dimostrazione qui esposta è perfettamente analoga a quella data dal sig. ***Liouville*** per le equazioni differenziali.

Sieno ora dati $n-1$ integrali particolari della (1.); egli è noto che l'integrazione di essa si riduce a quella di un'equazione lineare del 1°. ordine, e che quindi si può trovare l'altro integrale particolare per formare il completo; ma se co'metodi ordinari si volesse questo assegnare, sarebbe pressochè impossibile scriverne la espressione finale. Però se introduciamo l'uso delle ***funzioni alternate*** o ***determinanti*** riescirà agevole condurre il calcolo sino in fondo.

Indichino $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... $y^{(n-1)}$ gli $n-1$ integrali particolari dati, e rappresenti

$$(5.)\qquad z_{x+n-1}+A^{(1)}z_{x+n-2}+A^{(2)}z_{x+n-3}+\cdots+A^{(n-1)}z_x = 0$$

l'equazione dell'ordine $n-1$ cui essi appartengono. Avremo per determinare i coefficienti $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, ... $A^{(n-1)}$ le $n-1$ seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
y^{(1)}_{x+n-1}+A^{(1)}y^{(1)}_{x+n-2}+\cdots+A^{(n-1)}y^{(1)}_x &= 0,\\
y^{(1)}_{x+n-1}+A^{(1)}y^{(2)}_{x+n-2}+\cdots+A^{(n-1)}y^{(2)}_x &= 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
y^{(n-1)}_{x+n-1}+A^{(1)}y^{(n-1)}_{x+n-2}+\cdots+A^{(n-1)}y^{(n-1)}_x &= 0.
\end{aligned}$$

Il solo che importa conoscere $A^{(1)}$ è somministrato dalla formula

$$A^{(1)} = \frac{-S\{\pm y^{(1)}_x . y^{(2)}_{x+1} \dots . y^{(n-2)}_{x+n-3} . y^{(n-1)}_{x+n-1}\}}{S\{\pm y^{(1)}_x . y^{(2)}_{x+1} \dots . y^{(n-2)}_{x+n-3} . y^{(n-1)}_{x+n-2}\}}.$$

(Indico con S il determinante anzichè con Σ perchè quest' ultimo simbolo è qui impiegato nel senso ordinario d'integrazione finita.)

Ciò posto la (1.) e la (5.) avendo a comune $n-1$ integrali particolari, siamo nel caso del teorema precedente con $m=n-1$, e però la soluzione cercata dipenderà da quello delle due equazioni

$$u_{x+1}+\{P_1-A^{(1)}_{x+1}\}u_x = 0,$$
$$y_{x+n-1}+A^{(1)}y_{x+n-2}+\cdots+A^{(n-1)}y_x = u_x.$$

Dalla prima si ricava

$$u_x = C_n e^{\Sigma \log\{A^{(1)}_{x+1}-P_1\}}$$

e dinotando il numeratore di $A^{(1)}$ con N ed il denominatore con D, allorquando la x diviene $x+1$, sarà

$$u_x = C_n e^{\Sigma \log\left\{\frac{N}{D} - P_1\right\}}.$$

L'integrale della seconda si otterrà per mezzo della variazione delle costanti arbitrarie conoscendo già tutti gl'integrali particolari di essa quando il secondo membro è nullo: poniamo quindi

$$y_x = y^{(1)} z_1 + y^{(2)} z_2 + \cdots + y^{(n-1)} z_{n-1}$$

e mettiamo

$$\Delta z_1 = v_1 u, \ \ldots \ \Delta z_r = v_r u, \ \ldots \ \Delta z_{n-1} = v_{n-1} u,$$

le funzioni $v_1, \ldots v_1, \ldots v_{n-1}$ saranno determinate dalle equazioni

$$y^{(1)}_{x-1} v_1 + y^{(2)}_{x+1} v_2 + \cdots + y^{(r)}_{x+1} v_r + \cdots + y^{(n-1)}_{x+1} v_{n-1} = 0,$$

$$y^{(1)}_{x+2} v_1 + \cdots + y^{(r)}_{x+2} v_r + \cdots + y^{(n-1)}_{x+2} v_{n-1} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(1)}_{x+n-1} v_1 + \cdots + y^{(r)}_{x+n-1} v_r + \cdots + y^{(n-1)}_{x+n-1} v_{n-1} = 1.$$

Il valore generico di v_r sarà

$$v_r = \frac{S\{\pm y^{(1)}_{x+1} \cdots y^{(r-1)}_{x+r-1} \cdot y^{(n-1)}_{x+r} \cdot y^{(r+1)}_{x+r-1} \cdot y^{(n-2)}_{x+n-2}\}}{S\{\pm y^{(1)}_{x+1} \cdots y^{(r-1)}_{x+r-1} \cdot y^{(n-1)}_{x+r} \cdot y^{(r+1)}_{x+r+1} \cdot y^{(n-2)}_{x+n-2} \cdot y^{(r)}_{x+n-1}\}} = \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy^{(r)}_{x+n-1}}$$

e verrà

$$z_r = C_n \Sigma \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dy^{(r)}_{x+n-1}} e^{\Sigma\left\{\frac{N}{D} - P_1\right\}} + C_r.$$

Questo teorema corrisponde a quello enunciato dal professore ***Malmstèn*** per le equazioni differenziali nel No. 21 del ***Dublin and Cambridge Mathematical Iournal***, e la dimostrazione è perfettamente analoga a quella da me data di quest' ultimo nel fascicolo di Aprile di questi Annali.

Esempio I. $n = 2$, la equazione data sarà

$$y_{x+2} + P_1 y_{x+1} + P_2 y_x = 0$$

e l'integrale particolare noto $y^{(1)}$. Dalla nostra formola risulta per l'integrale completo

$$y_x = y^{(1)} z_1 = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(1)} \Sigma \frac{1}{y^{(1)}_{x+1}} e^{\Sigma \log\left\{-\frac{y^{(1)}_{x+2}}{y^{(1)}_{x+1}} - P_1\right\}}.$$

È facile ricavare il secondo integrale particolare facendo al solito $y_x = y^{(1)} \Sigma t_x$.

Esempio II. Per $n = 3$, cioè per la equazione

$$y_{x+3} + P_1 y_{x+2} + P_2 y_{x+1} + P_3 y_x = 0.$$

Supposti noti $y^{(1)}$ ed $y^{(2)}$ risulta

$$y_2 = C_1 y^{(1)} + C_2 y^{(2)}$$

$$+ C_3 \left\{ y^{(1)} \Sigma \frac{y^{(2)}_{x+1}}{y^{(1)}_{x+1} y^{(2)}_{x+2} - y^{(1)}_{x+2} y^{(2)}_{x+1}} e^{\Sigma \log \left\{ \frac{y^{(1)}_{x+3} y^{(2)}_{x+1} - y^{(1)}_{x+1} y^{(2)}_{x+3}}{y^{(1)}_{x+1} y^{(2)}_{x+2} - y^{(1)}_{x+2} y^{(2)}_{x+1}} - P_1 \right\}} \right.$$

$$\left. - y^{(2)} \Sigma \frac{y^{(1)}_{x+1}}{y^{(1)}_{x+1} y^{(2)}_{x+2} - y^{(1)}_{x+2} y^{(2)}_{x+1}} e^{\Sigma \log \left\{ \frac{y^{(1)}_{x+3} y^{(2)}_{x+1} - y^{(1)}_{x+1} y^{(2)}_{x+3}}{y^{(1)}_{x+1} y^{(2)}_{x+2} - y^{(1)}_{x+2} y^{(2)}_{x+1}} - P_1 \right\}} \right\}.$$

Riesce assai spedito vedere come questa espressione, alla quale non è così semplice ridurre quella che si otterrebbe al modo ordinario, verifica la proposta.

Firenze 3 luglio 1850.

15.

Note relative à quelques règles sur la convergence des séries.

(Par Mr. *Paucker* à St. Petersbourg.)

1.

Il se trouve dans le VIIme tome (1842) du journal des mathématiques pures et appliquées de M. *Liouville* un mémoire de M. *Bertrand* contenant la démonstration de deux règles pour la détermination de la convergence ou divergence des séries, dont tous les termes sont positifs. Pour le cas où le terme général de la série dont la convergence ou la divergence est à déterminer, est exprimé en fonction continue de l'indice, les règles de M. *Bertrand* ne diffèrent que par la forme d'une autre règle donné par M. *de Morgan* dans un traité de calcul différentiel et intégral imprimé à Londres en 1839. Une des règles de M. *Bertrand,* mise sous la même forme que nous lui donnons ici, se trouve aussi dans l'ouvrage sur le calcul des probabilités dont M. *Bonniakowsky,* membre de l'académie de St. Petersbourg, a enrichi en 1846 la littérature mathématique en Russie Les règles de Mrs. *Bertrand* et *de Morgan,* étant appliquables dans un très grand nombre de cas, paraissent mériter d'être considérés sous tous les points de vue différents qu'elles offrent. Or il est intéressant qu'au fond elles ne forment qu'une conséquence très simple d'un theorème général sur la convergence des séries, que M. *Cauchy* a donné depuis longtemps dans son Analyse algébrique. C'est ce que nous nous proposons de faire voir.

Le théorème dont nous parlons est le suivant.

„Lorsque dans la série

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots .\ f(n),\ \ldots .$$

„chaque terme est positif et inférieur à celui qui le précède, cette série „et la suivante:

$$f(1),\ af(a),\ a^2f(a^2),\ a^3f(a^3),\ \ldots .\ a^mf(a^m),\ \ldots .,$$

„où a représente un nombre entier supérieur à l'unité, sont en même „temps convergentes ou divergentes." (Voy. Cours d'Analyse par M. *A. L. Cauchy.* Paris 1821, page 135.)

Il est vrai que M. *Cauchy* pose le nombre 2 au lieu de *a*, mais sa démonstration ne dépend pas, quant au fond, de la valeur du nombre entier *a*.

2.

La première des règles que nous nous proposons de démontrer, peut être énoncée comme il suit:

Soit

$$(1.)\quad f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots\ f(n),\ \ldots$$

une série à termes positifs et décroissants, à mesure que l'indice n augmente à partir de $n=1$. Pour décider, si la série (1.) est convergente ou divergente, on formera la quantité

$$p_0 = \frac{l\frac{1}{f(n)}}{n}$$

et il y aura *convergence* toutes les fois que p_0 converge vers une limite plus grande que zéro, pour des valeurs de n croissantes à l'infini; il y aura *divergence* si p_0 converge vers une limite inférieure à zéro. Si la limite de p_0 est précisement zéro, on formera l'expression

$$p_1 = \frac{l\frac{1}{nf(n)}}{ln},$$

et la série (1.) sera alors *convergente*, si la limite de p_1, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, est positive, et *divergente*, si cette limite est négative. Dans le cas où la limite de p_1 serait aussi zéro, la série (1.) sera *convergente* ou *divergente* selon que la limite de la quantité

$$p_2 = \frac{l\frac{1}{n\,ln\,f(n)}}{ll_n}$$

est positive ou négative. Si p_2 converge également vers zéro, la convergence ou divergence de la série (1.) dependra de ce que la limite de la quantité

$$p_3 = \frac{l\frac{1}{n\,ln\,lln\,f(n)}}{llln}$$

sera positive ou négative; et ainsi de suite.

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer que la série (1.) est convergente ou divergente, suivant que la limite de p_0 est positive ou négative.

p_0 n'est autre chose que le logarithme de la quantité

$$\frac{1}{[f(n)]^{\frac{1}{n}}}$$

qui, comme on sait, si elle converge vers une limite supérieure à l'unité, peut servir pour constater la convergence, et dans le cas contraire, la divergence de la série (1.). Mais si la limite de la quantité

$$\frac{1}{[f(n)]^{\frac{1}{n}}}$$

est precisement l'unité, ou ce qui revient au même, si la limite de p_0 est zéro, il se présente une doûte. Ce n'est donc que ce cas qu'il y a à considérer.

Dans ce cas il peut arriver, que la quantité p_0, formée par rapport à la série

$$(2.)\qquad f(1),\ af(a),\ a^2f(a^2),\ a^3f(a^3),\ \ldots\ a^mf(a^m),\ \ldots$$

ne converge pas vers zéro. La série (1.) sera alors, en vertu du théorême cité plus haut, convergente ou divergente, selon que la quantité

$$\frac{l\dfrac{1}{a^m f(a^m)}}{m}$$

converge pour des valeurs indéfiniment croissantes de n vers une limite supérieure ou inférieure à zéro. Or en faisant, pour plus de simplicité, $a^m = n$, on a

$$\frac{l\dfrac{1}{a^m f(a^m)}}{m} = \frac{l\dfrac{1}{nf(n)}}{ln}.la,$$

et l'on voit sans peine que la limite de cette expressior sera positive ou négative, ou bien égale à zéro, conjointement avec la limite de

$$p_1 = \frac{l\dfrac{1}{nf(n)}}{ln}.$$

La limite de p_1, si elle est zéro, ne décide évidemment rien relativement à la convergence ou divergence de la série (1.). Mais alors rien ne s'oppose à considérer dérechef au lieu de la série (1.) la série (2.), et de former pour celle-ci la quantité p_1. La série (1.) sera alors convergente ou diver-

gente suivant que la limite de l'expression

$$\frac{l\frac{1}{m.a^m f(a^m)}}{lm}$$

sera positive ou négative. En faisant $a^m = n$, on aura

$$\frac{l\frac{1}{m.a^m f(a^m)}}{lm} = \frac{l\frac{la}{n.ln.f(n)}}{lln - lla} = \frac{l\frac{1}{n.ln.f(n)}}{lln}\cdot\frac{1}{1-\frac{lla}{lln}} + \frac{lla}{lln - lla},$$

d'où il résulte que la limite de la quantité en question ne diffère point de celle de

$$p_2 = \frac{l\frac{1}{n.ln.f(n)}}{lln}.$$

En poursuivant ces raisonnements, on trouvera sans peine les expressions

$$p_3 = \frac{l\frac{1}{n.ln.lln.f(n)}}{llln}$$

$$p_4 = \frac{l\frac{1}{n.ln.lln.llln.f(n)}}{lllln}$$

etc.

dont une quelconque servira à constater la convergence ou divergence de la série (1.), toutes les fois, que les limites de toutes les quantités p_0, p_1, p_2, ... qui la précèdent, sont zéro.

Au reste si l'on désirait une démonstration générale de ce que nous avançons ici, on pourrait s'y prendre comme suit.

Désignons pour plus de simplicité, les logarithmes ln, lln, $llln$, ... respectivement par l^1n, l^2n, l^3n, ..., et supposons que toutes les quantités p_0, p_1, p_2, ..., jusqu'à p_{i-1} inclusivement, ont pour limites *zéro*. Il s'agit de prouver, qu'alors la série (1.) est convergente ou divergente suivant que la quantité

$$p_i = \frac{l\frac{1}{n.ln.l^2n\,....\,l^{i-1}n.f(n)}}{l^i n}$$

converge pour des valeurs indéfiniment croissantes de n vers une limite plus grande que zéro, ou inférieure à zéro. Nous appliquerons pour cela la

quantité

$$p_{i-1} = \frac{l\dfrac{1}{n.ln.l^2n \ldots . l^{i-2}n.f(n)}}{l^{i-1}n}$$

à la série (2.), convergente ou divergente en même temps que la série (1.). Celle-ci sera donc convergente si la quantité

$$\frac{l\dfrac{1}{m.lm.l^2m \ldots . l^{i-2}m.a^m f(a^m)}}{l^{i-1}m},$$

ou bien, en substituant n au lieu de a^m, si la quantité

$$\frac{l\dfrac{1}{n\cdot\dfrac{ln}{la}\cdot l\dfrac{ln}{la}\cdot l^2\dfrac{ln}{la}\ldots . l^{i-2}\dfrac{ln}{la}\cdot f(n)}}{l^{i-1}\dfrac{ln}{la}}$$

converge pour des valeurs indéfiniment croissantes de n vers une limite supérieure à *zéro;* et si la limite de cette quantité est inférieure à *zéro,* la série (1.) sera divergente.

Or, évidemment on peut écrire

$$l\frac{ln}{la} = \left(1-\frac{l^2a}{l^2n}\right)l^2n = \theta_2 l^2n,$$

$$l^2\frac{ln}{la} = \left(1+\frac{l\theta_2}{l^3n}\right)l^3n = \theta_3 l^3n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l^{i-2}\frac{ln}{la} = \left(1+\frac{l\theta_{i-2}}{l^{i-1}n}\right)l^{i-1}n = \theta_{i-1}l^{i-1}n,$$

$$l^{i-1}\frac{ln}{la} = \left(1+\frac{l\theta_{i-1}}{l^in}\right)l^in = \theta_i l^in;$$

θ_2, θ_3, ... θ_{i-1}, θ_i désignant des quantités qui convergent toutes vers l'unité si n croît indéfiniment. La quantité dont la limite décide, s'il y a convergence ou divergence, peut donc être mise sous la forme

$$\frac{l\dfrac{1}{n.ln.l^2n.l^3n \ldots . l^{i-1}nf(n)}}{\theta_i l^in} + \frac{l^2a - l(\theta_2.\theta_3 \ldots . \theta_{i-1})}{\theta_i l^in},$$

et alors il devient manifeste, que la limite vers laquelle cette expression converge, est absolument la même que celle de l'expression

$$p_i = \frac{l\dfrac{1}{n.ln.l^2n.l^3n\ldots\ldots l^{i-1}nf(n)}}{l^in},$$

ce qui prouve que la série (1.) est convergente si la limite de p_i est plus grande que zéro, et divergente si cette limite est inférieure à zéro.

3.

Nous passons à la seconde règle.

Si dans la série

$$(1.)\quad f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ \ldots\ldots f(n),\ \ldots\ldots$$

chaque terme est positif, et inférieur à celui qui le précède, on s'assurera de la convergence ou divergence de la série en formant successivement les expressions

$$q_0 = \frac{f(n)}{f(n+1)} - 1,$$
$$q_1 = nq_0 - 1,$$
$$q_2 = ln.q_1 - 1,$$
$$q_3 = lln.q_2 - 1,$$
etc.

jusqu'à celle qui, pour des valeurs indéfiniment croissantes de n, converge vers une limite différente de zéro. Il y aura convergence toutes les fois, que cette limite est positive, et divergence, si elle est négative.

Quant à la quantité q_0, il est inutile de démontrer que la série (1.) est convergente si, n croissant à l'infinie, q_0 converge vers une limite plus grande que zéro, divergente si la limite de q_0 est inférieure à zéro, et si la limite de q_0 est zéro même, qu'on n'en pourra rien conclure immédiatement sur la convergence ou divergence de la série (1.). Mais dans ce dernier cas la quantité q_0, formée par rapport à la série

$$(2.)\quad f(1),\ af(a),\ a^2f(a^2),\ a^3f(a^3),\ \ldots\ldots a^mf(a^m),\ \ldots\ldots,$$

pourra avoir une limite différente de zéro. On est donc en droit de dire, (en vertu du théorème cité au No. 1) que la série (1.) sera convergente ou divergente suivant que la quantité

$$\frac{a^mf(a^m)}{a^{m+1}f(a^{m+1})} - 1$$

converge pour des valeurs successivement plus grandes de m, vers une limite supérieure ou inférieure à zéro. Or en mettant pour plus de simplicité n au

lieu de a^m, cette quantité deviendra

$$\frac{nf(n)}{anf(an)}-1.$$

Pour lui donner une forme telle, qu'au lieu du rapport $\frac{f(n)}{f(an)}$ il n'y entre que le rapport plus simple $\frac{f(n)}{f(n+1)}$ de deux termes consécutifs de la série (1.), nous remarquerons qu'on a

$$\frac{nf(n)}{anf(an)}=\frac{nf(n)}{(n+1)f(n+1)}\cdot\frac{(n+1)f(n+1)}{(n+2)f(n+2)}\cdots\cdot\frac{(an-1)f(an-1)}{an.f(an)},$$

ou bien, en prenant les logarithmes hyperboliques:

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)}=\sum_{i=n}^{i=an-1}l\frac{if(i)}{(i+1)f(i+1)}.$$

Nous remarquerons encore que X désignant une quantité positive quelconque, et θ une quantité positive inférieure à l'unité, on a

$$(3.)\quad lX=\frac{X-1}{1+\theta(X-1)},$$

d'où, en faisant successivement $\theta=0$ et $\theta=1$, on tire les deux inégalités,

$$(4.)\quad lX< X-1 \quad\text{et}\quad lX>\frac{X-1}{X}.$$

On aura donc aussi

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)}<\sum_{i=n}^{i=an-1}\left[\frac{if(i)}{(i+1)f(i+1)}-1\right]$$

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)}>\sum_{i=n}^{i=an-1}\left[\frac{if(i)}{(i+1)f(n+1)}-1\right]\cdot\frac{(i+1)f(i+1)}{if(i)},$$

ou bien

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)}<\sum_{i=n}^{i=an-1}\left[i\left(\frac{f(i)}{f(i+1)}-1\right)-1\right]\cdot\frac{1}{i+1}$$

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)}>\sum_{i=n}^{i=an-1}\left[i\left(\frac{f(i)}{f(i+1)}-1\right)-1\right]\cdot\frac{(i+1)f(i+1)}{if(i)}\cdot\frac{1}{i+1}.$$

En désignant par m' celle des valeurs de i, contenues entre les limites n et $an-1$, pour laquelle la quantité

$$i\left(\frac{f(i)}{f(i+1)}-1\right)-1$$

prend sa plus grande valeur, et par m'' la valeur de i qui correspond à la plus petite valeur de la quantité

$$\left[i\left(\frac{f(i)}{f(i+1)}-1\right)-1\right]\frac{i+1}{i}\cdot\frac{f(i+1)}{f(i)},$$

m' et m'' seront deux nombres qui deviennent infinis en même temps avec n, et les rapports $\frac{n}{m'}$ et $\frac{n}{m''}$ conservent des valeurs finies; donc il viendra évidemment

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)} < \left[m'\left(\frac{f(m')}{f(m'+1)}-1\right)-1\right]\sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1}$$

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)} > \left[m''\left(\frac{f(m'')}{f(m''+1)}-1\right)-1\right]\frac{m''+1}{m''}\cdot\frac{f(m''+1)}{f(m'')}\sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1}.$$

Ces inégalités contiennent la somme $\sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1}$, à laquelle il est indispensable pour notre bût d'assigner deux limites choisies convenablement, entre lesquelles elle doit toujours rester enfermée. On y parviendra en faisant attention aux inégalités (4.). En effet, on en tire

$$\sum_{i=n}^{i=an-1} l\frac{i+1}{i} < \sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i} = \sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1} - \frac{1}{an} + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{i=n}^{i=an-1} l\frac{i+1}{i} > \sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1},$$

ou bien

$$\sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1} > la + \frac{1}{an} - \frac{1}{n},$$

$$\sum_{i=n}^{i=an-1}\frac{1}{i+1} < la;$$

donc on aura enfin

$$(5.)\quad\begin{cases} l\dfrac{nf(n)}{anf(an)} > la\left[m'\left(\dfrac{f(m')}{f(m''+1)}-1\right)-1\right], \\ l\dfrac{nf(n)}{anf(an)} > la\left[m''\left(\dfrac{f(m'')}{f(m''+1)}-1\right)-1\right]\dfrac{m''+1}{m''}\cdot\dfrac{f(m''+1)}{f(m'')}\left(1+\dfrac{1}{an\,la}-\dfrac{1}{n\,la}\right) \end{cases}$$

et si à ces inégalités on applique la formule (3.) en faisant

$$\Theta = 1+\theta\left(\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\right),$$

$$\Theta' = \left[1+\theta\left(\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\right)\right]\frac{m''+1}{m''}\cdot\frac{f(m''+1)}{f(m'')}\left(1+\frac{1}{an\,la}-\frac{1}{n\,la}\right),$$

on obtient

$$\frac{nf(n)}{anf(an)}-1 < la\left[m'\left(\frac{f(m')}{f(m'+1)}-1\right)-1\right]\Theta,$$

$$\frac{nf(n)}{anf(an)}-1 > la\left[m''\left(\frac{f(m'')}{f(m''+1)}-1\right)-1\right]\Theta'.$$

On conclura aisément des inégalités (5.) que, la limite de q_0 étant zéro, les limites des deux quantités

$$\frac{nf(n)}{anf(an)}-1 \quad \text{et} \quad n\left(\frac{f(n)}{f(n+1)}-1\right)-1 = nq_0-1$$

seront en même temps positives ou négatives, ou égales à zéro.

La série (1.) sera donc convergente ou divergente selon que la quantité

$$q_1 = nq_0-1$$

converge vers une limite positive ou négative pour des valeurs de n croissantes jusqu'à l'infini; ci cette limite est zéro, il y a de doûte.

Dans ce dernier cas on pourra considérer de nouveau au lieu de la série (1.) la série (2.), et former pour celle-ci la quantité q_1. La convergence de la série (1.) dépendra alors de ce que la limite de la quantité

$$m\left[\frac{a^m f(a^m)}{a^{m+1}f(a^{m+1})}-1\right]-1$$

soit plus grande ou plus petite que zéro. En faisant $a^m = n$, cette quantité se présentera sous la forme

$$\frac{ln}{la}\left[\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\right]-1,$$

et on aura, en vertu des inégalités (6.):

$$\frac{ln}{la}\left[\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\right]-1 < lm'\left[m'\left(\frac{f(m')}{f(m'+1)}-1\right)-1\right]\Theta\left[1+\frac{l\frac{n}{m'}}{lm'}\right]-1,$$

$$\frac{ln}{la}\left[\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\right]-1 > lm''\left[m''\left(\frac{f(m'')}{f(m''+1)}-1\right)-1\right]\Theta'\left[1+\frac{l\frac{n}{m''}}{lm''}\right]-1.$$

Or comme q_1, et par suite $\frac{nf(n)}{anf(an)}-1$, devient zéro pour $n=\infty$, et puisque les rapports $\frac{n}{m'}$ et $\frac{n}{m''}$ ont toujours des valeurs finies, les quantités

$$\Theta,\quad \Theta',\quad 1+\frac{l\frac{n}{m'}}{lm'},\quad 1+\frac{l\frac{n}{m''}}{lm''}$$

convergeront vers l'unité pour des valeurs indéfiniment croissantes de n. Il est donc facile à voir que la limite de la quantité

$$\frac{ln}{la}\left[\frac{nf(n)}{(n+1)f(n+1)}-1\right]-1$$

ne diffère en rien de celle de la quantité

$$ln\Big[n\Big(\frac{fn}{f(n+1)}-1\Big)-1\Big]-1 = q_1.ln-1 = q_2,$$

qui pourra être employée, quand elle n'est pas zéro, pour décider, si la série (1.) est convergente ou divergente.

En continuant ainsi, on trouvera aisément les expressions

$$q_3 = q_2.lln-1,$$
$$q_4 = q_3.llln-1,$$
etc.

Or il n'est pas plus difficile de démontrer généralement, que si toutes les quantités $q_0, q_1, q_2, \ldots,$ jusqu'à q_{i-1} inclusivement, convergent vers zéro, la série (1.) sera convergente ou divergente suivant que la quantité

$$q_i = q_{i-1}l^{i-1}n-1$$

converge vers une limite supérieure ou inférieure à zéro.

En effet: comme la quantité q_{i-1}, formée par rapport à la série (1.), converge vers zéro, cette même quantité, rapportée à la série (2.), ne pourra pas avoir zéro pour limite. Pour la série (1.), on a évidemment

$$q_{i-1} = l^{i-2}n\Big\{l^{i-3}n\ldots\ldots ln\Big\{n\Big[\frac{f(n)}{f(n+1)}-1\Big]-1\Big\}-\cdots-1\Big\}-1;$$

la série (1.) sera donc, d'après ce qu'on vient de dire, convergente ou divergente suivant que la quantité

$$l^{i-2}m\Big\{l^{i-3}m\ldots\ldots lm\Big\{m\Big[\frac{a^m f(a^m)}{a^{m+1}f(a^{m+1})}-1\Big]-1\Big\}-\cdots-1\Big\}-1,$$

que, pour plus de simplicité, nous désignerons par Q_{i-1}, a une limite supérieure ou inférieure à zéro. Or en mettant n au lieu de a^m et en conservant aux caractéristiques $\theta_2, \theta_3, \ldots\ldots \theta_{i-1}$ les significations que nous leurs avons assignées plus haut, on a

$$Q_{i-1} = \theta_{i-1}l^{i-1}n\Big\{\theta_{i-2}l^{i-2}n\ldots\ldots\theta_2 l^2 n\Big\{\frac{ln}{la}\Big[\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\Big]-1\Big\}-\cdots-1\Big\}-1,$$

et si l'on fait

$$ln = lm' + l\frac{n}{m'} = \left(1 + \frac{l\frac{n}{m'}}{lm'}\right) lm' = \theta'_1 lm',$$

$$l^2 n = \left(1 + \frac{l\theta'_1}{l^2 m'}\right) l^2 m' = \theta'_2 l^2 m',$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$l^{i-2} n = \left(1 + \frac{l\theta'_{i-3}}{l^{i-2} m'}\right) l^{i-2} m' = \theta'_{i-2} l^{i-2} m',$$

$$l^{i-1} n = \left(1 + \frac{l\theta'_{i-2}}{l^{i-1} m'}\right) l^{i-1} m' = \theta'_{i-1} l^{i-1} m',$$

et

$$ln = \left(1 + \frac{l\frac{n}{m'}}{lm''}\right) lm'' = \theta''_1 lm'',$$

$$l^2 n = \left(1 + \frac{l\theta''_1}{l^2 m''}\right) l^2 m'' = \Theta''_2 l^2 m'',$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$l^{i-2} n = \left(1 + \frac{l\theta''_{i-3}}{l^{i-2} m''}\right) l^{i-2} m'' = \theta''_{i-2} l^{i-2} m'',$$

$$l^{i-1} n = \left(1 + \frac{l\theta''_{i-2}}{l^{i-1} m''}\right) l^{i-1} m'' = \theta_{i-1} l^{i-1} m'',$$

θ'_1, θ'_2, ... θ'_{i-1} et θ''_1, θ''_2, ... θ''_{i-1} désignant des quantités qui convergent vers l'unité, on trouvera par les inégalités (6.):

$$Q_{i-1} < \theta_{i-1}\theta'_{i-1} l^{i-1} \Big\{m'\theta_{i-2}\theta'_{i-2} l^{i-2} m' \dots \theta_2\theta'_2 l^2 m' \\ \times \Big\{\theta'_1 lm'\Big[m'\Big(\frac{f(m')}{f(m'+1)} - 1\Big) - 1\Big]\Theta - 1\Big\} - \dots - 1\Big\} - 1,$$

$$Q_{i-1} > \theta_{i-1}\theta''_{i-1} l^{i-1} m'' \Big\{\theta_{i-2}\theta''_{i-2} l^{i-2} m'' \dots \theta_2\theta''_2 l^2 m'' \\ \times \Big\{\theta''_1 lm''\Big[m''\Big(\frac{f(m'')}{f(m''+1)} - 1\Big) - 1\Big]\Theta' - 1\Big\} - \dots - 1\Big\} - 1;$$

d'où l'on conclura sans difficulté que la limite de la quantité Q_{i-1} est la même que celle de la quantité

$$l^{i-1} n\Big\{l^{i-2} n \dots l^2 n\Big\{ln\Big[n\Big(\frac{f(n)}{f(n+1)} - 1\Big) - 1\Big] - 1\Big\} - \dots - 1\Big\} - 1 \\ = q_{i-1} . l^{i-1} n - 1 = q_i;$$

ce qui suffit pour prouver que si toutes les quantités q_0, q_1, q_2, ... q_{i-1} convergent vers zéro, n croissant indéfiniment, la série (1.) ne pourra être convergente que dans les cas où la quantité q_i ne converge pas vers une quantité négative.

Les règles que nous venons de démontrer pourront quelquefois être en défaut. Cela arrivera dans les cas où les expressions p_i et q_i n'ont pas de limite fixe, mais deviennent tantôt plus grandes, tantôt plus petites que zéro, à mesure que n croît à l'infini; ou bien quand les quantités p_i et q_i convergent vers zéro, quelle que soit la valeur de l'indice i.

4.

Il nous parait digne d'être remarqué, que les deux quantités p_i et q_i, ayant le même indice, convergeront ensemble vers une limite qui est, ou plus grande que zéro, ou inférieure à zéro, ou égale à zéro.

Pour démontrer cela aussi simplement que possible, nous rappellerons un théorème de „L'analyse algébrique de M. *Cauchy*" (Voy. Cours d'analyse, page 48), savoir:

„Si pour des valeurs croissantes de x, la différence

$$f(x+1)-f(x)$$

„converge vers une limite k, la fraction

$$\frac{f(x)}{x}$$

„convergera en même temps vers la même limite."

Il suit de ce théorème que si la quantité

$$l\frac{1}{f(n+1)}-l\frac{1}{f(n)}=l\frac{f(n)}{f(n+1)}$$

converge vers une limite k, pour des valeurs croissantes de n, la quantité

$$\frac{l\frac{1}{f(n)}}{n}$$

convergera en même temps vers la même limite. Les deux quantités

$$p_0=\frac{l\frac{1}{f(n)}}{n} \quad \text{et} \quad q_0=\frac{f(n)}{f(n+1)}-1,$$

pour $n=\infty$, seront donc ou positives ou négatives, ou bien égales à zéro en même temps.

Du même théorème il résulte que si la quantité

$$l\frac{a^m f(a^m)}{a^{m+1}f(a^{m+1})}$$

converge vers une certaine limite, m croissant à l'infini, la quantité

$$\frac{l\frac{1}{a^m f(a^m)}}{m}$$

convergera vers la même limite. En faisant $a^m = n$, on trouvera donc que les deux quantités

$$la \cdot \frac{l\frac{1}{nf(n)}}{ln} \quad \text{et} \quad l\frac{nf(n)}{anf(an)}$$

ont une même limite. Or il suit des inégalités (5.) que les deux quantités

$$l\frac{nf(n)}{anf(an)} \quad \text{et} \quad la\Big[n\Big(\frac{f(n)}{f(n+1)}-1\Big)-1\Big]$$

convergent vers la même limite, si q_0 converge vers zéro; donc les limites des quantités

$$p_1 = \frac{l\frac{1}{nf(n)}}{ln} \quad \text{et} \quad q_1 = n\Big(\frac{f(n)}{f(n+1)}-1\Big)-1$$

ne différeront point entre elles. Il s'entend que nous ne considérons ici que des logarithmes *hyperboliques*.

En substituant dans ces deux expressions $a^m f(a^m)$ au lieu de $f(n)$, et m au lieu de n, il en résulte que les deux quantités

$$\frac{l\frac{1}{m.a^m f(a^m)}}{lm} \quad \text{et} \quad m\Big(\frac{a^m f(a^m)}{a^{m+1} f(a^{m+1})}-1\Big)-1,$$

ou bien, en faisant $a^m = n$, les quantités

$$\frac{l\frac{1}{n\cdot\frac{ln}{la}\cdot f(n)}}{l\frac{ln}{la}} \quad \text{et} \quad \frac{ln}{la}\Big[\frac{nf(n)}{anf(an)}-1\Big]-1$$

auront une même limite. Or ces deux quantités ont, d'après ce qui a été dit plus haut, respectivement les mêmes limites que

$$p_2 = \frac{l\frac{1}{n\,ln f(n)}}{lln} \quad \text{et} \quad q_2 = ln\Big[n\Big(\frac{fn}{f(n+1)}-1\Big)-1\Big]-1,$$

si q_0 et q_1 convergent vers zéro; p_2 et q_2 convergeront donc dans ce cas vers une même limite. On prouvera sans difficulté, d'une manière analogue, que les deux quantités p_2 et q_3 convergent vers une même limite; et ainsi de suite indéfiniment.

Les deux règles démontrées ici diffèrent tant soit peu par leur forme des règles de M. ***Bertrand*** et de M. ***Morgan,*** mais la coïncidence de toutes ces règles est si facile à prouver que nous ne nous y arrèteront pas. Pour les applications de ces règles à des exemples particuliers, nous renvoyons au mémoire de M. ***Bertrand*** cité au No. 1.

St. Petersbourg 1849.

16.

Zur Lehre von der Flugbahn der Artillerie-Geschosse.

(Von Herrn Obristlieutenant *Heim* zu Stuttgart.)

1.

Eine genauere Kenntnifs der Flugbahn der Geschosse ist in vielen Fällen von entschiedenem Nutzen.

Die Gestalt der in der Vertical-Ebene durch die Geschütz-Axe liegende Flugbahn wird ihrer Natur nach, da die Schwerkraft eine der sie bestimmenden Ursachen ist, am einfachsten und angemessensten auf die Richtung der Schwere und auf die Horizontale durch die Geschützmündung (durch den vordern Endpunct der Geschütz-Axe) bezogen.

Beim Richten des Kanonenschusses wird zwar gewöhnlich der Geschütz-Axe ihre Lage stets in Bezug auf die von der Mündung zum Zielpunct gehende gerade Linie, und zwar, um eine bestimmte Entfernung zu erreichen, die gleiche Lage gegen diese Linie, sie mag horizontal sein, oder nicht, gegeben, und die Artilleriepraxis hat hierin vollkommen Recht, weil dieses Verfahren für das Richten der Kanonen passend und bequem und bei der gewöhnlichen Beschaffenheit des Wirkungsfeldes dieser Geschützgattung hinreichend genau ist. Man nimmt, wenn die von der Mündung zum Ziele gehende gerade Linie nicht horizontal ist, gleichsam eine Verwandlung der Coordinaten vor, indem man den Winkel, unter welchem die Geschütz-Axe gestellt wird, und sämmtliche Elemente, also auch den höchsten Punct, oder den Scheitel der Bahn, auf jene Gerade, als neue Abscissenlinie, statt auf die Horizontale durch die Geschützmündung bezieht, und zugleich alle von der Gestalt der Bahn abhängigen Verhältnisse, z. B. die Schufsweite und deren Längen-Abweichungen von der letztern dieser beiden Geraden auf die erstere überträgt.

Allein es kommen doch auch beim Gebrauche der Kanonen Fälle vor, wo man genöthigt ist, in Betracht der Gestaltverhältnisse der Geschofsbahn, auf die Richtung der Schwere und die ihr coordinirte horizontale Richtung zurückzukommen.

Ein solcher Fall findet z. B. Statt, wenn im Festungskriege der Belagerer beabsichtigt, Werke von gröfserer Längen-Ausdehnung, welche in einigermaafsen beträchtlicher Höhe über dem Horizonte seiner Geschützstände liegen, aus Kanonen oder langen Haubitzen mit voller Ladung der Länge nach zu beschiefsen, oder zu enfiliren, indem es hier nach Umständen möglich ist, dafs der als Zielpunct beim Richten der Geschütze dienende feindliche Brustwehrkamm in den aufsteigenden Ast der Geschofsbahn fällt, und die Wirksamkeit des Feuers grofsentheils durch die Lage dieses Zielpuncts gegen den wahren (auf den Horizont bezogenen) Scheitel der Bahn bedingt wird.

Ähnliche Fälle können auch bei den gegen Feldverschanzungen zu führenden Angriffen, und selbst beim Geschützkampfe auf offenem Felde vorkommen.

Die nachfolgenden Untersuchungen mögen dienen, einige Aufklärung darüber zu geben, wie die Gestalt sich bestimmen läfst, welche beim Enfilirschufs, oder auch beim Ricochetschufs, die Geschofsbahn gegen den Zielpunct und die zu beschiefsenden Linien unter gegebenen Umständen annehmen wird, und inwiefern die Wirksamkeit des Feuers von jener Gestalt, und insbesondere von der Lage des höchsten Puncts der Bahn gegen den Zielpunct, abhangt.

2.

Zu diesem Zwecke scheint es angemessen, zuvörderst aus der Ballistik die analytischen Ausdrücke, nach welchen die Flugbahnen sich berechnen lassen, hier anzugeben, und selbst einige einleitende Betrachtungen, welche aus der, wenn gleich zu diesen Rechnungen untauglichen, parabolischen Theorie sich ergeben, vorauszuschicken.

Aus der Gleichung der parabolischen Flugbahn

$$z = \operatorname{tg}\alpha . x - \frac{x^2}{2h_1 \cos^2 x},$$

in welcher

z die verticale Ordinate,

x die horizontale Abscisse, beide von der Geschützmündung an gerechnet,

α den Erhöhungswinkel, d. i. den Winkel, den die Geschützaxe beim Abfeuern mit der Horizontalen in der Ebene der Flugbahn bildet,

h_1 die der Anfangsgeschwindigkeit zugehörige doppelte Geschwindigkeitshöhe

bedeuten, findet sich für den Erhöhungswinkel, welcher bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit genommen werden mufs, wenn die Geschofsbahn durch einen gegebenen Zielpunct, dessen Coordinaten $z=c$ und $x=b$ sind, gehen soll, der Ausdruck:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_1}{b}\left[1 \pm \sqrt{\left(1-\frac{b}{h_1}\left(\frac{b}{h_1}+\frac{2c}{b}\right)\right)}\right].$$

Der kleinste Werth, den h_1 haben darf, wenn das Ziel soll getroffen werden können, ist $=\sqrt{(b^2+c^2)}+c$, indem, wenn h_1 noch kleiner ist, $\frac{b}{h_1}\left(\frac{b}{h_1}+\frac{2c}{b}\right)$ gröfser als 1 und $\operatorname{tg}\alpha$ unmöglich wird.

Ist h_1 gröfser als $\sqrt{(b^2+c^2)}+c$, so kann der Zielpunct unter zwei verschiedenen Erhöhungswinkeln getroffen werden, und es ist wesentlich, zu wissen, ob, wenn einer dieser beiden Winkel genommen wird, das Ziel dadurch in den absteigenden oder in den aufsteigenden Ast der Bahn fällt.

Die Ordinate c_1 des Scheitelpuncts der Bahn ist $=\frac{1}{2}h_1\sin^2\alpha$,

Die Abscisse b_1 dieses Puncts $= h_1\sin\alpha\cos\alpha$;

und, je nachdem $\frac{c}{b} \lesseqgtr \frac{c_1}{b_1}$, d. i. $\lesseqgtr \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ oder $\frac{h_1}{2b}\left[1 \pm \sqrt{\left(1-\frac{b}{h_1}\left(\frac{b}{h_1}+\frac{2c}{b}\right)\right)}\right]$ ist, wird der Zielpunct im absteigenden Aste, im Scheitel, oder im aufsteigenden Aste der Bahn liegen.

Nun ist c_1, also auch c, jedenfalls kleiner als $\frac{1}{2}h_1$, und um so mehr $\frac{c}{b}$ kleiner als der gröfsere der beiden Werthe von $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Daher fällt, bei Anwendung des gröfseren Erhöhungswinkels, welcher jedesmal gröfser ist, als der dem kleinsten Werthe von h_1 entsprechende Winkel, dessen Tangente $=\frac{\sqrt{(b^2+c^2)}+c}{b}$ ist, der Zielpunct immer in den absteigenden Ast.

Nimmt man dagegen den kleinern der beiden Erhöhungswinkel, so ist $\frac{c}{b} \lesseqgtr \frac{h_1}{2b}\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{b}{h_1}\left(\frac{b}{h_1}+\frac{2c}{b}\right)\right)}\right]$, wenn $h_1 \lesseqgtr 2c+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c}$ ist, oder es kommt der Zielpunct in den absteigenden Ast, in den aufsteigenden Ast, oder in den Scheitel der Bahn zu liegen, je nachdem h_1 einen kleinern Werth als $2c+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c}$ hat, welcher letztere nothwendig gröfser ist als $\sqrt{(b^2+c^2)}+c$, oder einen gröfsern, oder diesen Werth selbst; und zu $h_1=2c+\frac{1}{2}\frac{b^2}{c}$ gehört $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2c}{b}$, welcher Werth immer kleiner ist als $\frac{\sqrt{(b^2+c^2)}+c}{b}$.

Nach der Theorie der Bewegung *im leeren Raume* läfst sich daher, wenn anders die Anfangsgeschwindigkeit grofs genug ist, ein Ziel von gegebener Lage immer durch zwei verschiedene Erhöhungen des Geschützes erreichen, von welchen jedoch, wie von selbst erhellet, die gröfsere beim Haubitz- und Kanonen-Feuer keine Anwendung findet. Wird der kleinere Erhöhungswinkel gebraucht, so ist eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit erforderlich, um den Scheitel der Bahn mit dem Zielpunct zusammenfallen zu lassen; und wird dann eine gröfsere Anfangsgeschwindigkeit als diese angewendet, so fällt der Zielpunct in den aufsteigenden, bei kleinerer Geschwindigkeit dagegen, welche indessen immer noch gröfser sein mufs als das Minimum der Anfangsgeschwindigkeit, in den absteigenden Ast der Flugbahn.

Diese, aus der eben erwähnten Theorie abgeleiteten Verhältnisse müssen, wenn auch die Bewegung der Geschosse durch den Widerstand des flüssigen Mittels sehr wesentlich sich ändert, da sie zunächst von der Anfangsgeschwindigkeit, der Schwerkraft und dem Erhöhungswinkel abhängen, in der Hauptsache auch noch für die Bewegung in der Luft gelten; wie Dies die nachfolgenden Sätze zeigen werden.

3.

Für die Bewegung eines Geschosses *im widerstehenden Mittel* hat man, in der Voraussetzung, dafs der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, die beiden Grundgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\tfrac{1}{2}\mu\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial t} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g-\tfrac{1}{2}\mu\frac{\partial s}{\partial t}\frac{\partial z}{\partial t},$$

welche, durch Wegschaffung der Veränderlichen t, in die Gleichung der Flugbahn

$$(A.) \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \mu\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

übergehen, zu welcher noch die Gleichung

$$(B.) \qquad -\frac{1}{g}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2}{g}$$

gehört.

In der Vertical-Ebene der Flugbahn, in welcher der Ort des Coordinaten-Ursprungs vorerst unbestimmt ist, sind die verticalen z von unten nach oben, die horizontalen x nach der Seite, wohin das Geschofs sich be-

wegt, gerichtet angenommen; g ist die Beschleunigung der Schwere im flüssigen Mittel; μ ist $= \frac{3}{4}\frac{nD}{D_1 l}$, wo

n einen durch Erfahrung zu bestimmenden beständigen Coëfficienten,

D die Dichtigkeit des flüssigen Mittels,

D_1 die Dichtigkeit des Geschosses,

l dessen Halbmesser

bedeuten.

Verlegt man den Anfang der Coordinaten in den Scheitelpunct O der Bahn, und setzt ferner

f die Geschwindigkeit in diesem Puncte,

f_1 die Anfangsgeschwindigkeit,

$h = \frac{f^2}{g}$ und $h_1 = \frac{f_1^2}{g}$ die diesen Geschwindigkeiten zugehörigen doppelten Geschwindigkeitshöhen,

α den Erhöhungswinkel,

log die natürlichen Logarithmen,

e deren Basis,

so erhält man durch Integration der Gleichung ($A.$), in Verbindung mit ($B.$):

$$(a.)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2}{g} &= \frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}{\frac{1}{h}-\frac{1}{2}\mu\left[\frac{\partial z}{\partial x}\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}+\log\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)}\right)\right]}, \\ h_1\cos^2\alpha &= \frac{1}{\frac{1}{h}-\frac{1}{2}\mu\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}+\log\operatorname{tg}(45^\circ+\frac{1}{2}\alpha)\right)} \end{aligned}\right.$$

und, da eine weitere Integration in geschlossener Form nicht möglich ist, durch Integration in Reihenform:

$$(C.)\quad -z = \frac{1}{\mu^2 h}(e^{\mu x}-\mu x-1)+\frac{1}{\mu^4 h^3}\left(\tfrac{1}{36}e^{3\mu x}-\tfrac{1}{4}e^{2\mu x}+(\tfrac{1}{2}\mu x-\tfrac{1}{4})e^{\mu x}+\tfrac{1}{6}\mu x+\tfrac{17}{36}\right)\ldots,$$

$$(D.)\quad -\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\mu h}(e^{\mu x}-1)+\frac{1}{\mu^3 h^3}\left(\tfrac{1}{12}e^{3\mu x}-\tfrac{1}{2}e^{2\mu x}+(\tfrac{1}{2}\mu x+\tfrac{1}{4})e^{\mu x}+\tfrac{1}{6}\right)\ldots,$$

$$(E.)\quad -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{h}e^{\mu x}+\frac{1}{\mu^3 h^3}\left(\tfrac{1}{4}e^{3\mu x}-e^{2\mu x}+(\tfrac{1}{2}\mu x+\tfrac{3}{4})e^{\mu x}\right)\ldots$$

Für gröfsere und mittlere Geschwindigkeiten der Artillerie-Geschosse und für die den letzteren Geschossen zugehörigen Werthe von μ, convergiren diese drei Reihen sehr schnell, so dafs selbst die zweiten Glieder zur rechten Seite des Gleichheitszeichens ohne erheblichen Fehler weggelassen werden können. Die nöthigen Correctionen lassen sich dann leicht nachholen.

4.

Sind in Bezug auf den Zielpunct M die Abstände $AN = b$ und $NM = c$ gegeben und ist OP oder $-z = -z_1$, PM oder $x = x_1$, so giebt die Gleichung $(C.)$

$$(b.)\quad \begin{cases} c + z_1 = \dfrac{1}{\mu^2 h}(e^{-\mu(b-x_1)} + \mu(b - x_1) - 1), \\ \quad\; z_1 = \dfrac{1}{\mu^2 h}(e^{\mu x_1} - \mu x_1 - 1), \end{cases}$$

demnach erhält man durch Subtraction

$$c = \frac{1}{\mu^2 h}((b^{-\mu b} - 1)e^{\mu x_1} + \mu b), \quad \text{und} \quad e^{\mu x_1} = \frac{\mu b - \mu^2 ch}{1 - e^{-\mu b}};$$

woraus, wenn h bekannt ist, x_1 und somit z_1 gefunden werden können.

Ergiebt sich $e^{\mu x_1}$ gröfser als 1 oder x_1 positiv, so fällt, mit der Voraussetzung übereinstimmend, der Scheitel der Bahn O zwischen den Anfangspunct A und den Zielpunct M.

Wird $e^{\mu x_1}$ kleiner als 1 oder x_1 negativ, so liegen Scheitelpunct und Anfangspunct auf entgegengesetzten Seiten des Zielpuncts.

Findet sich $e^{\mu x_1}$ gleich 1 oder f_1 gleich Null, so fällt der Scheitel der Bahn in den Zielpunct, und durch die Gleichung

$$(c.)\quad \frac{\mu b - \mu^2 ch}{1 - e^{-\mu b}} = 1 \quad \text{oder} \quad \mu h = \frac{e^{-\mu b} + \mu b - 1}{\mu c}$$

wird sonach diejenige Scheitelgeschwindigkeit bestimmt, bei welcher Ziel und Scheitel zusammenfallen.

Die Gleichungen $(D.)$ und $(E.)$, in Verbindung mit $(B.)$, geben ferner

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu h}(1 - e^{-\mu b}.e^{\mu x_1}), \quad \text{und}$$

$$h_1 = \frac{h(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)}{e^{-\mu b}.e^{\mu x_1}},$$

woraus durch Combination mit

$$(d.)\quad e^{\mu x_1} = \frac{\mu b - \mu^2 ch}{1 - e^{-\mu b}}$$

folgende weitere Ausdrücke hervorgehen:

$$(e.)\quad e^{\mu x_1} = e^{\mu b}.\frac{\mu b \operatorname{tg}\alpha - \mu c}{(e^{\mu b} - 1)\operatorname{tg}\alpha - \mu c},$$

$$(f.)\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\mu h}\left(1 - \frac{\mu b - \mu^2 ch}{e^{\mu b} - 1}\right)$$

$$= \frac{\mu^2 b h_1}{2(e^{\mu b} - \mu b - 1)}\left[1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2(e^{\mu b} - \mu b - 1)}{\mu^2 b h_1}\left(\frac{2(e^{\mu b} - \mu b - 1)}{\mu^2 b h_1} + \frac{2c}{b}\right)\right)}\right],$$

$$(g.)\qquad \mu h = \frac{e^{\mu b}-\mu b-1}{(e^{\mu b}-1)\operatorname{tg}\alpha-\mu c} = \frac{\mu b-(1-e^{-\mu b})e^{\mu x_1}}{\mu c},$$

$$(h.)\qquad \mu h_1 = \frac{\mu h}{(1-\mu h\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha} = \frac{e^{\mu b}-\mu b-1}{(\mu b\operatorname{tg}\alpha-\mu c)\cos^2\alpha}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen ($a.$, $d.$, ... $h.$) lassen sich, in Beziehung auf eine Geschofsbahn, welche durch ein Ziel von gegebener Lage gehen soll, von den vier Bestimmungsstücken: Anfangsgeschwindigkeit, Scheitelgeschwindigkeit, Erhöhungswinkel und Scheitel-Abscisse, immer eines aus jedem der drei andern bestimmen, und sodann die Scheitel-Ordinate mittels der Gleichung ($b.$) finden.

In Hinsicht der Anfangsgeschwindigkeit finden ähnliche Bedingnisse wie bei der Bewegung im leeren Raume (2.) Statt.

Die doppelte Geschwindigkeitshöhe h_1 darf, wenn überhaupt eine durch den Zielpunct gehende Bahn des Geschosses möglich sein soll, nicht kleiner sein als $\frac{2(e^{\mu b}-\mu b-1)}{\mu^2(\sqrt{(b^2+c^2)}-c)}$, weil sonst $\operatorname{tg}\alpha$ imaginär wird; und der dieser Gränze entsprechende Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ ist, wie bei der Bewegung im leeren Raume, gleich $\frac{\sqrt{(b^2+c^2)}+c}{b}$.

Bei gröfseren Werthen von h_1 kann das Ziel unter zwei verschiedenen Erhöhungswinkeln erreicht werden, und die Werthe von $\operatorname{tg}\alpha$, mit positivem Wurzelzeichen, nehmen mit h_1 zugleich zu, die mit negativem Wurzelzeichen dagegen ab, während h_1 zunimmt.

Vermöge der Gleichung ($e.$) ist

$$e^{\mu x_1} \gtreqless 1,\ \text{je nachdem}\ \operatorname{tg}\alpha \gtreqless \frac{\mu c(1-e^{-\mu b})}{e^{-\mu b}+\mu b-1}$$

ist, und dem Werthe $\frac{\mu c(1-e^{-\mu b})}{e^{-\mu b}+\mu b-1}$ von $\operatorname{tg}\alpha$, welcher kleiner ist als $\frac{\sqrt{(b^2+c^2)}+c}{b}$, entspricht nach der Gleichung ($h.$) ein Werth von

$$\mu h_1 = e^{\mu b}.\frac{(e^{-\mu b}+\mu b-1)^2+\mu^2c^2(1-e^{-\mu b})^2}{\mu c(e^{-\mu b}+\mu b-1)},$$

welcher nothwendig gröfser ist als der kleinste Werth $\frac{2(e^{\mu b}-\mu b-1)}{\mu^2(\sqrt{(b^2+c^2)}-c)}$ von μh_1 und, in die Wurzelgröfse der Gleichung ($f.$) gesetzt, dieser Gröfse den Werth $1-\frac{2\mu^2c^2(1-e^{-\mu b})(e^{\mu b}-\mu b-1)}{\mu b.e^{\mu b}((e^{-\mu b}+\mu b-1)^2+\mu^2c^2(1-e^{-\mu b})^2)}$ giebt, in welchem das zweite Glied kleiner als 1 ist, so dafs die Wurzelgröfse, damit $\operatorname{tg}\alpha$ gleich $\frac{\mu c(1-e^{-\mu b})}{e^{-\mu b}+\mu b-1}$ werde, mit negativem Zeichen genommen werden mufs.

Demnach fällt, wenn bei irgend einem Werthe von h_1, welcher gröfser als sein Minimum ist, der kleinere der beiden Erhöhungswinkel genommen wird, das Ziel in den absteigenden Ast, in den Scheitel, oder in den aufsteigenden Ast, je nachdem

$$\mu h_1 \lesseqgtr e^{\mu b}\left(\frac{e^{-\mu b}+\mu b-1}{\mu c}+\frac{\mu c(1-e^{-\mu b})^2}{e^{-\mu b}+\mu b-1}\right)$$

ist, und wenn der gröfsere dieser Winkel genommen wird, immer in den absteigenden Ast.

Indessen darf nicht unbemerkt bleiben, dafs der angegebene kleinste Werth von h_1, und der ihm entsprechende von $\operatorname{tg}\alpha$, wegen der bei abnehmendem h nach und nach eintretenden ungenügenden Convergenz der Reihen (*C.*, *D.*, *E.*), nicht als genau gelten kann; so wie aus der gleichen Ursache überhaupt mit dem gröfseren Werthe von α die mit Hülfe dieser Reihen abgeleiteten Ausdrücke zur Anwendung wenig geeignet sind.

Aus der Gleichung (*h.*) ergiebt sich für $c=0$:

$$(i.)\qquad \mu h_1 = \frac{e^{\mu b}-\mu b-1}{\frac{1}{2}\mu b\sin 2\alpha};$$

welcher Ausdruck dazu dienen kann, aus der horizontalen Schufsweite b und dem Erhöhungswinkel α die Anfangsgeschwindigkeit zu finden.

Ist $f_{\prime\prime}$ die Endgeschwindigkeit für die horizontale Schufsweite, und $h_{\prime\prime}=\frac{f_{\prime\prime}^2}{g}$, so findet sich, angenähert, aus (*B.*, *C.*, *D.*, *e.*, ... *h.*):

$$\mu h_{\prime\prime} = \frac{e^{\mu b}-\mu b-1}{\mu b.e^{\mu b}\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha(e^{-\mu b}+\mu b-1)^2}{\mu b.e^{-\mu b}(e^{\mu b}-\mu b-1)},$$

und hieraus ferner, wenn α klein ist, nahe

$$f_{\prime\prime} = f_1.e^{-\frac{1}{2}\mu b}.$$

Wird, wie beim Ricochetschusse, beabsichtigt, dafs das Geschofs aufser dem Puncte M noch einen zweiten Punct M_1, für welchen $AN_1=b+b_1$ und $N_1M_1=c-c_1$ ist, treffen soll, wodurch Anfangsgeschwindigkeit und Erhöhungswinkel zugleich bestimmt werden, so hat man neben der Gleichung (*d.*) noch die weitere:

$$e^{\mu(b_1+x_1)} = \frac{\mu(b+b_1)-\mu^2(c-c_1)h}{1-e^{-\mu(b+b_1)}},$$

woraus in Verbindung mit (*d.*)

$$(k.)\qquad \mu h = \frac{b(e^{\mu b_1}-1)-b_1(1-e^{-\mu b})}{c(e^{\mu b_1}-1)+c_1(1-e^{-\mu b})},$$

und sodann weiter nach (*f.* und *h.*) der Erhöhungswinkel und die Anfangsgeschwindigkeit sich ergeben.

5.

Um die Anwendung der entwickelten Ausdrücke an einem Zahlenbeispiele zu zeigen, sei

Der horizontale Abstand $AN = b$ des Zielpuncts von der Geschützmündung . . . . = 3000 Par. Fufs,

Dessen Höhe $NM = c$ über dem Horizonte der Geschützmündung . . . . = 131 Par. F.*).

Der Winkel, den die gerade Linie von der Mündung nach dem Ziele mit der Horizontalen macht, der sogenannte Terrainwinkel, ist demnach . . . . = $2^0\,30'$,

und die Länge dieser geraden Linie, $\sqrt{(b^2+c^2)}$ . . . = 3002,9 Par. F.

Wird der Winkel $2^0\,30'$ von dem Erhöhungswinkel α, den die Rechnung giebt, abgezogen, so bleibt der Winkel übrig, unter welchem die Geschütz-Axe gegen die gerade Linie von der Mündung nach dem Ziele beim Richten zu stellen ist.

Der Widerstands-Coëfficient $\mu = \frac{3}{4}\frac{nD}{D_1 l}$ hangt von der Gröfse und dem Gewichte der Geschosse ab, und findet sich, wenn der numerische Coëfficient n, nach **Borda, Lombard** und **Poisson** $= \frac{3}{8}$, und die Dichtigkeit (spec. Schwere) D der atmosphärischen Luft für eine mittlere Temperatur (etwa $+10^0$R.) $= \frac{1}{810}$ angenommen wird, wie folgt.

Nach dem „Aide-Mémoire à l'usage des officiers etc." vom Jahr 1844 ist

Für die 24pfünd. Kugel, bei 0,37 Centimeter Spielraum, $2l = 14{,}9$ Centimeter,

Für die 16pfünd. Kugel, bei 0,37 Centimeter Spielraum, $2l = 13$ Centim., und

Für beide Geschosse $D_1 = 7{,}207$;

Für die 22 Centim. Granate, bei 0,25 Centim. Spielraum, $2l = 22{,}05$ Centim. und

$D_1 = \frac{23\,000}{\frac{4}{3}\pi l^3}$, wenn l in Centimetern angegeben wird, $= 4{,}097$, indem mit 1 Kilogramm Füllung die Granate 23 Kilogr. und 1 Cubikcentimeter Wasser 1 Gramm wiegt;

Für die 16 Centim. Granate, bei 0,25 Centim. Spielraum, ist $2l = 16{,}3$ Centim. und

$D_1 = \frac{11000}{\frac{4}{3}\pi l^3} = 4{,}851$, indem mit 0,475 Kilogr. Füllung die Granate 11 Kilogr. wiegt.

*) Die beispielsweise hier angegebenen Abstände sind den Örtlichkeiten einer deutschen Festung, und die Geschütze der französischen Artillerie entnommen.

Man hat demnach in Pariser Fufsen $\frac{1}{\mu}$ oder $\frac{20}{9}\frac{D_1}{D}l$:

Für die 24pfünd. Kugel $= 2938{,}457$,
- - 16pfünd. - $= 2563{,}755$,
- - 22^c Granate $= 2472{,}240$,
- - 16^c - $= 2163{,}702$.

6.

Flugbahn der 24pfünd. Kugel.

1) Soll der Scheitel der Bahn in den Zielpunct, für welchen $b = 3000$, $c = 131$ ist, fallen, so findet sich, die Beschleunigung der Schwere g zu 30,1963 F. *) angenommen:

Aus (c.) die Scheitelgeschwindigkeit f oder $\sqrt{(gh)}$ . . . $=$ 871,2 F.,
Aus (f.) der entsprechende Erhöhungswinkel α . . . . $= 4^0\,16'$,
Aus (h.) die erforderliche Anfangsgeschwindigkeit f_1 oder $\sqrt{(gh_1)} = 1455{,}6$ F.;
wozu nach dem „Aide-Mém. p. 429" eine Ladung von 2,94 Kilogr. gehört.

Bis die Kugel vom Scheitel der Bahn oder vom Zielpunct an wieder um 7 F. sinkt, oder bis sie einen 7 F. unter dem Brustwehrkamm liegenden horizontalen Wallgang erreicht, geht sie noch weiter um 574 F., und es macht dann ihre Bahn mit dem Horizont einen Winkel von $1^0\,27'$.

Wird bei der Berechnung von f_1 noch auf das zweite Glied von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ in der Gleichung (E.) Rücksicht genommen, so findet sich $f_1 = 1456{,}4$ F., also nur um 0,8 F. gröfser als mittels der Gleichung (h.); woraus die starke Convergenz der Reihen bei den angewendeten Werthen von μ und h, und die Zuläfslichkeit der Vernachlässigung der zweiten Glieder derselben hervorgeht.

2) Nimmt man an, die Kugel gehe, indem das Geschütz auf denselben Zielpunct und unter demselben Winkel, wie im vorigen Falle, gerichtet wird, vermöge der unvermeidlichen Unregelmäfsigkeiten der Schüsse, nur um den 20ten Theil der mittleren Schufsweite zu weit, wonach sie auf eine horizontale Entfernung von $3000.\frac{21}{20} = 3150$ F. eine Höhe von $131\frac{21}{20} = 137{,}55$ F. erreicht, so hat man

$$\alpha = 4^0\,16',\quad b = 3150,\quad c = 137{,}55,$$

*) Unter F. wird hier und im Folgenden *Pariser Fufs* verstanden. Der Einfachheit wegen ist für die vier Geschofsgattungen der gleiche Werth von g, nämlich die Beschleunigung im leeren Raume, welche um etwa 0,005 F. zu grofs ist, genommen.

und erhält

Aus (*g.*) für die Scheitelgeschwindigkeit f . . . . . = 882 F.,

Aus (*h.*) für die Anfangsgeschwindigkeit f_1 . . . . . = 1507,2 F.,

zu welcher eine Ladung von 3,2 Kilogr. gehört.

Aus (*e.*) erhält man für den horizontalen Abstand des Scheitels vom Zielpunct, welcher Scheitel jenseits des letztern Punctes, vom Geschütze an gerechnet, fällt, ... = 132,5 F.,

Aus (*b.*) für die Höhe des Scheitels über eben diesem Puncte = 6,556 F.

Es findet sich ferner, dafs die Kugel, bis sie wieder auf die Höhe des Zielpuncts, d. i. um 6,556 F. fällt, vom Scheitel an noch um 563 F. weiter geht; so dafs sie demnach, während sie gegen ein mit dem Geschütze in gleicher Höhe stehendes Ziel nur um 150 F. zu weit gegangen wäre, wegen des höher stehenden Zieles in Wirklichkeit um $132 + 563 = 695$ F. zu weit geht.

3) Die Scheitelgeschwindigkeit f des Geschosses sei = 900 F., so dafs der Zielpunct, wenn er getroffen werden soll, vermöge (1.), zwischen den Scheitel und das Geschütz, oder in den aufsteigenden Ast der Bahn fallen mufs. Man hat demnach $b = 3000$, $c = 131$, $f = 900$, und findet

Aus (*f.*) für den zu nehmenden Erhöhungswinkel x . . = 4° 6′,

Aus (*h.*) für die erforderliche Anfangsgeschwindigkeit f_1 = 1534,5 F.;

wozu eine Ladung von 3,4 Kilogr. gehört.

Aus (*d.*) findet sich für den Abstand x_1, in welchem der Scheitel vor den Zielpunct, auf die vom Geschütz abgekehrte Seite des letztern fällt, ... 120,8 F.,

Aus (*b.*) für die Höhe z_1 des Scheitels über dem Zielpunct . 0,268 F.

Bis das Geschofs vom Scheitel an um 7,268 F. sinkt, oder bis es einen 7 F. unter dem Zielpunct liegenden horizontalen Wallgang erreicht, geht es vom Scheitel an noch um 603 F. weiter, oder entfernt sich vom Zielpunct bis zu 724 F., und es macht dann seine Bahn mit dem Horizonte einen Winkel von 1° 26′.

4) Wächst die Scheitelgeschwindigkeit f der Kugel, welche das Ziel, wofür $b = 3000$ und $c = 131$ ist, treffen soll, bis zu 923 F., so mufs das letztere um so mehr in den aufsteigenden Ast der Bahn fallen, und die entsprechende Anfangsgeschwindigkeit f_1 des Geschosses beträgt dann 1601,2 F.; wozu ungefähr die *volle Ladung* von 4 Kilogr. gehört.

Es ergiebt sich für diesen Fall:

Der erforderliche Erhöhungswinkel α . . . . $= 3^{0}\ 58'$,

Der Abstand x_1 des Scheitels vom Ziel . . . . . . $= 223{,}4$ F.,

Die Höhe z_1 des Scheitels über dem Ziel . . . . . . $= 0{,}863$ F.,

und bis das Geschofs um 7,86 F., d. i. um 7 F. unter die Höhe des Ziels, herabsinkt, geht es noch weiter um 642 F., oder entfernt sich von dem Ziele um 865 F., und sein Weg bildet dann mit dem Horizonte einen Winkel von $1^{0}\ 27'$.

5) Das Geschütz werde nun unter dem für die volle Ladung nach dem vorigen Falle ermittelten Erhöhungswinkel $3^{0}\ 58'$ gerichtet, die Kugel gehe aber mit einer den zwölften Theil der mittlern Schufsweite betragenden Längen-Abweichung zu weit, oder erreiche in einer horizontalen Entfernung von $3000 \cdot \frac{13}{12} = 3250$ F. die Höhe über der Mündung von $131 \cdot \frac{13}{12} = 141{,}917$ F., so dafs

$$\alpha = 3^{0}\ 58', \quad b = 3250, \quad c = 141{,}917$$

zu nehmen ist, und auf eine zufällig gröfsere Geschwindigkeit des Geschosses geschlossen werden mufs. Es findet sich dann

Die Scheitelgeschwindigkeit f . . . . $=$ 939,5 F.,

Die Anfangsgeschwindigkeit f_1 . . . . $= 1693{,}1$ F.,

Der horizontale Abstand, in welchem der Scheitel vor dem Zielpunct liegt, ... $=$ 442,3 F.,

Die Höhe des Scheitels über dem letztern . . . . . $= 11{,}536$ F.,

Bis die Kugel um diese letztere Höhe wieder sinkt, geht sie noch um 785 F. weiter, und ihre, auf dem Horizonte des Zielpuncts gemessene Längen-Abweichung beträgt daher in Wirklichkeit $785 + 442 = 1227$ F., während sie bei einem mit dem Geschütze gleich hoch stehenden Ziele von gleicher Entfernung nur 250 F. betragen hätte.

6) Soll das Object, dessen horizontaler Abstand vom Geschützstande 3000 und dessen Höhe über der Mündung 131 F. beträgt, mit einer kleineren Scheitelgeschwindigkeit, oder unter einem gröfsern Erhöhungswinkel als im Falle (1.), gefunden worden, getroffen werden, so mufs der Scheitel der Bahn zwischen den Anfangspunct und das Object fallen.

Setzt man den Winkel $\alpha = 4\frac{1}{2}^{0}$, so ergiebt sich

Aus (g.) die Scheitelgeschwindigkeit f . . . . $=$ 838,9 F.,

Aus (h.) die Anfangsgeschwindigkeit f_1 . . . . $= 1370{,}8$ F.,

wozu eine Ladung von 2,54 Kilogr. gehört.

Aus (*e.*) ergiebt sich für den horizontalen Abstand, in welchem der Scheitel hinter dem Zielpunct, auf der dem Geschütze zugekehrten Seite desselben liegt, ... = 132 F.,

Aus (*b.*) die Höhe des Scheitels über dem letztern Punct = 0,379 F.

Bis die Kugel um 7,38 F. vom Scheitel an, oder um 7 F. unter die Höhe des Zielpuncts sinkt, geht sie vom Scheitel an noch um 567,5 F. weiter, oder über das Ziel hinaus um 435,5 F., und der Winkel ihrer Bahn mit dem Horizont in dieser Höhe ist 1° 32′.

7) Wird der Winkel $\alpha = 5^0$ genommen, so ist, damit dasselbe Object getroffen werde,

Eine Scheitelgeschwindigkeit f . . . . = 777,6 F.,

Eine Anfangsgeschwindigkeit f_1 . . . . = 1229 F.,

wozu eine Ladung von 2 Kilogr. gehört, nöthig, und es findet sich, dafs der Scheitel der Bahn hinter das Ziel um 335,6 F. fällt, und über dasselbe um 2,924 F.

Bis das Geschofs um 7 F. unter die Höhe des Ziels herabsinkt, geht es vom Scheitel an noch um 609 F. oder vom Ziele an um 273 F. weiter, und die Neigung seiner Bahn gegen den Horizont beträgt dann 1° 56′.

7.

Flugbahn der 16pfünd. Kugel.

1) Wenn der Zielpunct, dessen horizontaler Abstand b vom Geschütze = 3000, und dessen Höhe über dem letztern = 131 F. ist, von der 16pfünd. Kugel so getroffen werden soll, dafs der Scheitel der Bahn mit ihm zusammenfällt, so mufs

Die Scheitelgeschwindigkeit f oder $\sqrt{(gh)}$ . . . . . . = 853,2 F.,

Der Erhöhungswinkel . . . . 4° 12′,

Die Anfangsgeschwindigkeit f_1 oder $\sqrt{(gh_1)}$ . . . . . . = 1535,7 F.

sein; wozu eine Ladung von 2,76 Kilogr. gehört. In ihrem absteigenden Aste geht dann die Kugel, bis sie einen 7 F. unter dem Zielpunct liegenden horizontalen Wallgang trifft, noch um 560 F. weiter und macht beim Auffallen mit dem Wallgange einen Winkel von 1° 29′.

Der *vollen Ladung* der 16pfünd. Kanone, welche nach dem „Aide-Mémoire p. 412" 2,666 Kilogr. beträgt, entspricht nach p. 429 eine Anfangsgeschwindigkeit von 493,5 Meter = 1519,2 F., welche um 16,5 F. kleiner ist als die so eben gefundene Anfangsgeschwindigkeit.

Wird die 16pfünd. Kanone mit dieser vollen Ladung angewendet, so wird demnach das Ziel noch etwas unter den Scheitel der Bahn in den absteigenden Ast fallen, und es mufs der Erhöhungswinkel um ein weniges gröfser, als der so eben angegebene genommen werden. Jedoch ist der Unterschied so unbedeutend, dafs sich ohne erheblichen Fehler die Ladung von 2,666 Kilogr. als diejenige ansehen läfst, bei der das Ziel in den Scheitel fällt.

2) Wird beabsichtigt, die 16pfünd. Kugel solle, wie beim Ricochetiren (Aide-Mémoire p. 417), indem ihre Bahn durch das Ziel geht, für welches $b = 3000$, $c = 131$ ist, einen 7 F. niedriger als das letztere liegenden horizontalen Wallgang in einem Abstande vom Ziele von 42 Meter $= 129{,}29$ F. erreichen, so findet man, indem man $b_1 = 129{,}29$, $c_1 = 7$ setzt:

Aus (*k.*) die dazu gehörige Scheitelgeschwindigkeit f . $= 663{,}6$ F.,

Sodann nach (*d.*) den Abstand x_1 des zwischen das Geschütz und das Ziel fallenden Scheitels von letzterem . . . $= 623{,}4$ F.,

Nach (*b.*) die Höhe z_1 des Scheitels über dem Ziel . . $= 14{,}472$ F.,

Nach (*f.*) den Erhöhungswinkel α . . . . $= 6^{\circ}\ 4'$,

wozu ein Geschütz-Aufsatz von 274 Millim. (Aide-Mémoire p. 432) gehört,

Und nach (*h.*) die erforderliche Anfangsgeschwindigkeit $f_1 = 1061$ F., zu welcher eine Ladung von 1,1 Kilogr. gehört.

Der Winkel, den die Bahn des Geschosses mit dem Wallgange beim Niederfallen bildet, beträgt $3^{\circ}\ 26'$.

8.

Flugbahn der 22centim. Granate.

1) Soll die 22^{c} Granate so fortgeschleudert werden, dafs sie das angegebene Ziel im Scheitel ihrer Bahn trifft, so mufs sie, wie sich aus (*c.*) ergiebt, mit einer Geschwindigkeit f von . . . . 848,2 F. in diesem Scheitel ankommen,

(*h.*) mit einer Anfangsgeschwindigkeit f_1 von . . . . . . 1560 F.

Und (*f.*) unter dem Erhöhungswinkel α . . . . $= 4^{\circ}\ 10'$

abgeschossen werden.

Nach dem „Aide-Mémoire p. 429" ist aber die gröfste Anfangsgeschwindigkeit, mit welcher dieses Geschofs aus der 22^{c} Haubitze, nämlich mit der Ladung von 2 Kilogr., fortgetrieben werden kann, 286 Meter $= 880{,}4$ F. Daher kann das Ziel mit eben diesem Geschütz nicht anders als im absteigenden Aste der Geschofsbahn getroffen werden.

2) Wenn nun das Ziel mit dieser möglich-gröfsten Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses = 880,4 F. erreicht werden soll, so ist dazu, wie aus (*f.*) gefunden wird,

Ein Erhöhungswinkel α von . . . . 7° 47′ 18″
erforderlich, und man erhält ferner

Aus (*e.*) den Abstand x_1 vom Ziele, da der Scheitel hinter dasselbe, gegen das Geschütz zu fällt, ... = 841,6 F.,

Aus (*b.*) die Höhe desselben z_1 über dem Ziele . . . = 37,82 F.,

Aus (*g.*) die Scheitelgeschwindigkeit f . . . . = 564 F.

und die horizontale Entfernung, um welche das Geschofs vom Ziele an noch weiter geht, bis es sich 7 F. unter die Höhe desselben herabgesenkt hat, = 70 F., so wie den Winkel, den seine Bahn auf dieser Entfernung mit dem Horizonte bildet, ... =5° 59′.

Wird der Erhöhungswinkel α durch Zuziehung des zweiten Gliedes der Reihe (*D.*) verbessert, so ergiebt sich derselbe = 7° 46′ 58″, also nur um 20″ kleiner als aus der Gleichung (*f.*); was auch bei den hier angewendeten Werthen von μ und h eine noch genügende Annäherung der Ausdrücke (*b.*) .... (*h.*) zeigt.

3) Die Anfangsgeschwindigkeit, welche die 22ᶜ Granate aus dem ***canon-obusier*** von 22ᶜ der französischen Marine mit 3,5 Kilogr. Ladung erhält, ist im „Aide-Mémoire" nicht angegeben. Man findet aber mit Hülfe der Gleichung (*i.*)

Aus der Tragweite von 1000 Metern, mit 82 Millim. Aufsatz, oder 3° 25′ Erhöhung,
u. aus der Tragweite - 1200 - - 131 - - - 4° 32′ - -
(Aide-Mém. p. 426 u. 432) die Anfangsgeschwindigkeit der aus diesem Geschütze mit 3,5 Kilogr. geschossenen Granate ziemlich übereinstimmend = 1114 F.

Soll das Geschofs mit eben dieser Anfangsgeschwindigkeit das angegebene Ziel erreichen, so beträgt nach den entwickelten Gleichungen

Der nöthige Erhöhungswinkel α . . . . 5° 47′,

Die Scheitelgeschwindigkeit f . . . . 678,6 F.,

Der Abstand x_1 des Scheitels, welcher zwischen das Geschütz und das Ziel fällt, von dem letztern . . . . 574,3 F.,

Die Höhe z_1 desselben über dem Ziel . . . . 11,70 F.,

Die horizontale Entfernung vom Ziele, in der es einen 7 F. unter demselben liegenden Wallgang erreicht, ... 144,4 F.,

Der Einfallwinkel, den es mit dem letztern macht, . . . 3° 8′.

9.

Flugbahn der 16centim. Granate.

1) Wenn das Ziel, dessen horizontale Entfernung b vom Geschütze 3000 und dessen Höhe c über demselben 131 F. beträgt, von der 16ᶜ Granate im Scheitel der Bahn getroffen werden soll, so ist dazu

Eine Scheitelgeschwindigkeit f von . . . . 828,7 F.,
Eine Anfangsgeschwindigkeit f_1 von . . . . 1664 F.,
Und ein Erhöhungswinkel α von . . . . $4^0\ 5'$

nöthig.

Die gröfste Anfangsgeschwindigkeit aber, welche der 16ᶜ Granate bei der vollen Ladung von 1,5 Kilogr. mitgetheilt wird, beträgt (Aide-Mém. p. 429) nur 328 Meter = 1010 F., und das Ziel kann somit nur im absteigenden Aste von diesem Geschosse erreicht werden.

2) Bei dieser gröfsten Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses mufs die Bahn desselben, wenn sie durch das Ziel gehen soll, so beschaffen sein, dafs

Der Erhöhungswinkel α . . . . $6^0\ 48'$,
Die Scheitelgeschwindigkeit f . . . . 595,5 F.,
Der Abstand x_1 vom Ziel, in welchem der Scheitel zwischen
dem letztern und dem Geschütze liegt, ... 744,1 F.,
Die Höhe z_1 des Scheitels über dem Ziele . . . . . . 26,53 F.

beträgt, und dafs das Geschofs, bis zur Senkung um 7 F. unter das Ziel, noch um 86,5 F. über dasselbe hinausgeht und seine Bahn an dem dieser Entfernung entsprechenden Puncte gegen den Horizont eine Neigung von $4^0\ 56'$ hat.

10.

Die Folgerungen, welche aus den im Vorigen angestellten Berechnungen für den gewählten Beispielsfall sich ergeben, werden nun im Wesentlichen folgende sein:

Der *Enfilirschufs aus Kanonen* ist in dem Sinne eines Schusses, der mit voller Ladung in flachem Bogen geschieht, aus dem vorausgesetzten Standpuncte der Belagerungsgeschütze gegen die 3000 F. in horizontaler Richtung von ihm entfernten und 131 F. über dem Horizonte der Geschützmündungen liegenden Werke nicht anwendbar. Mit ganzer Ladung erreicht die

24pfünd. Kugel die als Ziel angenommene Brustwehr schon in dem aufsteigenden Bogen ihrer Bahn, und geht, bis sie vom Scheitel an wieder bis zur Höhe dieses Zieles herabsinkt, auf sehr beträchtliche Strecken weiter; auch fallen die Längen-Abweichungen der Geschosse wegen dieser Lage des Scheitels um das Vierfache und Fünffache gröfser aus, als auf wagerechtem Boden. Die Bahn der mit voller Ladung abgeschossenen 16pfünd. Kugel gestaltet sich zwar etwas minder ungünstig, indem deren Scheitel ungefähr in das Ziel, oder dem Geschütze noch etwas näher zu liegen kommt; doch mufs auch bei diesem, an sich weniger kräftigen Geschosse, wie bei der 24pfünd. Kugel, wenn gleich in geringerem Maafse, eine durch den sehr gestreckten Lauf und die stärkeren Längen-Abweichungen gesteigerte Unsicherheit der Wirkung Statt finden.

Mit Haubitzen ist aus derselben Stellung, wegen der Gröfse der Winkel, unter denen die Geschosse auch bei voller Ladung die zu beschiefsenden Wallgänge treffen würden, kein eigentlich bestreichender Schufs ausführbar, und nur aus der Granatkanone der Marine, mit voller Ladung abgeschossen, könnte die 22^c Granate auf die Wallgänge noch in gestreckterer Bahn wirken.

Unter diesen Umständen scheint bei der angegebenen erhöhten Lage der anzugreifenden Werke der *Ricochetschufs,* nämlich ein Schufs mit schwächerer Ladung in höherem Bogen, mehr zur Anwendung geeignet, als der Enfilirschufs, obgleich bei der 500 Klafter betragenden Entfernung des Ziels auch von jener Schufs-Art ein sehr wirksamer Erfolg nicht zu erwarten ist.

Zugleich erhellet aus den vorstehenden Erörterungen, dafs, wenn die Aufstellung der Geschütze in kleinerer Entfernung vom Ziele geschehen kann, das Ricochetfeuer zwar dadurch an Wirksamkeit gewinnen wird, für den Enfilirschufs dagegen durch gröfsere Nähe, bei übrigens verhältnifsmäfsig gleich grofser Erhöhung des Ziels, die Verhältnisse sich noch ungünstiger gestalten werden.

11.

Als vollkommen genau können zwar die hier vorgelegten Rechnungs-Ergebnisse nicht gelten: nicht sowohl wegen unzureichender Näherung der angewendeten Formeln, als vielmehr wegen der Unsicherheit des Werths des

Widerstands-Coëfficienten μ, welcher, streng genommen, mit der Geschwindigkeit des Geschosses selbst sich ändert, auch von der, einem bedeutenden Wechsel unterworfenen Dichtigkeit und Temperatur der Luft abhangt, und daher den, seiner Natur nach überhaupt noch nicht genau bekannten Widerstand der Luft nur unvollkommen vertritt. Dennoch dürfen im Allgemeinen und Wesentlichen die in Betreff der Verhältnisse der Schufsbahnen hier gezogenen Folgerungen immer als angenähert richtig betrachtet werden.

Stuttgart, im Juli 1850.

17.

Mémoire sur quelques formules relatives aux surfaces du second ordre.

(Par. Mr. *William Spottiswoode*, de l'Université d'Oxford.)

---

§. 1.

Réduction de l'équation générale.

Soit, comme à l'ordinaire,

$$(1.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{B}, & \mathrm{F} \\ \mathrm{F}, & \mathrm{C} \end{vmatrix} & \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \mathrm{C}, & \mathrm{G} \\ \mathrm{G}, & \mathrm{A} \end{vmatrix} & \boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, & \mathrm{H} \\ \mathrm{H}, & \mathrm{B} \end{vmatrix} \\ \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \mathrm{G}, & \mathrm{A} \\ \mathrm{F}, & \mathrm{H} \end{vmatrix} & \boldsymbol{G} = \begin{vmatrix} \mathrm{H}, & \mathrm{B} \\ \mathrm{G}, & \mathrm{F} \end{vmatrix} & \boldsymbol{H} = \begin{vmatrix} \mathrm{F}, & \mathrm{C} \\ \mathrm{H}, & \mathrm{G} \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$(2.)\quad \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{G} \\ \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{G}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{C} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G} \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F} \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C} \end{vmatrix}^2 = \nabla^2$$

et soient $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{H}_1$, ∇_1, les valeurs que prennent $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$, ∇, en écrivant $\mathrm{A}-\theta$, $\mathrm{B}-\theta$, $\mathrm{C}-\theta$, au lieu de A, B, C; et $\boldsymbol{A}'$, $\boldsymbol{B}'$, $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{G}'$, $\boldsymbol{H}'$, ∇', celles que prennent les mêmes quantités quand on change les directions des axes coordonnés; c'est à dire quand x, y, z, deviennent $lx+my+nz$, $l'x+m'y+n'z$, $l''x+m''y+n''z$. Cela posé, on aura

$$(3.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{A}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G}, l \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, l' \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, l'' \\ l, l', l'', . \end{vmatrix} & \boldsymbol{B}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G}, m \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, m' \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, m'' \\ m, m', m'', . \end{vmatrix} & \boldsymbol{C}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G}, n \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, n' \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, n'' \\ n, n', n'', . \end{vmatrix} \\ \boldsymbol{F}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G}, n \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, n' \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, n'' \\ m, m', m'', . \end{vmatrix} & \boldsymbol{G}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G}, l \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, l' \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, l'' \\ n, n', n'', . \end{vmatrix} & \boldsymbol{H}' = \begin{vmatrix} \mathrm{A}, \mathrm{H}, \mathrm{G}, m \\ \mathrm{H}, \mathrm{B}, \mathrm{F}, m' \\ \mathrm{G}, \mathrm{F}, \mathrm{C}, m'' \\ l, l', l'', . \end{vmatrix} \end{cases}$$

Soit, de plus, l'équation de la surface du second ordre

$$(4.)\quad \begin{vmatrix} A, & H, & G, & x \\ H, & B, & F, & y \\ G, & F, & C, & z \\ x, & y, & z, & (Lx+My+Nz+K):\nabla \end{vmatrix} = 0.$$

Alors, si ∇ ne s'évanouit pas, on obtiendra les coordonnées (α, β, γ) du centre de la surface par les expressions

$$(5.)\quad \begin{cases} \nabla^2\alpha = \begin{vmatrix} L, & H, & G \\ M, & B, & F \\ N, & F, & C \end{vmatrix} & \nabla^2\beta = \begin{vmatrix} L, & G, & A \\ M, & F, & H \\ N, & C, & G \end{vmatrix} & \nabla^2\gamma = \begin{vmatrix} L, & A, & H \\ M, & H, & B \\ N, & G, & F \end{vmatrix} \\ \quad = \nabla \begin{vmatrix} 1 & . & . & A \\ . & 1 & . & H \\ . & . & 1 & G \\ L, & M, & N. & \end{vmatrix} & \quad = \nabla \begin{vmatrix} 1 & . & . & H \\ . & 1 & . & B \\ . & . & 1 & F \\ L, & M, & N. & \end{vmatrix} & \quad = \nabla \begin{vmatrix} 1 & . & . & G \\ . & 1 & . & F \\ . & . & 1 & C \\ L, & M, & N. & \end{vmatrix} \end{cases}$$

et, si l'on prend le point (α, β, γ) pour la nouvelle origine des coordonnées, l'équation (4.) devient

$$(6.)\quad \begin{vmatrix} A, & H, & G, & x \\ H, & B, & F, & y \\ G, & F, & C, & z \\ x, & y, & z, & K:\nabla \end{vmatrix} = 0.$$

Or, en faisant,

$$(7.)\quad \Pi = \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l', & m', & n' \\ l'', & m'', & n'' \end{vmatrix}$$

on obtient généralement par la transformation des coordonnées:

$$(8.)\quad \begin{vmatrix} A', & H', & G' \\ H', & B', & F' \\ G', & F', & C' \end{vmatrix} = \Pi^2\nabla.$$

Par conséquent, dans le cas où

$$(9.)\quad \Pi = 1,$$

on peut toujours satisfaire à l'équation

$$(10.)\quad \begin{vmatrix} A'-\theta, & H', & G' \\ H', & B'-\theta, & F' \\ G', & F', & C'-\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\theta, & H, & G \\ H, & B-\theta, & F \\ G, & F, & C-\theta \end{vmatrix}$$

par une valeur convenable de θ; et si de plus on fait

$$(11.)\quad F' = 0,\quad G' = 0,\quad H' = 0$$

on a

$$(12.)\quad \begin{vmatrix} A'-\theta & . & . \\ . & B'-\theta & . \\ . & . & C'-\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-\theta, & H, & G \\ H, & B-\theta, & F \\ G, & F, & C-\theta \end{vmatrix} = \nabla_2$$

et les valeurs de A', B', C', seront les racines de l'équation

$$(13.)\quad \nabla_2 = 0.$$

Ces résultats peuvent aussi être trouvés de la manière suivante. On sait que les quantités l, l', l''; m, m', m''; n, n', n'' sont proportionnelles aux coordonnées d'une sphère dont le rayon est égal à l'unité, et par suite,

$$(14.)\quad \begin{vmatrix} 1 & . & . & l \\ . & 1 & . & l' \\ . & . & 1 & l'' \\ l, & l', & l'', & . \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & . & . & m \\ . & 1 & . & m' \\ . & . & 1 & m'' \\ m, & m', & m'', & . \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} 1 & . & . & n \\ . & 1 & . & n' \\ . & . & 1 & n'' \\ n, & n', & n'', & . \end{vmatrix} = 1$$

$$(15.)\quad \begin{vmatrix} 1 & . & . & n \\ . & 1 & . & n' \\ . & . & 1 & n'' \\ m, & m', & m'', & . \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & . & . & l \\ . & 1 & . & l' \\ . & . & 1 & l'' \\ n, & n', & n'', & . \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & . & . & m \\ . & 1 & . & m' \\ . & . & 1 & m'' \\ l, & l', & l'', & . \end{vmatrix} = 0$$

(ce qui n'est qu'un cas particulier des équations (3.)). De ces équations on tire sans difficulté la condition (9.); et par conséquent A', B', C' deviennent $A'-\theta$, $B'-\theta$, $C'-\theta$, si l'on écrit $A-\theta$, $B-\theta$, $C-\theta$, au lieu de A, B, C; parceque les valeurs de F', G', H', ne subissent aucun changement. Par là, on obtient sans peine l'équation (10.).

Revenant à l'équation (13.), on peut prendre cette fonction pour le déterminant formé par l'élimination de l, m, n, des équations

$$(16.)\quad Al+Hm+Gn : Al+Bm+Gn : Gl+Fm+Cn = l:m:n = [\theta]$$

(où $[\theta]$ indique que le rapport des termes dans le premier et le second membre de (16.) respectivement, est égal à θ). Par la résolution des équations (16.) on trouve aussi

$$(17.)\quad Al+Hm+Gn : Hl+Bm+Fn : Gl+Fm+Cn = l:m:n = [\nabla:\theta].$$

Au moyen de (14., 15. et 16.) on peut réproduire (3.); comme cela devait être. L'équation (9.) indique que les axes principaux forment un système orthogonal; et (14.) suffit pour déterminer leurs directions si l'on y substitué



successivement pour θ les trois racines de (13.). On voit, de plus, par l'équation (8.), ou par celle (10.), qu'une surface du second ordre et son cône reciproque, ont des axes principaux parallèles; et que dans la surface reciproque la quantité θ (c'est à dire le carré des reciproques des axes principaux) devient $\nabla:\theta$. Si ∇ s'évanouit, on a $\theta=0$, c'est à dire, une des racines de (13.) est égal à zéro; et reciproquement; ce qui est la condition pour la distance infinie du centre de la surface. Si deux racines de l'équation (13.) sont égales, on a pour l, m, n, et l', m', n', la même valeur de θ; alors, retranchant l'un des systèmes (16.) de l'autre, et l'un des (17.) de l'autre, on obtient sans peine

$$(18.)\qquad \boldsymbol{F}:\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H} = \mathrm{F}:\mathrm{G}:\mathrm{H}.$$

Voilà les conditions pour une surface de révolution.

On peut aussi trouvera sans difficulté les conditions du parallélisme des axes principaux de deux surfaces données du second ordre. En effet, si ξ, η, ζ sont les coordonnées d'un point quelconque d'un axe principal, on tire de l'équation identique

$$(19.)\qquad \begin{vmatrix} \xi, & \xi, & \xi \\ \eta, & \eta, & \eta \\ \zeta, & \zeta, & \zeta \end{vmatrix} = 0$$

l'expression suivante au moyen des équations (16. et 17.):

$$(20.)\qquad \begin{vmatrix} \mathrm{A}\xi+\mathrm{H}\eta+\mathrm{G}\zeta, & \boldsymbol{A}\xi+\boldsymbol{H}\eta+\boldsymbol{G}\zeta, & \xi \\ \mathrm{H}\xi+\mathrm{B}\eta+\mathrm{F}\zeta, & \boldsymbol{H}\xi+\boldsymbol{B}\eta+\boldsymbol{F}\zeta, & \eta \\ \mathrm{G}\xi+\mathrm{F}\eta+\mathrm{C}\zeta, & \boldsymbol{G}\xi+\boldsymbol{F}\eta+\boldsymbol{C}\zeta, & \zeta \end{vmatrix} = 0,$$

dont la forme développée est

$$\begin{aligned}(21.)\qquad &(\mathrm{G}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G}\mathrm{H})x^3+(\mathrm{H}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{H}\mathrm{F})y^3+(\mathrm{F}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\mathrm{G})z^3 \\
&+\{\mathrm{G}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{G}(\mathrm{C}-\mathrm{B})-(\mathrm{H}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{H}\mathrm{F})\}yz^2 \\
&+\{\mathrm{H}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})-\boldsymbol{H}(\mathrm{A}-\mathrm{C})-(\mathrm{F}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\mathrm{G})\}zx^2 \\
&+\{\mathrm{F}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{F}(\mathrm{B}-\mathrm{A})-(\mathrm{G}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G}\mathrm{H})\}xy^2 \\
&-\{\mathrm{H}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{B})-\boldsymbol{H}(\mathrm{C}-\mathrm{B})-(\mathrm{F}\boldsymbol{G}-\boldsymbol{F}\mathrm{G})\}y^2z \\
&-\{\mathrm{F}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})-\boldsymbol{F}(\mathrm{A}-\mathrm{C})-(\mathrm{G}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{G}\mathrm{H})\}z^2x \\
&-\{\mathrm{G}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})-\boldsymbol{G}(\mathrm{B}-\mathrm{A})-(\mathrm{H}\boldsymbol{F}-\boldsymbol{H}\mathrm{F})\}x^2y \\
&+\{\mathrm{C}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}\mathrm{B}+\mathrm{A}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A}\mathrm{C}+\mathrm{B}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\mathrm{A}\}xyz = 0,\end{aligned}$$

ou, si l'on veut:

$$(22.)\qquad \mathrm{P}x^3+\mathrm{Q}y^3+\mathrm{R}z^3+\cdots = 0;$$



et puis, en formant une pareille expression pour l'autre surface, on a

$$(23.)\quad px^3+qy^3+rz^3+\cdots = 0.$$

Les conditions cherchées seront alors trois quelconques du système

$$(24.)\quad P:Q:R\cdots = p:q:r\ldots$$

Ces conditons peuvent aussi être obtenues en eliminant l, m, n, successivement des équations (16. et 17.). Cela donne, en désignant les coefficients de l'équation de la seconde surface par a, b, c, f, g, h:

$$(25.)\quad \begin{aligned} l:m:n &= \mathit{H}\mathrm{G}-\mathrm{H}\mathit{G}:\mathit{G}\mathrm{A}_1-\mathrm{G}\mathit{A}_1:\mathit{A}_1\mathrm{H}-\mathrm{A}_1\mathit{H} \\ &= \mathit{B}_1\mathrm{F}-\mathrm{B}_1\mathit{F}:\mathit{F}\mathrm{H}-\mathrm{F}\mathit{H}:\mathit{H}\mathrm{B}_1-\mathrm{H}\mathit{B}_1 \\ &= \mathit{F}\mathrm{C}_1-\mathrm{F}\mathit{C}_1:\mathit{C}_1\mathrm{G}-\mathrm{C}_1\mathit{G}:\mathit{G}\mathrm{F}-\mathrm{G}\mathit{F} \\ &= \mathrm{h}g-h\mathrm{g}:\mathrm{g}a_1-g\mathrm{a}_1:\mathrm{a}_1h-a_1\mathrm{h} \\ &= \mathrm{b}_1f-b_1\mathrm{f}:\mathrm{f}h-f\mathrm{h}:\mathrm{h}b_1-h\mathrm{b}_1 \\ &= \mathrm{f}c_1-f\mathrm{c}_1:\mathrm{c}_1g-c_1\mathrm{g}:\mathrm{g}f-g\mathrm{f}. \end{aligned}$$

L'identité des deux systèmes de condition pourra être demontrée sans difficulté.

§. 2.

Des plans cycliques et des lignes focales des cônes du second ordre.

Dans le cas où la surface se réduit à un cône, la condition sous laquelle l'expression

$$(1.)\quad \mathrm{A}x^2+\cdots-\theta(x^2+y^2+z^2)$$

est égal au produit de deux facteurs linéaires, sera

$$(2.)\quad \nabla_1 = 0.$$

On obtient donc, non seulement l'équation (6. du §. 1.) avec la condition

$$(3.)\quad K = 0,$$

mais aussi

$$(4.)\quad \theta(x^2+y^2+z^2)-(\lambda x+\mu y+\nu z)(\lambda' x+\mu' y+\nu' z) = 0,$$

où les valeurs de $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$, se trouveront à l'aide des équations

$$(5.)\quad \begin{cases} \mathrm{A}-\theta = \lambda\lambda', \quad \mathrm{B}-\theta = \mu\mu', \quad \mathrm{C}-\theta = \nu\nu' \\ \qquad \cdot+\nu'\mu+\mu'\nu = 2\mathrm{F} \\ \qquad \nu'\lambda+\cdot+\lambda'\nu = 2\mathrm{G} \\ \qquad \mu'\lambda+\lambda'\mu+\cdot = 2\mathrm{H}, \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, par celle-ci:

$$(6.)\quad \begin{cases} \mathrm{C}_1\mu^2-2\mathrm{F}\mu\nu+\mathrm{B}_1\nu^2 = 0 \\ \mathrm{A}_1\nu^2-2\mathrm{G}\nu\lambda+\mathrm{C}_1\lambda^2 = 0 \\ \mathrm{B}_1\lambda^2-2\mathrm{H}\lambda\mu+\mathrm{A}_1\mu^2 = 0. \end{cases}$$

Substituant pour A_1, B_1, C_1, . . . leurs valeurs exprimées en termes de $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, . . . ces équations peuvent être présentées sous la forme

$$(7.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{B}_1\mu^2+2\boldsymbol{F}_1\mu\nu+\boldsymbol{C}_1\nu^2)-(\boldsymbol{H}_1\mu+\boldsymbol{G}_1\nu)^2 = 0 \\ \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{C}_1\nu^2+2\boldsymbol{G}_1\nu\lambda+\boldsymbol{A}_1\lambda^2)-(\boldsymbol{F}_1\nu+\boldsymbol{H}_1\lambda)^2 = 0 \\ \boldsymbol{C}_1(\boldsymbol{A}_1\lambda^2+2\boldsymbol{H}_1\lambda\mu+\boldsymbol{B}_1\mu^2)-(\boldsymbol{G}_1\lambda+\boldsymbol{F}_1\mu)^2 = 0, \end{cases}$$

et en substituant pour $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, . . ., dans les premiers termes de ces équations, leurs valeurs exprimées en termes de A_1, B_1, C_1, . . . on trouve, en vertu des équations (6.):

$$(8.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{A}_1(\mathrm{G}\mu-\mathrm{H}\nu)^2+(\boldsymbol{H}_1\mu+\boldsymbol{G}_1\nu)^2 = 0 \\ \boldsymbol{B}_1(\mathrm{H}\nu-\mathrm{F}\lambda)^2+(\boldsymbol{F}_1\nu+\boldsymbol{H}_1\lambda)^2 = 0 \\ \boldsymbol{C}_1(\mathrm{F}\lambda-\mathrm{G}\mu)^2+(\boldsymbol{G}_1\lambda+\boldsymbol{F}_1\mu)^2 = 0. \end{cases}$$

Mais, en vertu de (2.) on a

$$(9.)\quad \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{F}_1^2,\quad \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{G}_1^2,\quad \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{H}_1^2$$

et par suite

$$(10.)\quad \begin{cases} (\pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B}_1+\mathrm{G})\mu+(\pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{C}_1-\mathrm{H})\nu = 0 \\ (\pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{C}_1+\mathrm{H})\nu+(\pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{A}_1-\mathrm{F})\lambda = 0 \\ (\pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{A}_1+\mathrm{F})\lambda+(\pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B}_1-\mathrm{G})\mu = 0. \end{cases}$$

De là on tire

$$(11.)\quad \begin{cases} \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_1\lambda\pm\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}_1\mu\pm\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_1\nu = 0 \\ \mathrm{F}\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_1\lambda\pm\mathrm{G}\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}_1\mu\pm\mathrm{H}\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_1\nu = 0, \end{cases}$$

ou, si l'on veut,

$$(12.)\quad \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_1\lambda}{\mathrm{G}\pm\mathrm{H}} = \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{B}_1\mu}{\mathrm{H}\pm\mathrm{F}} = \frac{\boldsymbol{S}\boldsymbol{C}_1\nu}{\mathrm{F}+\mathrm{C}}.$$

Il y a à remarquer qu'en éliminant à la fois λ, μ, ν des équations (10.), on trouve pour le determinant:

$$(13.)\quad \begin{vmatrix} . & \pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B}_1+\mathrm{G}, & \pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{C}_1-\mathrm{H} \\ \pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{A}_1-\mathrm{F}, & . & \pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{C}_1+\mathrm{H} \\ \pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{A}_1+\mathrm{F}, & \pm\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B}_1-\mathrm{G}, & . \end{vmatrix} = 0$$

c'est à dire

$$(14.)\quad \frac{\mathrm{GH}}{\boldsymbol{F}_1}+\frac{\mathrm{HF}}{\boldsymbol{G}_1}+\frac{\mathrm{FG}}{\boldsymbol{H}_1}-1 = 0;$$

ce qui n'est qu'une autre forme de (2.).

De plus, de (16. §. 1), et de (5.), on tire

$$(15.)\quad \begin{cases} \lambda(l\lambda'+m\mu'+n\nu')+\lambda'(l\lambda+m\mu+n\nu) = 0 \\ \mu(l\lambda'+m\mu'+n\nu')+\mu'(l\lambda+m\mu+n\nu) = 0 \\ \nu(l\lambda'+m\mu'+n\nu')+\nu'(l\lambda+m\mu+n\nu) = 0 \end{cases}$$

et par conséquent

$$(16.)\quad l\lambda+m\mu+n\nu = 0,\quad l\lambda'+m\mu'+n\nu' = 0,$$

c'est à dire: les normales aux plans cycliques sont parallèles aux plans principaux du cône.

Si l'on fait

$$(17.)\quad \begin{cases} \lambda x+\mu y+\nu z = u, & \lambda' x+\mu' y+\nu' z = u' \\ \lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta = v, & \lambda'\xi+\mu'\eta+\nu'\zeta = v' \\ 2\theta-\lambda\lambda'-\mu\mu'-\nu\nu' = \Lambda, & \end{cases}$$

on peut à l'aide des équations

$$(18.)\quad 2\theta x-u\lambda'-u'\lambda : 2\theta y-u\mu'-u'\mu : 2\theta z-u\nu'-u'\nu = \xi:\eta:\zeta$$

passer au cône reciproque, dont les coordonnées sont ξ,η,ζ. On trouvera

$$(19.)\quad (\Lambda^2-1)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+v^2+2\Lambda vv'+v'^2 = 0,$$

et par conséquent

$$(20.)\quad \begin{cases} (\xi^2+\eta^2+\zeta^2-v^2)(\Lambda^2-1) = (v-v'\Lambda)^2 \\ (\xi^2+\eta^2+\zeta^2-v'^2)(\Lambda^2-1) = (v'-v\Lambda)^2. \end{cases}$$

Si alors on coupe le cône par un quelconque des plans

$$(21.)\quad v = p,\quad v' = p'$$

on aura

$$(22.)\quad \begin{cases} \xi^2+\eta^2+\zeta^2-p^2 = \pm(p-v'\Lambda):(\Lambda^2-1)^{\frac{1}{2}} \\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2-p'^2 = \pm(p'-v\Lambda):(\Lambda^2-1)^{\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

c'est à dire: le rayon vecteur de la courbe d'intersection, à partir du point où la normale au plan v ou v' coupe ce plan, est une fonction rationnelle des coordonnées; la ligne (l,m,n) ou (l',m',n') est par conséquent le lieu géométrique des foyers des courbes d'intersection du cône avec des plans parallèles aux plans (20.). Les lignes focales d'un cône sont les normales aux plans cycliques du cône réciproque. Le cosinus de l'angle que forment les plans cycliques (ou les lignes focales du cône réciproque) est égal à

$$(23.)\quad A+B+C-3\theta.$$

§. 3.

Démonstrations de deux théorèmes géométriques.

Les formules (16. et 17. §. 1.) offrent une démonstration élégante du théorème suivant:

„Les axes principaux d'un cône circonscrit à un ellipsoïde, dont le sommet „est placée au point P, touchent les courbes d'intersection des trois sur-„faces confocales avec la surface donnée qui passe par le point P."

L'équation du cône circonscrit à l'ellipsoïde, savoir

$$(1.)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

est

$$(2.)\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}\right)^2=0,$$

où α, β, γ sont les coordonnées du centre de l'ellipsoïde, à partir du sommet du cône. Ici on a

$$(3.)\quad \begin{cases} A=\beta^2c^2+\gamma^2b^2-b^2c^2 \\ B=\gamma^2a^2+\alpha^2c^2-c^2a^2 \\ C=\alpha^2b^2+\beta^2a^2-a^2b^2 \\ F=-a^2\beta\gamma,\quad G=-b^2\gamma\alpha,\quad H=-c^2\alpha\beta, \end{cases}$$

et par conséquent, en supprimant le facteur $b^2c^2\alpha^2+c^2a^2\beta^2+a^2b^2\gamma^2-a^2b^2c^2$:

$$(4.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}=\alpha^2-a^2,\quad \mathfrak{B}=\beta^2-b^2,\quad \mathfrak{C}=\gamma^2-c^2, \\ \mathfrak{F}=\beta\gamma,\quad \mathfrak{G}=\gamma\alpha,\quad \mathfrak{H}=\alpha\beta. \end{cases}$$

Or chaque transformation orthogonale, qui réduit

$$(5.)\quad (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2=0$$

à la forme

$$Lx^2+My^2+Nz^2=0,$$

réduit aussi

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2-(a^2-\theta)x^2-(b^2-\theta)y^2-(c^2-\theta)z^2=0$$

à

$$(L-\theta)x^2+(M-\theta)y^2+(N-\theta)z^2=0.$$

Donc on peut substituer une surface quelconque confocale à celle de l'ellipsoïde. Le théorème dont il s'agit est une conséquence immédiate de cette propriété.

Par les formules (6. §. 2.) peut être démontré le théorème suivant de M. *Jacobi:*

„Si l'on circonscrit un cône à une surface du second ordre, les lignes „focales du cône sont des lignes génératrices d'une surface du second „ordre, confocale avec la surface donnée, qui passe par le sommet du cône."

En vertu des formules du théorème précédent, les lignes focales du cône, dont il s'agit, sont déterminées par les équations,

$$(1.)\quad \begin{cases} (\gamma m-\beta n)^2-(c^2-\theta)m^2-(b^2-\theta)n^2=0 \\ (\alpha n-\gamma l)^2-(a^2-\theta)n^2-(c^2-\theta)l^2=0 \\ (\beta l-\alpha m)^2-(b^2-\theta)l^2-(a^2-\theta)m^2=0, \end{cases}$$

d'où, en divisant par le produit $(a^2-\theta)(b^2-\theta)(c^2-\theta)$, et prenant la somme de ces expressions, on tire

$$(2.)\quad \left(\frac{\alpha^2}{a^2-\theta}+\frac{\beta^2}{b^2-\theta}+\frac{\gamma^2}{c^2-\theta}\right)\left(\frac{l^2}{a^2-\theta}+\frac{m^2}{b^2-\theta}+\frac{n^2}{c^2-\theta}\right) \\ -\left(\frac{l\alpha}{a^2-\theta}+\frac{m\beta}{b^2-\theta}+\frac{n\gamma}{c^2-\theta}\right)^2 = 0,$$

ce qui est l'équation d'un cône circonscrit à la surface

$$(3.)\quad \frac{x^2}{a^2-\theta}+\frac{y^2}{b^2-\theta}+\frac{z^2}{c^2-\theta} = 2,$$

c'est à dire à une surface confocale avec la surface donnée, et qui passe par le sommet du premier cône. De plus, comme l'origine est située sur la droite (l, m, n), l'équation du plan tangent, qui passe par l'origine, est

$$(4.)\quad \frac{l\alpha}{a^2-\theta}+\frac{m\beta}{b^2-\theta}+\frac{n\gamma}{c^2-\theta} = 0,$$

et par conséquent, en vertu de (3.), la droite (l, m, n) satisfera à la fois à l'équation de la surface confocale et à celle de son plan tangent; c'est à dire, elle est une ligne génératrice de la surface confocale; ce qu'il fallait démontrer.

§. 4.

Réduction de l'équation générale aux différences partielles du second ordre aux coefficients constans.

La méthode du (§.1.) peut être appliquée à la réduction de l'équation différentielle du second ordre aux coëfficiens constants. En effet, en mettant l'équation sous la forme symbolique,

$$(1.)\quad \begin{vmatrix} A, & H, & G, & D_x \\ H, & B, & F, & D_y \\ G, & F, & C, & D_z \\ D_x, & D_y, & D_z, & (LD_x+MD_y+ND_z+K):\nabla \end{vmatrix} u = 0,$$

et en posant

$$(2.)\quad l^2+m^2+n^2 = \varpi^2,\quad l'^2+m'^2+n'^2 = \varpi'^2,\quad l''^2+m''^2+n''^2 = \varpi''^2,$$

on obtient, par un changement lineaire des variables, une équation de la forme

$$(3.)\quad \begin{vmatrix} 1 & . & . & A'\varpi^2 D_\xi + 2(Ll+Ml'+Nl'') \\ . & 1 & . & B'\varpi'^2 D_\eta + 2(Lm+Mm'+Nm'') \\ . & . & 1 & C'\varpi''^2 D_\zeta + 2(Ln+Mn'+Nn'') \\ D_\xi, & D_\eta, & D_\zeta, & K \end{vmatrix} u = 0.$$

Puis, en posant

$$(4.)\quad \begin{cases} u = v\varepsilon^{\alpha x+\beta y+\gamma z} \\ A'\varpi^2\alpha + Ll + Ml' + Nl'' = 0 \\ B'\varpi'^2\beta + Lm + Mm' + Nm'' = 0 \\ C'\varpi''^2\gamma + Ln + Mn' + Nn'' = 0 \\ \varpi^2 = \varpi'^2 = \varpi''^2 = K:(A'\alpha^2 + B'\beta^2 + C'\gamma^2), \\ \xi = SA'\mathrm{x}, \quad \eta = SB'\mathrm{y}, \quad \zeta = SC'\mathrm{z}, \end{cases}$$

on trouve

$$(5.)\quad \begin{vmatrix} 1 & . & . & D_x \\ . & 1 & . & D_y \\ . & . & 1 & D_z \\ D_x, & D_y, & D_z, & . \end{vmatrix} v = 0,$$

ou, si l'on veut,

$$(6.)\quad \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2} = 0.$$

Cette méthode est sujette aux mêmes cas exceptionaux qui se présentent dans le problème géométrique. Les formules (24. §. 1) seront utiles quand il s'agit à réduire un système d'équations différentielles simultanées à la forme la plus simple. Les conditions auxquelles on arriverait dans la théorie de la lumière, ou de la propagation des vibrations dans une milieu crystallizée ou non-crystallizée, analogues à celles dans le (§. 1), ne seraient pas sans interêt.

Londres, Février 1850.

18.

Über einen von *Möbius* gefundenen Beweis des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte, nebst einer Nachschrift.

(Von Herrn Professor *A. F. Möbius* zu Leipzig.)

(Aus den „Berichten über die Verhandlungen der königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1850. I.")

Abgesehen von den als ungenügend anerkannten Beweisen dieses Satzes, welche man auf die Zusammensetzung der Bewegungen zu gründen bemüht gewesen ist, lassen sich die übrigen Beweise in zwei Classen theilen. Bringt man nämlich den Satz unter die Form der Aufgabe: zu zwei auf einen frei beweglichen Punct wirkenden Kräften eine dritte zu finden, welche, an demselben Puncte (wir wollen ihn D nennen) angebracht, dieselbe Wirkung wie erstere zwei in Vereinigung erzeugt, so umfafst die eine Classe von Beweisen für die bekannte Lösung dieser Aufgabe alle diejenigen, bei denen alle noch in Betracht gezogenen Hülfskräfte denselben Punct D zum Angriffspuncte haben. Bei der andern Classe von Beweisen läfst man Hülfskräfte auch noch auf andere mit dem Puncte D und unter sich in unabänderlichen Entfernungen sich befindende Puncte wirken.

Wenn nun auch die Zuhülfenahme noch anderer Angriffspuncte von Kräften der Schärfe des Beweises keinen Eintrag thun kann, da das hierbei in Betracht kommende Princip von der Verlegung der Kräfte eben so evident wie jeder der übrigen Grundsätze der Statik ist, und auch im weitern Fortgang dieser Wissenschaft nicht entbehrt werden kann: so pflegt man doch Beweise der ersten Classe denen der letztern vorzuziehen, indem jene, von D verschiedenen Angriffspuncte von der Natur der Sache nicht geboten zu sein scheinen. Von der andern Seite ist nicht zu verkennen, dafs die Beweise zweiter Classe durchschnittlich eine ungleich elementarere Haltung haben, als die Beweise von der ersten, bei denen man nicht selten ziemlich tief gehende

Betrachtungen aus der höhern Analysis zur Anwendung bringt. Man denke nur an die von französischen Mathematikern, namentlich von *d'Alembert*, *Laplace*, *Poisson* und *Pontécoulant* *) gegebenen, an sich trefflichen Beweise des Satzes. Ich mufs aber offen bekennen, dafs für einen so elementaren Gegenstand, als um welchen es sich hier handelt, aus der höhern Analysis entlehnte Kunstgriffe mir noch weit fremdartiger und damit unstatthafter, als jene zu Hülfe genommenen Angriffspuncte zu sein scheinen.

Unter so bewandten Umständen hielt ich es für nicht ganz überflüssig, einen von mir gefundenen Beweis für das Parallelogramm der Kräfte zu veröffentlichen, der weder fremdartige Hülfspuncte, noch der Elementarmathematik fremdartige Methoden in Anspruch nimmt, sondern unmittelbar auf die Natur des Parallelogramms gegründet ist und sich von den meisten übrigen Beweisen des Satzes auch noch dadurch unterscheidet, dafs sich bei ihm die Gröfse und die Richtung der Diagonalkraft nicht hinter einander, sondern gleichzeitig ergeben. Ich habe diesen Beweis bereits in meinem vor 13 Jahren herausgegebenen Lehrbuche der Statik (1. Theil, S. 132 u. folg.) mitgetheilt. Indessen läfst er sich, wie ich später bemerkt habe, um ein Beträchtliches einfacher und übersichtlicher gestalten, als es dort geschehen. Möge ihm daher hiesigen Orts eine nochmalige Veröffentlichung, und zwar in der einfachsten Form, deren er fähig sein dürfte, gestattet sein.

Vorläufig erinnere ich nur noch, dafs man sich alle im Folgenden in Betracht kommenden Linien und Puncte in einer und derselben Ebene enthalten vorzustellen hat.

---

1) Es seien DB und AC (Fig. 1) zwei gleichgerichtete und gleich lange gerade Linien, und A', B', C' die rechtwinkligen Projectionen der Puncte A, B, C auf eine durch D beliebig gezogene Gerade x. Alsdann haben auch die Abschnitte DB' und AC' dieser Geraden x, als die rechtwinkligen Projectionen von DB und AC auf x, einerlei (nicht entgegengesetzte) Richtungen und gleiche Länge, und es ist folglich

$$DC' = DA' + A'C' = DA' + DB'. \quad \text{D. h.:}$$

*) In dessen *Théorie analytique du système du monde*, Tome I. S. 4 u. folg.

Werden zwei von derselben Ecke D ausgehende Seiten DA, DB und die von derselben Ecke ausgehende Diagonale DC eines Parallelogramms auf eine beliebig durch D gelegte Gerade rechtwinklig projicirt, so ist immer die Summe der Projectionen der beiden Seiten der Projection der Diagonale gleich.

Diese Relation gilt übrigens stets, was auch die durch D gezogene Gerade x gegen das Parallelogramm für eine Lage haben mag, dafern nur je zwei Abschnitte von x mit einerlei oder verschiedenen Zeichen genommen werden, je nachdem ihre durch die Aufeinanderfolge der Buchstaben ausgedrückten Richtungen einerlei oder einander entgegengesetzt sind. Denn alsdann ist immer, auch dem Zeichen nach: $DB' = A'C'$, und $DC' = DA' + A'C'$; mag A' zwischen D und C' liegen, wie in der Figur, oder nicht.

2) Nehmen wir nun noch an, dafs jeder der beiden Winkel, welche die Diagonale mit den beiden Seiten macht, zu einem rechten Winkel in einem rationalen Verhältnisse stehe, und setzen wir hiernach die zwei Verhältnisse

$$ADC : 180^\circ = a : m,$$
$$CDB : 180^\circ = b : m,$$

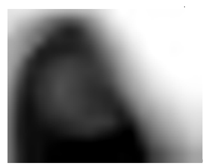
wo a, b und m ganze positive Zahlen bedeuten. Man ziehe durch D m gerade Linien, welche gleiche Winkel mit einander machen, so dafs um D herum $2m$ Winkel, jeder $= \frac{180^\circ}{m}$, entstehen. Dabei falle DC in eine der m Linien. Alsdann werden uch DA und DB in dergleichen fallen, nämlich DA in die $a$te auf der einen und DB in die $b$te auf der andern Seite von DC liegende Linie. Man projicire endlich jeden der drei Abschnitte DA, DB, DC rechtwinklig auf jede der m Linien und betrachte alle diese Projectionen ihrer Richtung und Gröfse nach als auf den Punct D wirkende Kräfte, so dafs in jeder der m Linien drei Kräfte wirken, z. B. in der obigen x (wenn anders x eine dieser Linien ist) die drei durch DA', DB', DC' vorgestellten Kräfte. Da nun nach vorigem Satze $DA' + DB' = DC'$ ist, so werden immer von den drei in einer und derselben der m Linien enthaltenen Kräften diejenigen zwei, welche durch die Projectionen von DA und DB ausgedrückt werden, gleiche Wirkung mit der durch die Projection von DC ausgedrückten Kraft haben. Es werden daher auch, wenn wir das System aller der Kräfte, welche durch die Projectionen von DA auf die m Linien vorgestellt werden,

und wozu DA selbst mit gehört, durch $S(DA')$ bezeichnen und Ähnliches unter $S(DB')$ und $S(DC')$ verstehen: es werden dann auch die Systeme $S(DA')$ und $S(DB')$ in Vereinigung gleichwirkend mit dem Systeme $S(DC')$ sein; oder kürzer, wenn wir die gleichfalls in D anzubringenden Resultanten dieser drei Systeme beziehungsweise α, β, γ nennen: es wird γ die Resultante von α und β sein.

3) Wie bekannt, läfst sich aus den ersten Principien der Statik leicht darthun, dafs, wenn von zwei oder auch mehrern auf einen Punct wirkenden Kräften eine jede, mit Beibehaltung ihrer Richtung, ihre Gröfse in gleichem Verhältnisse ändert, in demselben Verhältnisse auch die Resultante der Kräfte ihre Gröfse ändert, während ihre Richtung unverändert bleibt.

Nun sind die drei Systeme $S(DA')$, $S(DB')$, $S(DC')$, als geometrische Figuren betrachtet, einander ähnlich, indem jedes derselben dadurch entsteht, dafs man auf eine der m Linien, welche sich in D unter gleichen Winkeln schneiden, von D aus einen Abschnitt von gewisser Länge trägt und hierauf denselben auf die $m-1$ übrigen Linien rechtwinklig projicirt. Aus dem Systeme der Kräfte $S(DA')$ wird folglich das System $S(DB')$ hervorgehen, wenn man, die Richtungen der Kräfte des erstern Anfangs unverändert lassend, die Gröfse einer jeden in dem Verhältnisse $DA:DB$ ändert und sodann das ganze System um D um einen Winkel $(=ADB)$ nach links (in der Figur) dreht. Setzen wir daher noch, dafs die Resultante α des Systems $S(DA')$ ihrer Gröfse und Richtung nach gegeben ist, so werden wir damit, nach dem angezogenen Satze, die Gröfse und die Richtung der Resultante β des Systems $S(DB')$ erhalten, wenn wir die Gröfse von α in dem Verhältnisse $DA:DB$ sich ändern und die Richtung von α um D um einen Winkel $(=ADB)$ nach links sich drehen lassen. Auf gleiche Art wird die Gröfse von γ gleich $\frac{DC}{DA}\cdot\alpha$ sein, und die Richtung von γ wird dadurch gefunden werden, dafs man den Winkel von γ mit α gleich dem Winkel von DC mit DA nach der Linken von α hin macht.

Überhaupt also werden sich die Gröfsen der Kräfte α, β, γ wie die Längen DA, DB, DC verhalten, und die gegenseitige Lage der Richtungen der drei ersten wird dieselbe wie die der drei letztern sein, so dafs, wenn die Kräfte α, β, γ, ihren Gröfsen und Richtungen nach, durch die Linien $DA_{,}$,



$DB_{\prime}$, $DC_{\prime}$ vorgestellt werden, die Figur $DA_{\prime}C_{\prime}B_{\prime}$ der Figur $DACB$ ähnlich und somit ebenfalls ein Parallelogramm ist, in welchem die Winkel der Diagonale $DC_{\prime}$ mit den Seiten zu einem Rechten in rationalen Verhältnissen stehen.

Nun war γ die Resultante von α und β, und wir schliefsen daher: Soll zu zwei auf einen Punct D wirkenden und ihrer Gröfse und Richtung nach durch die Linien $DA_{\prime}$ und $DB_{\prime}$ vorgestellten Kräften die Resultante gefunden werden, so vollende man den Winkel $A_{\prime}DB_{\prime}$ zu einem Parallelogramm, und es wird die Diagonale $DC_{\prime}$ desselben die gesuchte Resultante ihrer Gröfse und Richtung nach ausdrücken, dafern die Verhältnisse der Winkel $A_{\prime}DC_{\prime}$ und $C_{\prime}DB_{\prime}$ zu einem rechten Winkel *rational* sind. Dieselbe Construction mufs aber auch bei irrationalen Winkelverhältnissen gelten, da durch genugsam grofse Annahme der Zahl m rationale Verhältnisse gefunden werden können, die den irrationalen so nahe, als man will, kommen. Der in diesem Falle durch die *Deductio ad absurdum* zu führende schärfere Beweis dürfte hier nicht am Orte sein.

Zusätze. *a.* Die Richtungen von α, β, γ bilden nicht blofs dieselben Winkel mit einander, wie die Richtungen von DA, DB, DC, sondern sind mit den letztern vollkommen identisch. Denn da die Projectionen von DA auf zwei der m Linien, welche, auf verschiedenen Seiten von DA liegend, mit DA gleiche Winkel machen, offenbar einander gleich sind, so hat die Resultante dieser zwei Projectionen DA selbst zur Richtung; und da das System $S(DA')$ aus DA und aus solchen Paaren von Projectionen zusammengesetzt ist, so ist die Richtung der Resultante α dieses Systems gleichfalls DA. Eben so zeigt sich, dafs DB und DC die Richtungen von β und γ sind.

b. Da der Winkel $DA'A$ ein rechter ist, so ist A' ein Punct des um DA, als Durchmesser, beschriebenen Kreises. Auf gleiche Art ist die Projection von B (C) auf eine willkürlich durch D gelegte Gerade der Durchschnitt dieser Geraden mit einem Kreise, welcher DB (DC) zum Durchmesser hat. Beschreibt man daher um die Seiten DA, DB und die Diagonale DC eines Parallelogramms $DACB$, als um drei Durchmesser, Kreise, so ist immer,

wenn eine durch D gelegte Gerade diese drei Kreise, resp. noch in A', B', C' schneidet, DC' der Summe von DA' und DB' gleich. Und umgekehrt: Zieht man durch einen Durchschnittspunct D zweier sich schneidenden Kreise beliebig eine Gerade, welche die zwei Kreise noch in A' und B' trifft, und bestimmt in dieser Geraden einen vierten Punct C' so, dafs $DC' = DA' + DB'$, so ist der geometrische Ort von C' ein dritter durch D gehender Kreis von solcher Gröfse und Lage, dafs sein Durchmesser DC die Diagonale eines Parallelogramms ist, welches die Durchmesser DA und DB der beiden erstern Kreise zu anliegenden Seiten hat.

Da hiernach von je drei, von D ausgehenden und in derselben Geraden liegenden Sehnen der drei Kreise die Sehne des dritten stets aus den Sehnen der zwei erstern zusammengesetzt ist, so kann man den dritten Kreis zusammengesetzt aus den zwei erstern nennen. Und eben so, wie zwei, lassen sich auch drei und mehrere durch einen und denselben Punct D gehende Kreise zu einem neuen zusammensetzen. Dabei ist der von D ausgehende Durchmesser des neuen Kreises, statisch ausgedrückt, die Resultante der von D ausgehenden Durchmesser der gegebenen Kreise.

Es werde nur noch bemerkt, dafs das von der Zusammensetzung von Kreisen Gesagte vollkommen auch auf die Zusammensetzung zweier oder mehrerer durch einen und denselben Punct gehenden Kugelflächen Anwendung findet. Vergl. mein Lehrburch der Statik, 1. Theil, S. 131.

Nachschrift.

Der Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist im Vorigen, und so auch in meinem Lehrbuche der Statik, nur für den Fall streng bewiesen worden, wenn die Winkel, welche die Resultante zweier Kräfte mit den letztern macht, *rational,* d. i. mit einem Rechten commensurabel, sind. Sind sie irrational, so kann der obige Beweis etwa folgendergestalt ergänzt werden.

Es sei wiederum $ADBC$ (Fig. 2) das Parallelogramm der Kräfte, und es werde fürs Erste angenommen, dafs zwar jeder der Winkel ADC und CDB einzeln *irrational,* aber ihre Summe ADB *rational* sei. Wäre dann nicht DC die Richtung der Resultante von DA und DB, sondern fiele diese Richtung, wie DE, in den Winkel ADC, schnitte sie also die BC in einem in



der Verlängerung dieser Linie über C hinaus liegenden Puncte E, so bestimme man, was immer geschehen kann, in dieser Linie zwischen C und E einen Punct F so, dafs der Winkel ADF, und mithin auch FDB, rational ist. Eine durch F mit BD gezogene Parallele schneide DA in G, so ist nach dem Erwiesenen DF die Resultante von DB und DG, d. i. von DB, DA und AG, d. h. von einer nach DE gerichteten Kraft und einer nach DA gerichteten Kraft $= AG$. Dieses ist aber nicht möglich, weil die Richtung der Resultante zweier Kräfte stets *innerhalb* des von diesen gebildeten Winkels liegt. Auf ähnliche Weise zeigt sich, dafs die Richtung der Resultante von DA und DB auch nicht innerhalb des Winkels CDB fallen kann. Mithin ist DC selbst ihre Richtung.

Setzen wir nun zweitens, dafs die Summe ADB der Winkel ADC und CDB irrational sei. Dafs dann, wenn die Kräfte DA und DB einander gleich sind und folglich das Parallelogramm ein Rhombus ist, die Diagonale DC desselben die Richtung der Resultante hat, bedarf hier keines Beweises. Sind aber die Kräfte ungleich, etwa DB (Fig. 3) die gröfsere, und sollte die in den Winkel ADC fallende DE die Richtung der Resultante sein, so beschreibe man um A, als Mittelpunct, mit AC, als Halbmesser, einen Kreis und bestimme, was immer möglich ist, in dem innerhalb des Winkels CDE fallenden Bogen dieses Kreises einen Punct G so, dafs der Winkel DAG, mithin auch, wenn man ihn zu einem Parallelogramm $DAGF$ ergänzt, der Winkel ADF rational ist. Von den Kräften DA und DF ist alsdann, nach dem Vorigen, DG die Richtung der Resultante. Mittels des schon gedachten Satzes, dafs die Resultante zweier Kräfte innerhalb des Winkels der Kräfte liegt, läfst sich aber leicht zeigen, dafs, weil von den zwei, der Construction zufolge einander gleichen Kräften DB und DF die erstere mit der kleineren Kraft DA einen gröfseren Winkel als die letztere macht, mit derselben DA die Resultante von DB und DA einen gröfseren Winkel, und die Resultante DG von DF und DA einen kleineren Winkel bilden mufs. Mithin kann DE nicht die Richtung der Resultante von DA und DB sein. Und da, wie sich durch ähnliche Schlüsse darthun läfst, diese Richtung auch nicht innerhalb des Winkels CDB liegen kann, so mufs sie DC selbst sein.

Nachdem somit bewiesen worden, dafs die Resultante stets die Richtung der Diagonale hat, ergiebt sich nun ohne Weiteres und auf das Leichteste, dafs dieselbe Diagonale auch die Gröfse der Resultante in jedem

Falle darstellt. In der That werde die Resultante ihrer Richtung und Gröfse nach durch *DC'* ausgedrückt, wo *C'* einen von *D* nach *C* hin liegenden Punct bezeichnet. Man nehme in der Linie *BC* willkürlich einen Punct *H* (Fig. 4), lege durch ihn mit *BD* eine Parallele, welche *DA* in *J* schneide, und mache in *DA* den Abschnitt *DK* gleich und gleichgerichtet mit *AJ*: so ist nach dem Erwiesenen *DH* die Richtung der Resultante von *DJ* und *DB*, d. i. von *DK*, *DA* und *DB*, d. h. von *DK* und *DC'*. Dieses ist aber nicht anders möglich, als wenn *C'* mit *C* zusammenfällt. Denn wäre *C'* von *C* verschieden, und schnitte eine durch *C'* mit *DA* gelegte Parallele die *KH* in *H'*, so würde, weil in Folge der Construction *KH* mit *DC* parallel und daher *DKH'C'* ein Parallelogramm ist, nicht *DH*, sondern *DH'* die Richtung der Resultante von *DK* und *DC'* sein. Mithin wird durch *DC* auch die Gröfse der Resultante von *DA* und *DB* ausgedrückt.

Leipzig, im October 1850.

19.
Der allgemeine Satz über die Erzeugung aller algebraischer Curven durch Bewegung gerader Linien.

(Von Herrn Professor Dr. *H. Grafsmann*, Oberlehrer der Mathematik zu Stettin.)

Vor längerer Zeit habe ich in dem ersten Theile meiner Ausdehnungslehre (§. 145—148.) einen allgemeinen Satz mitgetheilt über die Erzeugung der Curven höherer Ordnungen, so wie der algebraischen Oberflächen, durch Bewegung gerader Linien oder Ebenen; und in diesem Journale (Band 31. und 36.) habe ich besondere Anwendungen desselben, besonders auf Curven dritter Ordnung gegeben. Die Bearbeitung des zweiten Theils jenes Werks, den ich jetzt unter der Feder habe, hat mich wieder auf den Gegenstand zurückgeführt, und ich bin dabei zu einer Reihe neuer Resultate gelangt, von denen ich diejenigen, welche sich an die in den erwähnten Abhandlungen dargestellte Analyse anschliefsen, den Lesern dieses Journals in einer Reihe von Aufsätzen mitzutheilen beabsichtige.

Der oben erwähnte Satz, dem ich hier eine wesentliche Ergänzung hinzufügen will, findet sich im 31. Bande dieses Journals in folgender Form ausgesprochen:

„Wenn die Lage eines beweglichen Punctes x in der Ebene dadurch beschränkt ist, dafs ein Punct und eine Gerade, welche durch Constructionen vermittels des Lineals aus jenem Puncte x und einer Reihe fester Puncte und Geraden hervorgehen, zusammenliegen sollen (d. h. der Punct in der Geraden liegen soll): so beschreibt der Punct x ein algebraisches Punct-Gebilde, und zwar ein Punctgebilde $n$ten Grades (eine Curve $n$ter Ordnung), wenn bei den Constructionen der bewegliche Punct n mal angewandt ist."

Den Beweis dieses Satzes, der eine Erweiterung des *Pascal*schen Satzes über das mystische Sechseck ist, habe ich in der Ausdehnungslehre aus den

Principien dieser Wissenschaft, und im 31. Bande dieses Journals aus der gewöhnlichen Analyse hergeleitet, und habe diesem Beweise hier nichts hinzuzufügen. Um jedoch den Satz einer allgemeinen Behandlung algebraischer Curven zu Grunde legen zu können, bedarf derselbe noch einer Ergänzung; indem nämlich gezeigt werden mufs, dafs auch umgekehrt jede algebraische Curve auf die in dem Satze angegebene Weise erzeugt werden kann. Und Dies nachzuweisen ist der Hauptzweck des gegenwärtigen Aufsatzes.

Ist $f(x,y)=0$ die Gleichung einer algebraischen Curve, bezogen auf irgend ein Axenkreuz, also $f(x,y)$ eine ganze rationale Function von x und y, so geht diese Function aus x, y und den Constanten durch Addition und Multiplication hervor. Es kommt also nur darauf an, die Addition und Multiplication zweier Zahlgröfsen durch lineale Construction darzustellen. Unter linealer Construction verstehe ich nicht nur die Verbindung zweier endlich entfernter Puncte durch eine gerade Linie, sondern auch das Ziehen der Parallele, oder, anders ausgedrückt, die Verbindung eines endlich und eines unendlich entfernten Punctes durch eine Gerade; also überhaupt das Verbinden zweier Puncte durch eine Gerade. Um nun die Addition und Multiplication durch geometrische Constructionen darzustellen, kommt es darauf an, jede der zu verknüpfenden Zahlgröfsen durch geometrische Gröfsen zu ersetzen. Ich nehme zwei Coordinaten-Axen an, die sich in c durchschneiden, und auf jeder derselben ein bestimmtes Stück als Maafs; es sei dies ca auf der x Axe (Fig. 1.), und cb auf der y Axe; wobei es ganz gleichgültig ist, ob diese beiden Maafse gleich lang sind, oder nicht. Durch das Maafs ca seien die Abscissen, durch das Maafs cb die Ordinaten gemessen, und die Quotienten dieser Messungen seien eben x und y. Der Endpunct der Abscisse sei x'; von dem Endpuncte der Ordinate sei, um alle Gröfsen auf derselben Linie, der Abscissenaxe, zu haben, die Parallele mit ba gezogen, welche die Abscissen in y' schneide: dann ist

$$x=\frac{cx'}{ca},\quad y=\frac{cy'}{ca}.$$

Auch ist klar, wie sowohl x' als y' aus dem die Curve construirenden Puncte, den wir p nennen wollen, durch lineale Constructionen erfolgen (Fig. 1.). Ferner nehmen wir an, dafs auch jede Constante in der Function $f(x,y)$ durch einen Punct der Geraden ca in der Art dargestellt sei, dafs die Entfernung dieses Puncts von dem Anfangspunct c, gemessen durch das Maafs ca, jener Constanten gleich sei. Auf diese Weise sind dann alle in der Function

vorkommenden Gröfsen durch Puncte der Abscissenaxe dargestellt, und es kommt nur darauf an, auch die Summe und das Product zwei solcher Gröfsen auf gleiche Weise durch Puncte dieser Linie vermittels linearer Constructionen darzustellen. Es seien (Fig. 2.) zuerst f und g zwei solche Puncte und h der gesuchte, also im ersten Falle

$$\frac{cf}{ca}+\frac{cg}{ca}=\frac{ch}{ca} \quad \text{oder} \quad cf+cg=ch.$$

Die einfachste lineale Construction des Puncts h ist die, dafs man einen Punct d aufserhalb der Geraden cf zu Hülfe nimmt, von f die Parallele mit cd, von d die mit cf zieht, und von dem Durchschnitt e dieser beiden Linien die Parallele mit dg zieht, welche die Gerade cf in dem gesuchten Puncte h schneidet. Für die Multiplication hat man

$$\frac{cf}{ca}.\frac{cg}{ca}=\frac{ch}{ca} \quad \text{oder} \quad cf.cg=ch.ca.$$

Aus der Proportion $ca:cf=cg:ch$ ergiebt sich dann die lineale Construction von h unmittelbar. Hieraus folgt also, dafs $f(x, y)$ aus dem die Curve construirenden Puncte p und constanten Puncten und Geraden sich lineal construiren läfst. Soll nun $f(x, y)$ gleich Null sein, so mufs der zu $f(x, y)$ gehörige Punct in c fallen, also die Gerade, deren Durchschnitt mit ca den zu $f(x\ y)$ gehörigen Punct liefert, mufs durch c gehen: d. h. es findet die in dem Hauptsatze ausgesprochene Bedingung Statt, dafs ein Punct und eine Gerade, welche aus linealen Constructionen hervorgehen, zusammenliegen sollen; also ist die gegebene Curve durch die in dem Hauptsatz angegebene Construction erzeugbar. Q. d. e.

Um den Hauptsatz für die Anwendung bequemer zu machen, will ich den Begriff der ***offenen Figur*** und der Verkettung von geraden Linien einführen. Die offene Figur (S. dieses Journal Band 36.) besteht aus einer Reihe von Puncten und geraden Linien, in der Art, dafs auf jeden Punct eine durch ihn gehende Gerade, und auf jede Gerade ein in ihr liegender Punct folgt, bis endlich die Reihe entweder mit einem Puncte, oder mit einer Geraden schliefst; wie sie denn auch entweder mit einem Puncte oder mit einer Geraden beginnt. Punct und Gerade nenne ich zusammen ***Elemente;*** das Element, mit welchem jene Reihe beginnt, oder schliefst, nenne ich ***Anfangs-*** oder ***End-Element,*** beide zusammen ***Gränz-Elemente;*** alle Puncte oder Geraden jener Reihe, die

nicht Gränz-Elemente sind, nenne ich *Ecken* oder *Seiten* der offenen Figur. Wenn man nun (Fig. 3.) ein Element x zum Anfangs-Element mehrerer offenen Figuren macht, dann unter den so gewonnenen offenen Figuren zwei beliebige so zusammenschliefst, dafs sie ein gemeinschaftliches End-Element erhalten, welches zugleich Anfangs-Element einer neuen offenen Figur wird, und beliebig fortfährt, die jedesmal noch übrigen offenen Figuren auf die angegebene Weise paarweise zusammenzuschliefsen, so will ich die so hervorgehende Figur eine *Verkettung gerader Linien* nennen; das Element x soll das *Anfangs-Element* dieser Verkettung, die sämmtlichen übrigen Gränz-Elemente der offenen Figuren sollen die *Übergangs-Elemente* der Verkettung heifsen, während ich die Ecken und Seiten der offenen Figuren zugleich als Ecken und Seiten der Verkettung setze. Wenn insbesondere zuletzt nur Eine offene Figur übrig bleibt, deren End-Element mit dem Anfangs-Element x der Verkettung zusammenfällt, so nenne ich die Verkettung eine *geschlossene;* und zwar vom $n$ten Grade, wenn von dem Anfangs-Element (x) n offene Figuren ausgehen (die letzte mit eingerechnet, welche x zum Elemente hat). Dann lautet der Satz wie folgt:

„Wenn sich eine Verkettung $n$ten Grades lineal, d. h. so bewegt, dafs alle Seiten durch feste Puncte gehen und alle Ecken in festen Geraden bleiben, so beschreibt das Anfangs-Element der Verkettung ein Gebilde $n$ten Grades."

Wendet man diesen Satz z. B. auf die Curven zweiter, dritter und vierter Ordnung an, so erhält man folgende abgeleiteten Sätze:

1. Wenn in einer geschlossenen Figur alle Ecken und Seiten, mit Ausnahme einer Ecke, sich lineal bewegen (d. h. die Ecken in festen Geraden, die Seiten um feste Puncte), so beschreibt diese letzte Ecke einen *Kegelschnitt.*

2. Wenn drei offene Figuren, mit gemeinschaftlichen Gränz-Elementen, sich lineal bewegen (d. h. so, dafs die Ecken in festen Geraden bleiben, die Seiten durch feste Puncte gehen), so beschreibt jedes der Gränz-Elemente ein Gebilde *dritten* Grades (S. dieses Journal Band 36.).

3. Wenn fünf offene Figuren lich lineal bewegen, von denen vier alle dasselbe Anfangs-Element (x) und paarweise dieselben End-Elemente (y, z) haben, während die Gränz-Elemente der fünften mit diesen End-Elementen (y, z) zusammenfallen, so beschreibt das Anfangs-Element (x) ein Gebilde *vierten* Grades (S. Fig. 3.).

Ich füge hier noch zwei Bemerkungen hinzu, welche zur Erläuterung und richtigen Anwendung des Hauptsatzes dienen werden. Zuerst ist es klar, dafs von den offenen Figuren einige zusammenfallen können, und zwar in der Art, dafs sie auch gleiche Gränz-Elemente haben. Dies Zusammenfallen wird sich dann in der Verkettung selbst nur dadurch zu erkennen geben, dafs ein folgendes Übergangs-Element mehr als drei Gränz-Elemente in sich vereinigt. Der Grad der Verkettung, und also auch des erzeugten Gebildes, wird sich auch in diesem Falle leicht angeben lassen. Es werde z. B. in (Fig. 3.) der Weg gesucht, den g beschreibt, also g als Anfangspunct der Verkettung gesetzt. Alsdann gehen von dem Übergangs-Element x, aufser den beiden offenen Figuren, die von y direct nach x gehen, noch zwei offene Figuren aus: mithin müssen jene ersteren beiden doppelt gerechnet werden, und es ist die Verkettung vom *fünften* Grade; y beschreibt also eine Curve fünften Grades, und Dasselbe gilt von z. Es würde sich leicht nachweisen lassen, dafs in solchen Fällen jedesmal Curven mit Doppelpuncten erzeugt werden (Vergl. darüber die Abhandlung in dem 31. Bande Seite 20). Doch möge dieser Nachweis dem Leser überlassen bleiben.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Übergangsfälle, in welchen der Grad des Gebildes scheinbar niedriger wird. Dies kann auf zweifache Art geschehen, indem entweder die ganze Function $n$ten Grades $f(x,y)$, welche, gleich Null gesetzt, die Curve bestimmt, in Factoren sich zerfällen läfst, von denen zwei oder mehrere einander gleich sind: oder wenn Coëfficienten Null werden und dadurch die Glieder höherer Grade wegfallen; ja es könnten alle Coëfficienten Null und dadurch die Curve ganz unbestimmt werden. In allen diesen Fällen wird man jedoch durch Variation der Constanten sogleich die Curve $n$ter Ordnung wieder in Evidenz bringen können; und insofern wir also jene besondern Fälle nur als Übergangsfälle betrachten, in denen die allgemeinen Constanten gewisse besondere Werthe annehmen, werden wir auch diese Übergangsgebilde als Gebilde $n$ten Grades setzen *müssen*. Nur unter dieser Voraussetzung hat der aufgestellte Satz seine vollkommen allgemeine Bedeutung; wie denn auch alle allgemeinen Sätze über algebraische Curven nur unter dieser Voraussetzung gelten. Schliefst man das unbestimmte Gebilde $n$ten Grades aus und nimmt an, dafs die sämmtlichen Coëfficienten der Glieder der m höchsten Grade verschwinden, so bleibt die Curve vom $(n-m)$ten Grade; und um

sie als Curve $n$ten Grades aufzufassen, hat man m gerade Linien, welche ins Unendliche fallen, mit der Curve $(n-m)$ter Ordnung zusammenzufassen. Obgleich das so eben Gesagte hinlänglich bekannt ist, so glaubte ich es doch hier noch einmal in Erinnerung bringen zu müssen, da die Art, wie wir aus einer Gleichung $n$ten Grades die lineale Erzeugung der betreffenden Curve ableiteten, stets, wenn die Gleichung mehr als ein variables Glied enthält, auf ein Gebilde von höherem als dem $n$ten Grade hinführt, welches sich aber in ein Gebilde $n$ten Grades und in eine Reihe von geraden Linien die ins Unendliche fallen, zerfällen läfst. Ich denke, auf diese besonderen Verhältnisse in einer späteren Abhandlnng zurückzukommen.

Stettin, im Juli 1851.

20.

Die höhere Projectivität und Perspectivität in der Ebene; dargestellt durch geometrische Analyse.

(Von Herrn Prof. Dr. *H. Grafsmann*, Oberlehrer der Mathematik zu Stettin.)

Die fruchtbaren Beziehungen der Perspectivität und Projectivität, wie sie von *Steiner* zuerst mit so viel Glück bearbeitet sind, und die entsprechenden Beziehungen für Curven höherer Grade ergeben sich aus der geometrischen Analyse, wie ich sie besonders im 31ten Bande dieses Journals entwickelt habe, so unmittelbar und leicht, dafs man nur nöthig hat, die fortschreitende Bildung eines geometrischen Productes mit einem variablen Puncte oder Strahl mit Aufmerksamkeit zu verfolgen, um jene Beziehungen in ihrer ganzen Einfachheit und Anschaulichkeit vor Augen zu haben. Der Übersicht wegen werde ich den Algorithmus, wie ich ihn in der angeführten Abhandlung dargestellt habe und ihn hier anwenden will, ins Gedächtnifs zurückrufen. Ich verstehe nämlich (abgesehen von den in meiner Ausdehnungslehre zugleich mit dargestellten metrischen Werthen der räumlichen Gröfsen) unter ab die Verbindungslinie der beiden Puncte a und b, unter AB den Durchschnittspunct der beiden Geraden A und B, und setze ab oder AB Null, wenn a und b oder A und B zusammenfallen. Endlich soll die Gleichung $Ab = 0$ ausdrücken, dafs der Punct b in der Geraden A liegt. Überall werde ich die Puncte mit kleinen, die Linien mit grofsen Buchstaben bezeichnen und festsetzen, dafs, wenn in einem solchen Ausdrucke keine Klammern stehen, die Verknüpfung von der Linken zur Rechten fortschreiten soll. Also wird z. B. unter abc der Durchschnitt der beiden Geraden ab und c zu verstehen sein. Ich werde solche Ausdrücke *planimetrische Producte* nennen *). Zugleich erinnere ich an das in der erwähnten Abhandlung mitgetheilte Resultat, dafs, wenn in der Gleichung $Ab = 0$ A und b planimetrische Producte von Puncten und Linien sind und in diesen beiden Producten der veränderliche Punct x zusammen $n$mal als Factor vorkommt, daraus zwischen den Coordinaten von x

---

*) Nach der in meiner „Ausdehnungslehre" (§. 127, 128) gegebenen Nomenclatur würde ich sie „auf die Ebene bezügliche Producte" nennen müssen; womit der hier gewählte Ausdruck gleichbedeutend ist.

eine Gleichung $n$ten Grades entspringt, also x eine Curve $n$ter Ordnung beschreibt. Diesen Satz, der eine Erweiterung des bekannten *Pascal*schen Satzes ist, habe ich in meiner letzten Abhandlung (S. 187 dieses Bandes) in der Art ergänzt, dafs auch umgekehrt jede algebraische Curve sich in der so eben angegebenen Weise, d. h. hier durch eine Gleichung darstellen läfst, deren eine Seite Null und deren andere ein planimetrisches Product ist, welches den veränderlichen, die Curve beschreibenden Punct x als Factor enthält.

Noch will ich der Bequemlichkeit wegen folgende Bezeichnungen mir erlauben, die auch schon sonst in analoger Weise üblich sind. Nämlich, wenn zwei Puncte a und b oder zwei Gerade A und B zusammenfallen, so will ich Dies durch

$$a \equiv b, \quad A \equiv B$$

ausdrücken; welche Formeln also identisch sind mit den Gleichungen

$$ab = 0, \quad AB = 0.$$

Ferner soll durch $Ab.c$, wenn der Punct b nicht in der Geraden A liegt, gleichfalls der Punct c dargestellt werden, so dafs also

$$Ab.c \equiv c, \text{ wenn } AB \text{ ungleich Null ist.}$$

Um den Algorithmus flüssiger zu machen, werde ich die einfachsten Umgestaltungsformeln ableiten. Unmittelbar leuchtet ein, dafs

$$(1.) \quad ab \equiv ba, \quad AB \equiv BA$$

ist. Ferner, wenn in dem Product abC, welches den Durchschnitt der beiden Geraden ab und C darstellt, der Punct b in der Geraden C liegt, so wird $abC \equiv b$ sein, wenn nicht etwa auch a in C liegt; in diesem letzteren Falle ist aber offenbar $abC = 0$. Beides läfst sich zusammenfassen in die Gleichung

$$(2.) \quad abC \equiv aC.b,$$

welche stets gilt, wenn b in C liegt, d. h. $bC = 0$ ist. Eben so ist, reciprok,

$$(3.) \quad ABc \equiv Ac.B,$$

wenn c in B liegt. Da ich von dieser Umgestaltung häufig Gebrauch machen werde, so will ich dieselbe in Worten ausdrücken:

„Wenn von den fortschreitenden Factoren eines planimetrischen Productes zwei aufeinanderfolgende einen Punct und eine Linie darstellen, und der Punct in der Linie liegt, so kann man die beiden Factoren vertauschen."

Ich will dabei noch gelegentlich bemerken, dafs diese Beziehung auch dann noch gilt, wenn man die metrischen Werthe berücksichtigt, so dafs man in diese letzten Formeln auch statt des Zeichens $\equiv$ das Gleichheitszeichen hätte

einführen können. Hingegen ist $ab = -ba$ und $AB = -BA$; so dafs sich in den Formeln (1.) *nicht* das Gleichheitszeichen substituiren läfst.

Endlich ist unmittelbar klar, dafs die Gleichung

$$(4.) \quad abc = 0 \quad \text{oder} \quad ABC = 0$$

ausdrückt, dafs die drei Puncte a, b, c in einer Geraden liegen, oder dafs die drei Geraden A, B, C durch einen und denselben Punct gehen, und dafs man also in diesen Gleichungen die drei Factoren beliebig vertauschen und zusammenfassen kann. Hat man daher eine Gleichung von der Form

$$(5.) \quad abCdEfg = 0,$$

und überhaupt eine Gleichung, deren eine Seite Null und deren andere Seite ein planimetrisches Product ist, dessen beide ersten und dessen beide letzten Factoren von gleicher Art (beides Puncte oder beides Linien) sind, während sonst überall Puncte und Linien wechseln, so bleibt auch das umgekehrte Product Null, also hier

$$(6.) \quad gfEdCba = 0.$$

Dies ergiebt sich sogleich durch wiederholte Vertauschung und Zusammenfassung der Factoren in der Formel (4.). Denn $abCdE$ stellt einen Punct vor: also kann man statt (5.)

$$0 = gf(abCdE)$$

schreiben. Aber gf und $abCd$ stellen gerade Linien vor: also kann man statt dessen schreiben:

$$0 = gf(abCd)E = gfE(abCd),$$

und hierin wieder, da gfE und abC Puncte sind,

$$0 = gfEd(abC),$$

mithin, da $gfEd$ und ab Linien sind,

$$0 = gfEdC(ab) = gfEdCba.$$

Dasselbe gilt dann auch allgemein für alle Gleichungsformen von der oben bezeichneten Art.

Nach diesen Vorbemerkungen schreite ich zur Betrachtung eines Products mit einem veränderlichen Puncte x. Betrachten wir zuerst das Product

$$xaBcDeF\ldots,$$

wo auf x abwechselnd Puncte und Linien folgen, so stellt xa einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunct a vor, xaB die damit perspectivische Gerade B, indem nämlich dem Strahle xa jenes Büschels der Punct xaB in dieser Ge-

raden entspricht; eben so stellt $xaBc$ einen Strahlenbüschel mit dem Mittelpunct c vor, welcher zu dem Strahlenbüschel um a perspectivisch ist, und zwar so, dafs die Gerade B ihr perspectivischer Durchschnitt ist. Ferner stellt $xaBcD$ eine Gerade D vor, die mit dem Strahlenbüschel c und der Geraden B perspectivisch, also mit dem Strahlenbüschel a projectivisch ist, und so fort; so dafs je zwei aneinander gränzende, oder nur durch ein Mittelglied getrennte Gebilde zu einander perspectivisch, je zwei durch mehr als ein Mittelglied getrennte Gebilde zu einander projectivisch sind. Es würde sich aus den aufgestellten Principien leicht das bekannte Resultat ableiten lassen, dafs sich hierbei jede ungerade Anzahl von Mittelgliedern auf 3, jede gerade Anzahl auf 2, oder, wenn imaginäre Mittelglieder ausgeschlossen sind, auf 4 Mittelglieder zurückführen läfst; was wir jedoch hier übergehen, um zu den wichtigeren Ergebnissen fortzuschreiten.

Man betrachte jetzt den Durchschnitt zweier projectivischer Strahlenbüschel (d. h. die Gesammtheit der Durchschnittspuncte ihrer entsprechenden Strahlen), etwa der Strahlenbüschel xa und $xaBcDe$, und x sei der variable Durchschnittspunct der entsprechenden Strahlen: so heifst das, der Strahl $xaBcDe$ solle durch x gehen; man erhält also die Gleichung

$$xaBcDex = 0,$$

folglich eine Gleichung zweiten Grades: d. h. der Durchschnitt zweier projectivischer Strahlenbüschel ist ein Kegelschnitt. Sind die beiden Strahlenbüschel perspectivisch, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien, deren eine der perspectivische Durchschnitt beider Strahlenbüschel, der andere die Verbindungslinie der Mittelpuncte ist.

Alles dies sind bekannte Resultate, deren Ableitung aus dem angegebenen Algorithmus ich hier nur ausgeführt habe, um den Weg zur höheren Perspectivität zu bahnen. Diese ergiebt sich bei der Verfolgung des eingeschlagenen Weges von selbst, wenn man den variablen Punct x wiederholt in das Product einführt.

Man betrachte das Product

$$(7.) \quad xaBcDxB_1.$$

Es wird dadurch, wenn das Product nicht Null ist, ein bestimmter Punct in B_1 dargestellt, welcher dem Puncte x entspricht. Fragen wir zuerst, welchen Puncten x ein- und derselbe Punct g in B_1 entspricht, so haben wir, da dann der Strahl $xaBcDx$ durch g gehen mufs, die Gleichung

$$(8.) \quad xaBcDxg = 0,$$

also die Gleichung eines Kegelschnitts. Allen Puncten dieses Kegelschnitts entspricht in B_1 derselbe Punct g; wir können daher sagen, diesem Kegelschnitte selbst entspreche der Punct g. Wird g als der Durchschnitt von B_1 und einer Geraden G gesetzt, so erhält man die Gleichung in der Form

$$(9.)\quad xaBcDxB_1G = 0.$$

In dieser Form zeigt die Gleichung unmittelbar, dafs alle Kegelschnitte, welche den verschiedenen Puncten g entsprechen, diejenigen Puncte gemein haben, welche das Product $xaBcDxB_1$ Null machen. Welche Puncte sind dies? Um bei der Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen nicht durch Nebenfragen gestört zu werden, wollen wir zuerst einen Fall behandeln, den wir dann bei der ganzen folgenden Betrachtung ausschliefsen werden; nämlich den, dafs zwei auf einander folgende constante Factoren zusammenfallen (der Punct in die Linie). Fällt z. B. c in D, so lassen sich nach Formel (2.) diese beiden Factoren vertauschen und man erhält $xaBcD \equiv xaBD.c$. Nun ist die Gleichung $xaBD = 0$, da sie ausdrückt, dafs der Punct xaB in der Geraden D liegt, die Gleichung einer geraden Linie, und damit zerfällt dann der Kegelschnitt (8.) in zwei gerade Linien, von denen die eine, nämlich die durch die Gleichung $xaBD = 0$ vorgestellte, allen jenen Kegelschnitten gemein ist, während die andere, die durch die Gleichung $cxg = 0$ dargestellt wird, um den Punct c rotirt. Sieht man daher von jener unveränderlichen Linie ab, so haben wir wieder den früheren Fall eines Strahlenbüschels (um c) und einer damit perspectivischen Geraden B_1. Dasselbe Zerfallen in niedere Gebilde wird offenbar überall eintreten, wo ein constanter Punct in eine constante Gerade fällt, die ihm als Factor folgt, oder vorangeht. Ich werde daher diesen Fall ein- für allemal von der Betrachtung ausschliefsen. Kehrt man nun zu der Frage zurück, welche Puncte x das Product $xaBcDxB_1$ Null machen, so geschieht dies erstens durch den Punct $x \equiv a$. Zweitens, wenn x nicht in a fällt, kann auch xaB nicht Null sein; denn dann müfste die Gerade xa in B fallen, also auch der Punct a in B; was wir ausgeschlossen haben. Aus demselben Grunde kann also auch $xaBc$ und $xaBcD$ nicht Null werden. Der nächste mögliche Fall ist demnach, dafs der Punct $xaBcD$ mit x zusammenfällt. Dann mufs x sowohl in der Geraden D, als in der Geraden $xaBc$ liegen. Letzteres giebt die Gleichung $xaBcx = 0$, d. h. die Gleichung eines Kegelschnitts, der in die Geraden B und ac zerfällt. Die Durchschnitte dieser beiden Geraden mit der Geraden D geben also zwei Puncte, und zwar die beiden einzigen, für welche der Punct $xaBcD$ mit x zusammenfällt. Drittens,

wenn auch $xaBcDx$ nicht verschwindet, stellt es einen durch x gehenden Strahl vor. Soll also dann $xaBcDxB_1$ Null sein, so mufs dieser Strahl mit B_1 zusammen-, also sowohl der Punct x, als der Punct $xaBcD$, in B_1 fallen. Letzteres giebt $xaBcDB_1 = 0$, oder durch Umkehrung, $B_1DcBax = 0$; d. h. x liegt in der Geraden B_1DcBa, aber auch in B_1, also im Durchschnitt beider, d. h. es ist

$$x \equiv B_1DcBaB_1;$$

also machen folgende vier Puncte, aber auch keine andern, statt x gesetzt, das Product $xaBcDxB_1$ gleich Null, nämlich

$$a, \quad BD, \quad acD, \quad B_1DcBaB_1,$$

die, wir nach der Reihe mit

$$a, \quad b, \quad d, \quad e$$

bezeichnen wollen (Fig. 4.). Die Kegelschnitte (8.) oder (9.) schlingen sich also alle um diese vier festen Puncte a, b, d, e. Man erhält demnach eine Schaar von Kegelschnitten, welche alle die vier festen Puncte a, b, d, e gemein haben, und deren jedem in B_1 ein Punct, nämlich derjenige Punct entspricht, in welchem dieser Kegelschnitt die Gerade B_1 aufser dem Puncte e zum zweitenmal schneidet. Wir können jene Schaar einen *Curvenbüschel zweiter Ordnung* nennen, a, b, d, e die *Mittelpuncte* dieses Büschels. Von der Geraden B_1, welche durch einen dieser Mittelpuncte (e) geht und deren Puncte den durch diese gehenden Kegelschnitten jenes Büschels entsprechen, läfst sich sagen, dafs sie mit jenem Curvenbüschel *perspectivisch* sei.

Betrachten wir jetzt weiter (Fig. 5.) das Product

$$xaBcDxB_1c_1D_1e_1F_1 \ldots ,$$

so zeigt sich der Strahlenbüschel um c_1 mit der Geraden B_1 perspectivisch, und man kann in diesem Falle, nach dem Princip der *Steiner*schen Benennung, auch diesen Strahlenbüschel mit dem Curvenbüschel perspectivisch nennen. Nach demselben Princip werden wir die Gerade D_1, den Strahlbüschel e_1, die Gerade F_1 u. s. w. mit jenem Curvenbüschel projectivisch nennen können. Betrachten wir den Durchschnitt jenes Curvenbüschels mit einem der damit projectivischen Strahlenbüschel, etwa mit $xaBcDxB_1c_1D_1e_1$, d. h. also die Gesammtheit der Durchschnittspuncte der Strahlen dieses Büschels mit den entsprechenden Kegelschnitten jenes Curvenbüschels, und ist x dieser variable Durchschnitt, so heifst das: der Strahl $xaB \ldots e_1$ soll durch x gehen und wir erhalten die Gleichung

$$xaBcDxB_1c_1D_1e_1x = 0,$$

also eine Gleichung dritten Grades: d. h. ***der Durchschnitt eines Büschels erster und zweiter Ordnung ist eine Curve dritter Ordnung.***

Ehe ich zur ***allgemeinen*** Betrachtung übergehe, will ich den eingeschlagenen Weg noch einen Schritt weiter verfolgen und betrachte zu dem Ende das Product

$$xaBcDxB_1c_1D_1xB_2.$$

Jedem Puncte x, der dieses Product nicht Null macht, entspricht in B_2 ein bestimmter Punct. Es werde in B_2 der Punct $y \equiv B_2G$ betrachtet, und man suche die Puncte x, welchen derselbe entspricht, d. h. für welchen der Strahl $xa \ldots D_1x$ durch g geht, so hat man

$$(9a.) \quad \begin{cases} xaBcDxB_1c_1D_1xy \quad = 0 \text{ oder} \\ xaBcDxB_1c_1D_1xB_2G = 0; \end{cases}$$

mithin ist der ***Ort*** von x eine Curve dritter Ordnung. Allen Puncten dieser Curve entspricht in B_2 derselbe Punct g, also jener Curve dieser Punct. Die Frage, welche Puncte alle diese Curven dritter Ordnung gemein haben, ist identisch mit der Frage, welche Puncte, statt x gesetzt, das Product $xaBcDxB_1c_1D_1xB_2$ Null machen. Dies sind aber erstens die vier Puncte, welche $xaBcDxB_1$ Null machen. Ist zweitens dieser Theil des Products nicht Null, so ist auch das Product bis D_1 hin ungleich Null und stellt einen bestimmten Punct in D_1 vor. Soll dieser mit x multiplicirt Null geben, d. h. mit x zusammenfallen, so mufs x in D_1 liegen, und zugleich in dem Strahle $xaBcDxB_1c_1$. Letzteres giebt die Gleichung

$$(10.) \quad xaBcDxB_1c_1x = 0.$$

Da hier $xaBcDx$, B_1 und c_1x Linien vorstellen, so können wir die Ordnung nach den Bemerkungen zu Formel (4.) verändern und dafür

$$xaBcDx(c_1x)B_1 = 0$$

schreiben, und da hier x in c_1x liegt, so ist auch nach Formel (2.)

$$xaBcD(c_1x).xB_1 = 0;$$

d. h. es zerfällt die Curve (10.) in den Kegelschnitt

$$(11.) \quad xaBcDc_1x = 0$$

und in die Gerade B_1. So wird das Product $xa \ldots D_1x$ durch den Durchschnitt B_1D_1 und durch die beiden Durchschnitte des Kegelschnitts (11.) und der Geraden D_1 auf Null gebracht. Zu diesem Resultate gelangt man übrigens auch leicht durch die blofse Betrachtung der Figur. Ist endlich dies Product $xa \ldots D_1x$ ungleich Null, so stellt es einen durch x gehenden Strahl vor; soll dann $xa \ldots D_1xB_2$ Null werden, so mufs dieser Werth mit B_2

zusammen-, also sowohl x in B_2 fallen, als auch der Punct $xa \ldots . D_1$. Letzteres giebt die Gleichung

$$xaBcDxB_1c_1D_1B_2 = 0,$$

also einen Kegelschnitt, dessen Durchschnitte mit B_2 die letzten beiden Puncte sind, welche $xa \ldots . D_1xB_2$ Null machen. Setzen wir hier den Punct $B_2D_1c_1B_1 \equiv e_1$, so wird die Gleichung

$$xaBcDxc_1 = 0.$$

Fasset man diese Resultate zusammen, so machen folgende neun Puncte, aber auch keine andern, statt x gesetzt, das Product $xaBcDxB_1c_1D_1xB_2$ Null:

$$a, \quad BD, \quad acD, \quad B_1DcBaB_1, \quad B_1D_1, \quad \begin{cases} xaBcDc_1x = 0 \\ D_1x = 0 \end{cases} \begin{cases} xaBcDe_1x = 0 \\ B_2x = 0; \end{cases}$$

Puncte welche wir nach der Reihe durch

$$a, \; b, \; d, \; e, \; f, \; g \text{ und } h, \; i \text{ und } k$$

bezeichnen wollen. Die Curven dritter Ordnung (9.) haben also diese neun festen Puncte $a \ldots . k$ gemein. Man erhält demnach eine Schaar von Curven dritter Ordnung, welche sich um jene neun festen Puncte schlingen und deren jeder in B_2 ein Punct, nämlich derjenige Punct entspricht, in welchem die Curve die Gerade aufser den Puncten i und k zum drittenmale schneidet. Wir werden daher jene Curvenschaar einen *Curvenbüschel dritter Ordnung*, die neun Puncte $a \ldots . k$ die Mittelpuncte dieses Büschels nennen, und den Büschel mit der durch zwei der Mittelpuncte i und k gehenden Geraden perspectivisch setzen können. Von hier aus gelangt man, genau wie vorher, zur Projectivität eines Gebildes dritter und erster Ordnung, und zu dem Durchschnitt eines Büschels dritter und erster Ordnung, welcher eine Curve vierter Ordnung liefert.

Um nun das eingeschlagene Verfahren auf *beliebige* planimetrische Producte anzuwenden, die das variable Element x enthalten, nehme ich an, es sei X irgend ein Product, welches eine veränderliche, von x abhängige Gerade darstellt, und A sei eine feste Gerade. Dann drückt XA, wenn es nicht etwa Null ist, den Durchschnitt der Geraden X und A aus. Jedem Puncte x, der nicht XA Null macht, entspricht eine bestimmte Gerade X und ein besimmter Punct in A. Welchen Puncten x entspricht derselbe Punct in A, z. B. welchen der Punct AG, den wir g nennen wollen? Denjenigen Puncten offenbar, für welche X durch g geht, d. h. für welche

$$(12.) \quad \begin{cases} Xg = 0 \text{ oder} \\ XAG = 0 \end{cases}$$

ist. Enthält X den Factor x $n$mal, so ist die gefundene Gleichung vom $n$ten Grade und stellt also eine Curve $n$ter Ordnung vor. Allen Puncten dieser Curve entspricht ein- und derselbe Punct g in A, oder, anders ausgedrückt: jener Curve entspricht dieser Punct. Setzt man g variabel, so erhält man eine Curvenschaar, und jeder Curve dieser Schaar entspricht ein Punct in A. Es bleibt nun noch die Frage zu lösen: welche Puncte haben alle jene Curven gemeinschaftlich, oder, anders ausgedrückt: für welche Puncte x ist $XA = 0$? Um diese Frage zu beantworten, gehen wir auf die Entstehung der Linie X zurück. Dieselbe kann nur als Verbindungslinie zweier Puncte entstanden sein. Es seien diese Puncte p und q, also $X \equiv pq$ und

$$(12a.) \quad pqA = 0.$$

Ist nun pq ungleich Null, so drückt diese Gleichung aus, dafs die Gerade pq mit A zusammenfällt, d. h. dafs sowohl p als q in A liegen, und man erhält die Gleichungen

$$(13.) \quad pA = 0 \quad \text{und} \quad qA = 0.$$

Ist p in Bezug auf x von αtem Grade, q von βtem, so sind die durch diese beiden Gleichungen dargestellten Curven beziehlich von denselben Geraden und liefern $\alpha\beta$ Puncte, welche pqA Null machen, ohne pq Null zu machen. Setzen wir hier statt A eine variable Linie R, welche in Bezug auf x vom Grade γ ist, so werden die beiden obigen zu Gleichungen von den Graden $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$, und geben also $(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$ Puncte, welche pqR Null machen, ohne pq Null zu machen. Dasselbe würde auch noch gelten, wenn p und q Linien wären und R ein Punct. Hierdurch hat man dann zugleich ein Mittel, um zu untersuchen, welche Puncte pq Null machen, indem man nur wieder p in seine zwei Linienfactoren zu zerlegen braucht, u. s. f. So können also die sämmtlichen Puncte, welche XA gleich Null machen, gefunden werden. Fragt man nach der *Anzahl* der Puncte, so ergiebt sich leicht der interessante Satz, dafs die Anzahl der Puncte, die ein Product pq Null machen, in welchem p in Bezug auf x vom Grade α, q vom Grade β ist, und in welchem nur Puncte mit Puncten und Linien mit Linien multiplicirt sind, gleich $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ sei. Es gilt Dies zunächst für das Product von x in einen constanten Punct a, indem xa nur Null wird für $x \equiv a$. Gilt der Satz aber für irgend ein Product pq, so gilt er auch noch, wenn zu pq ein Factor R hinzutritt. Denn es seien p, q, R beziehlich von den Graden α, β, γ, so ist nach der Annahme die Anzahl der Puncte, welche pq Null machen, gleich $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$; die Anzahl der Puncte, welche pqR Null machen,

ohne pq Null zu machen, ist, wie wir oben sahen, gleich $(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma) = \alpha\beta+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$: also ist die Anzahl der Puncte, welche überhaupt pqR Null machen, die Summe beider Zahlen, mithin gleich $(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$; d. h. der Satz gilt auch dann noch, wenn irgend ein Factor hinzutritt. Da nun das Product, wie es auch immer beschaffen sei, nur damit beginnen kann, dafs x mit einem constanten Factor multiplicirt wird, und für diesen Fall der zu erweisende Satz gilt, derselbe aber auch bestehen bleibt, wenn irgend ein neuer Factor hinzutritt, so gilt er auch *allgemein*.

Gehen wir jetzt auf das Product XA zurück, wo X vom $n$ten Grade ist, so wird es nach dem angeführten Satze durch n^2 Puncte Null gemacht. Die Curvenschaar (12.) schlingt sich also um n^2 feste Puncte und liefert einen ***Curvenbüschel nter Ordnung,*** welcher jene n^2 Puncte zu ***Mittelpuncten*** hat. Jeder Curve dieses Büschels entspricht in A ein bestimmter Punct; und umgekehrt. Wir nennen wiederum jenen Büschel $n$ter Ordnung mit dieser Geraden ***projectivisch.*** Hat man zwei Curvenbüschel, welche derselben Geraden projectivisch sind, so nennen wir diese Büschel unter einander projectivisch. Es sei der eine Curvenbüschel durch das Product XA, der andere durch das Product YA vorgestellt, wo X und Y wiederum Producte sind, von denen das erstere x $n$mal als Factor enthalte, das letztere $m$mal. Dann entspricht der Geraden X in A der Punct XA, der Geraden Y der Punct YA (Fig. 6.). Sollen dann X und Y einander entsprechen, so müssen sie demselben Puncte in A entsprechen, d. h. sich in demselben Punct von A schneiden. Es sei dieser Punct g, so entspricht der Curve $Xg=0$ die Curve $Yg=0$, von denen jene von $n$ter, diese von $m$ter Ordnung ist, und von welchen, wenn g in A variabel wird, die erstere durch die n^2 Puncte, welche XA Null machen, die letztere durch die m^2 Puncte geht, welche YA Null machen. Suchen wir den Durchschnitt der beiden projectivischen Curvenbüschel, d. h. die Gesammtheit der Puncte, in welchen sich je zwei entsprechende Curven dieser beiden Büschel schneiden, so sei x einer dieser Durchschnittspuncte; dann hat man sogleich, da XA zugleich in Y liegt, die Gleichung

$$XAY = 0,$$

welche von $(m+n)$tem Grade ist, und welche sogleich den allgemeinen Satz liefert:

„Zwei projectivische Curvenbüschel, von denen der eine von $m$ter, der andere von $n$ter Ordnung ist, erzeugen als Durchschnitt eine Curve $(m+n)$ter Ordnung."



Um zur *Perspectivität* zwischen einem Curvenbüschel und einer Geraden A zu gelangen, ist nöthig, dafs jede Curve des Büschels durch den entsprechenden Punct der Geraden A gehe. Dies wird am einfachsten erreicht, wenn man in den früheren Formeln (12. 13.) $q \equiv x$, also $X \equiv px$ setzt, so dafs pxA zu dem die Perspectivität darstellenden Producte wird. In der That geht dann die Formel (12.) in

$$pxg = 0 \quad \text{oder} \quad pxAG = 0$$

über, welcher offenbar durch $x \equiv g$ genügt wird; d. h. es geht die durch jene Gleichung dargestellte Curve durch den ihr in A entsprechenden Punct g. Die Gleichungen (13.) werden dann

$$pA = 0 \quad \text{und} \quad xA = 0.$$

Die durch sie bestimmten Puncte x sind also die Durchchnittspuncte der durch die erstere Gleichung dargestellten Curve mit der Geraden A. Nimmt man wie oben an, dafs X vom $n$ten Grade ist, so ist p, da $X \equiv px$ ist, vom $(n-1)$ten Grade; also ist die Anzahl jener Durchnittspuncte $n-1$; d. h. von den n^2 Mittelpuncten des Curvenbüschels liegen $n-1$ in der Geraden A. Daraus ergiebt sich folgender Satz.

„Ein Curvenbüschel $n$ter Ordnung kann dann, und nur dann, mit einer Geraden A perspectivisch sein, wenn $n-1$ seiner n^2 Mittelpuncte in der Geraden A liegen; und zwar entspricht dann jeder Curve des Büschels derjenige Punct der Geraden, in welchem die Curve die Gerade zum $n$ten Male schneidet."

Es bedarf kaum der Erwähnung, dafs die vorstehenden Beziehungen auch gelten, wenn man Punct und Linie vertauscht; wodurch die Curven $n$ter Ordnung durch n^2 feste Puncte in Curven $n$ter Classe mit n^2 festen Tangenten übergehen. Ich behalte mir vor, die Idee der höheren Projectivität in einem folgenden Aufsatze noch von einem andern Gesichtspuncte aus zu behandeln, und dort diejenigen Beziehungen nachzuholen, welche sich durch die hier eingeschlagene Methode weniger leicht zur Anschauung bringen lassen.

Stettin, im Juli 1851.

21.

Die höhere Projectivität in der Ebene; dargestellt durch Functionsverknüpfungen.

(Von Herrn Prof. Dr. *H. Grafsmann*, Oberlehrer der Mathematik zu Stettin.)

Die höhere Projectivität, welche ich in der vorhergehenden Abhandlung (S. 193), in Verbindung mit der höheren Perspectivität, aus den Principien der planimetrischen Multiplication abgeleitet habe, läfst noch eine andere Behandlung zu, durch welche gewisse Beziehungen projectivischer Gebilde sich mit besonderer Leichtigkeit ergeben. Die Methode, welche ich hier anwenden werde, ist dieselbe, welche von *Plücker* mit so vielem Erfolge bei der Behandlung geometrischer Gegenstände angewandt ist; nämlich die Methode der Verknüpfung von Functionen, deren jede, gleich Null gesetzt, eine gewisse Curve darstellt. Der Zusammenhang dieser fruchtbaren Methode mit der geometrischen Analyse (der Rechnung mit Puncten, Linien u. s. w.) läfst sich nicht deutlich machen, ohne die Additionsgesetze und die Gesetze der Beziehung zwischen der Multiplication und Addition für räumliche Gröfsen darzustellen; was hier zu weit führen würde. Ich verlasse daher hier ganz den Weg der geometrischen Analyse, und leite auch den Begriff der höheren Projectivität unabhängig von der früheren Darstellung ab, um dann am Schlusse die Identität beider Begriffsbestimmungen nachzuweisen.

Es seien A und B Functionen zweier Variabeln x und y, und zwar beide vom $n$ten Grade: so werden, in Bezug auf irgend ein Coordinatensystem, zu welchem x und y die Coordinaten eines veränderlichen Punctes sind, die Gleichungen $A=0$ und $B=0$ zwei Curven $n$ter Ordnung darstellen. Umgekehrt: sind statt jener Functionen die Curven selbst gegeben, so sind dadurch die Functionen, mit Ausnahme eines noch willkürlich zu wählenden Factors, bestimmt. Ferner ist bekannt, dafs die Gleichung

$$(1.)\quad \alpha A+\beta B=0,$$

wo α und β constant sind, eine Curve von gleichem Grade darstellt, welche durch diejenigen n^2 Puncte geht, in denen sich A und B schneiden, und welche (wenn nicht α oder β Null ist) aufser diesen Puncten keinen Punct mit A

oder B gemein hat. Eben so ist bekannt und ergiebt sich, wie Jenes, unmittelbar aus der Gleichung (1.), dafs wenn α die Anzahl der Puncte ist, durch welche drei Curven A, B, C einzeln genommen bestimmt werden, und wenn diese drei Curven dieselben $\alpha-1$ Puncte gemein haben, dann auch jeder Punct, welcher zweien derselben gemein ist, zugleich in der dritten liegt. Wir wollen die ganze Schaar der durch (1.) dargestellten Curven einen *Curvenbüschel nter Ordnung* nennen. Sind die Functionen A und B gegeben, so ist zu jedem Verhältnifs von α und β die zugehörige Curve (1.) bestimmt; und umgekehrt: durch jede Curve, welche durch die n^2 Durchschnittspuncte geht, oder durch einen Punct dieser Curve, der nicht zu jenen n^2 Puncten gehört, ist es das Verhältnifs von α zu β. Sind nicht A und B selbst, sondern nur die durch sie dargestellten Curven gegeben, und ist aufserdem zu einem bestimmten Verhältnifs von α zu β ein Punct der Curve (1.) gegeben, der aber weder in A noch in B liegt, so ist dadurch zugleich das Verhältnifs der entsprechenden Coëfficienten in A und B und zu jedem Verhältnifs von α zu β die Curve bestimmt. Man kann also aufser den durch A und B dargestellten Curven noch eine, durch ihre n^2 Durchschnittspuncte gehende Curve von derselben Ordnung willkürlich annehmen und die willkürlichen Factoren der Functionen A und B so bestimmen, dafs die Curve etwa durch die Gleichung

$$(2.)\quad A+B=0$$

dargestellt wird. Dann ist mittels dieser drei Curven zu jedem Verhältnifs von α und β die zugehörige Curve bestimmt; und umgekehrt. Alle diese Beziehungen gelten natürlich auch, wenn x und y Liniencoordinaten und also $A, B, C\dots$ Curven $n$ter Classe sind; nur dafs man dann statt der Puncte Linien zu setzen hat; und umgekehrt. Wir wollen dann die Schaar der durch (1.) dargestellten Curven eine *Curvenreihe nter Classe* nennen. Die Curvenreihe erster Classe ist dann eine punctirte Gerade. Nimmt man nun, aufser den Curven, deren Gleichungen $A=0$, $B=0$, $A+B=0$ sind, zwei Curven $m$ter Ordnung (oder $m$ter Classe) an, deren Gleichungen $A_1=0$ und $B_1=0$ sind, und eine dritte Curve $m$ter Ordnung (oder $m$ter Classe), die durch die m^2 Durchschnittspuncte der ersteren geht (oder von den m^2 gemeinschaftlichen Tangenten der ersteren berührt wird), bestimmt die willkürlichen Factoren der Functionen A_1 und B_1 so, dafs die Gleichung der dritten Curve

$$A_1+B_1=0$$

ist, und setzt endlich je zwei Curven, die durch die Gleichungen

$$(3.)\quad \alpha A+\beta B=0 \quad\text{und}\quad \alpha A_1+\beta B_1=0$$

(mit demselben Verhältnifs von α zu β) bestimmt sind, einander entsprechend: so nennen wir *jenen* Curvenbüschel $n$ter Ordnung (oder jene Curvenreihe $n$ter Classe) und *diesen* $m$ter Classe, zu einander *projectivisch*. Es ergiebt sich hieraus sogleich folgender Satz:

„Die projectivische Beziehung zweier Gebilde (Curvenbüschel oder Curvenreihen) wird durch drei Paare entsprechender Curven bestimmt; d. h. man kann drei solche Paare willkürlich setzen; aber dann ist zu jeder vierten Curve des einen Gebildes die entsprechende des projectivischen Gebildes bestimmt."

Ferner:

„Wenn zwei Gebilde einem dritten projectivisch sind, so sind sie es auch untereinander."

Den *Durchschnitt* zweier projectivischer Curvenbüschel, d. h. die Gesammtheit der Durchschnittspuncte ihrer entsprechenden Curven, erhält man sogleich, wenn man in den beiden Gleichungen (3.) das selbe x und y annimmt und α und β eliminirt. Dies giebt die Gleichung

$$(4.)\quad A_1B-AB_1=0,$$

als Gleichung des Durchschnitts. Da diese Gleichung vom $(m+n)$ten Grade ist, so erhalten wir den Satz:

„Der Durchschnitt eines Curvenbüschels $m$ter und eines $n$ter Ordnung ist eine Curve $(m+n)$ter Ordnung."

Um auch umgekehrt die projectivische Erzeugung einer beliebigen Curve $n$ter Ordnung, d. h. ihre Erzeugung mittels des gegenseitigen Durchschneidens projectivischer Büschel darzustellen, bedarf es noch einiger Hülfssätze, deren Beweis ich der Übersichtlichkeit wegen hier folgen lassen werde. Es gründen sich diese Sätze auf dem bekannten Satze, dafs eine Curve $n$ter Ordnung durch $\frac{1}{2}.n(n+3)$ Puncte bestimmt wird, und auf der Formel

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)+\tfrac{1}{2}n(n+3)+mn=\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+3).$$

Wir wollen die Curven $m$ter Ordnung mit A, $A_1, \ldots$, die $n$ter mit B, $B_1, \ldots$ und die $(m+n)$ter mit C bezeichnen, und die Anzahl der Puncte, durch welche diese Curven beziehlich bestimmt werden, mit a, b, c; dann wird die obige Formel zu

$$a+b+mn=c.$$

Stellt man sich nun, Dies vorausgesetzt, durch die Curve C zwei Curven A und B gelegt vor, deren mn gegenseitige Durchschnitte in C liegen, so schneidet

die erstere die C noch in m^2, die letztere noch in n^2 Puncten. Durch $a-1$ jener m^2 und durch $b-1$ dieser n^2 Puncte lege man beziehlich die Curven ($m$ter und $n$ter Ordnung) A_1 und B_1, so dafs sie sich auf einem Puncte der Curve C begegnen. Fasset man dann A und B_1 zu einer Curve $(m+n)$ter Ordnung zusammen, und eben so A_1 und B, so haben die drei Curven $(m+n)$ter Ordnung C, AB_1 und A_1B folgende Puncte gemein:

1) Die mn Puncte in A, B, C,
2) Die $a-1$ Puncte in A, A_1, C,
3) Die $b-1$ Puncte in B, B_1, C,
4) Den einen Punct in A_1, B_1, C.

Also haben sie im Ganzen $mn+a+b-1=c-1$ Puncte gemein, und folglich liegen auch die Durchschnitte von je zweien der drei Curven zugleich auf der dritten: also liegen auch auf C die m^2 Durchschnitte von A und A_1, die n^2 Durchschnitte von B und B_1 und die mn Durchschnitte von A_1 und B_1. Hiedurch ist folgender Satz bewiesen:

„Wenn man durch mn Puncte einer Curve $(m+n)$ter Ordnung C, eine „Curve $m$ter Ordnung A und eine Curve $n$ter Ordnung B legt (vorausge- „setzt, dafs Dies möglich sei): so schneidet *jene* die Curve C aufserdem „noch in denjenigen m^2 Puncten, durch welche sich eine bewegliche Curve „$m$ter Ordnung A_1 legen läfst, und *diese* in denjenigen n^2 Puncten, durch „welche sich eine bewegliche Curve $n$ter Ordnung B_1 legen läfst; und wenn „von den gegenseitigen Durchschnittspuncten dieser beiden beweglichen „Curven A_1 und B_1 einer auf der Hauptcurve C liegt, so liegen auch ihre „sämmtlichen übrigen $mn-1$ Durchschnittspuncte auf dieser Curve."

Für $m=1$ läfst sich dieser Satz in folgender Form aussprechen:

„Wenn man durch eine Curve $(n+1)$ter Ordnung C, eine Gerade, „und durch n ihrer Durchschnitte mit C eine Curve $n$ter Ordnung legt, „so schneidet dieselbe die Hauptcurve C in den n^2 Puncten, durch welche „sich eine bewegliche Curve $n$ter Ordnung legen läfst. Die bewegliche „Curve schneidet die Hauptcurve aufserdem in n Puncten, welche in einer „beweglichen, um einen festen Punct der Hauptcurve rotirenden Gera- „den liegen."

Ganz auf entsprechende Weise läfst sich der Satz für $m=2$ ausdrücken. Ist hingegen m gröfser als 2, so läfst sich nicht mehr allgemein durch mn Puncte der Curve eine Curve $n$ter Ordnung legen; weshalb man dann auf die ursprüngliche Fassung zurückgehen mufs.

Hieraus ergiebt sich nun unmittelbar die projectivische Erzeugbarkeit aller algebraischer Curven; namentlich mittels eines Curvenbüschels und eines Strahlenbüschels. In der That: ist eine Curve $(n+1)$ter Ordnung C gegeben, welche projectivisch erzeugt werden soll, so lege man durch sie eine beliebige Gerade A hindurch. Durch n ihrer Durchschnittspuncte mit C lege man eine Curve $n$ter Ordnung B hindurch; durch die n^2 Puncte, in welchen diese die Curve C aufserdem noch schneidet, lege man zwei Curven $n$ter Ordnung B_1 und B_2, welche nach dem so eben bewiesenen Satze die Hauptcurve noch in je n Puncten schneiden, die in zwei geraden Linien liegen. Diese geraden Linien, welche wir A_1 und A_2 nennen wollen, treffen nach demselben Satze die Gerade A in demjenigen Puncte, in welchem sie die Curve C noch zum $(n+1)$ten Male schneidet. Setzt man nun die Curven B, B_1, B_2 beziehlich mit den Geraden A, A_1, A_2 als einander entsprechende Elemente zweier projectivischer Büschel, so ist dadurch die projectivische Beziehung dieser Büschel bestimmt, und ihr Durchschnitt ist eine Curve $(n+1)$ter Ordnung, welche mit C die n^2 Mittelpuncte des Curvenbüschels $n$ten Grades, den Mittelpunct des Strahlenbüschels und die $3n$ Durchschnitte der entsprechenden Elemente, also im Ganzen $(n+1)^2+n$ Puncte gemein hat, folglich mit C zusammenfällt. Hierdurch ist dann die projectivische Erzeugung von C dargestellt.

Durch diese projectivische Erzeugbarkeit der höheren Curven aus niederen hat man also ein Mittel gewonnen, um von den geraden Linien aus, auf rein geometrische Weise die sämmtlichen algebraischen Curven zu erzeugen; und es wäre möglich, auf dieser Erzeugungsweise eine rein geometrische Theorie dieser Curven aufzubauen; wie denn auch in jener Erzeugungsweise eine rein geometrische Definition aller algebraischen Curven von den verschiedenen Ordnungen unmittelbar enthalten ist.

Um die höhere Projectivität noch unmittelbarer auf geometrische Construction zu gründen, gehe ich auf die höhere *Perspectivität* zurück; werde jedoch hier nur die Perspectivität zwischen Gebilden $n$ten und ersten Grades ins Auge fassen. Ich nenne einen Curvenbüschel $n$ter Ordnung mit einer Geraden A *perspectivisch,* wenn von den n^2 Mittelpuncten des erstern $n-1$ in A liegen und jeder Curve jenes Büschels ihr $n$ter Durchschnittspunct mit A entspricht; das Entsprechende setze ich für die reciproken Gebilde. Es ist dann zuerst nachzuweisen, dafs die *Perspectivität* nur eine besondere Art der *Projectivität* ist, d. h. dafs je zwei perspectivische Gebilde auch pro-

jectivisch sind. Es sei zu dem Ende ein Curvenbüschel $n$ter Ordnung gegeben, von dessen n^2 Mittelpuncten $n-1$ in der Geraden A liegen. Es sei A zur Abscissen-Axe eines Coordinatensystems genommen und die Abscissen jener $n-1$ Puncte seien $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$. Es seien ferner zwei Curven des Büschels angenommen, und die Abscissen der Puncte, worin jene Curven die Gerade A zum $n$ten Male schneiden, seien beziehlich b und b_1. Dann sind, wenn man das Product $(x-a_1)(x-a_2)\ldots.(x-a_{n-1})$ durch C bezeichnet und unter D und D_1 ganze Functionen von x und y versteht, die Gleichungen der beiden Curven von der Form

$$B = C(x-b)+yD = 0,$$
$$B_1 = C(x-b_1)+yD_1 = 0.$$

Hierauf geht die Gleichung $\alpha B+\alpha_1 B_1=0$ in

$$C\Big(x-\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}\Big)+y\frac{\alpha D+\alpha_1 D_1}{\alpha+\alpha_1} = 0$$

über. Es geht also die durch diese Gleichung dargestellte Curve durch einen Punct von A, dessen Abscisse $\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}$ ist. Es ist aber nunmehr nach dem Begriffe der Projectivität zu zeigen, dafs, wenn man die drei Puncte, deren Abscissen b, b_1 und $\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}$ sind, als Curven erster Classe ansieht, zwischen ihren Gleichungen die entsprechende Beziehung Statt finde. Um nichts im Beweise zu übergehen, wollen wir auch Dies noch nachweisen. Die Gleichung $x'x+y'y+1=0$ ist, wenn x und y Punctcoordinaten und x' und y' constant sind, die Gleichung einer geraden Linie. Man nennt dann x' und y' bekanntlich die Coordinaten (Liniencoordinaten) dieser Linie. Sind jetzt x und y constant, so ist jene Gleichung die durch Liniencoordinaten ausgedrückte Gleichung des Puncts, dessen (Punct-) Coordinaten x und y sind. Also ist die Gleichung des Puncts, dessen Abscisse b oder b_1 ist,

$$x'b+1 = 0,$$
$$x'b_1+1 = 0;$$

mithin giebt das αfache der ersten, zu dem βfachen der zweiten addirt, die Gleichung

$$x'.\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}+1 = 0,$$

als die Gleichung des Puncts, dessen Abscisse $\frac{\alpha b+\alpha_1 b_1}{\alpha+\alpha_1}$ ist, d. h. des Durchschnittspuncts der Curve $\alpha B+\alpha_1 B_1 = 0$ mit der Geraden A. Also sind

die Curven jenes Büschels denjenigen Puncten der Geraden A projectivisch entsprechend, in welchen die Geraden von den Curven zum $n$ten Male geschnitten werden; oder, da das Nämliche auch reciprok gilt:

„Zwei *perspectivische* Gebilde sind zugleich einander *projectivisch*."

Will man nun eine beliebige Curve $(n+1)$ter Ordnung Ω perspectivisch erzeugen, so lege man (Fig. 7.) A und B durch sie hin. Durch n Durchschnittspuncte von A und Ω und durch $n-1$ Durchschnittspuncte von B und Ω lege man eine Curve $n$ter Ordnung Γ_1 hin. Dies ist allemal möglich, da $\frac{1}{2}n(n+3)-n-(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ immer positiv ist. Dann sind die n^2 Puncte, in welchen die Curve Γ_1 die gegebene Curve Ω, aufser in den n Puncten, in A noch schneidet, solche Puncte, die sich als Mittelpuncte eines Curvenbüschels $n$ter Ordnung setzen lassen; und zwar liegen $n-1$ derselben in einer Geraden, nämlich in B. Die Gerade B möge die Curve Γ_1 zum $n$ten Male in p_1 schneiden und die Curve Ω zum $n$ten und $(n+1)$ten Male in p_2 und p_3. Ferner sei der Punct, in welchem die Gerade A die Curve Ω zum $(n+1)$ten Male schneidet, k. Sind nun Γ_2, Γ_3 die Curven jenes Büschels, welche durch p_2 und p_3 gehen, so schneiden diese nach dem oben bewiesenen Satze die Geraden p_2k und p_3k beziehlich in je n Puncten, welche zugleich in der Curve Ω liegen. Setzt man also die drei Curven Γ_1, Γ_2, Γ_3 beziehlich den drei Geraden A, p_2k, p_3k projectivisch entsprechend, so hat der Durchschnitt jenes Curvenbüschels und dieses Strahlenbüschels um k, die n^2 Mittelpuncte des erstern, den einen Mittelpunct des letztern und die $3n$ Puncte in A, p_2k, p_3k mit der Curve Ω gemein, also im Ganzen $(n+1)^2+n$ Puncte; mithin fällt dieser Durchschnitt, da er zugleich eine Curve $(n+1)$ter Ordnung ist, mit Ω zusammen, und folglich ist Ω als Durchschnitt erzeugt. Will man auch die Strahlen des Strahlenbüschels durch Construction erzeugen, so hat man nur durch einen der Puncte p_2, oder p_3, z. B. durch p_3, eine beliebige Gerade D zu legen, den Durchschnittspunct von D und A mit p_1, und k mit p_2 zu verbinden, durch den Durchschnittspunct dieser beiden Verbindungslinien, den ich c nennen will, nach demjenigen Puncte p in B, zu welchem man den entsprechenden Strahl sucht, eine Gerade zu ziehen, und durch den Durchschnittspunct q dieser Geraden und der Geraden D den Strahl kq zu ziehen: dann ist dieser der gesuchte Strahl. Denn wenn p in p_1, p_2 oder p_3 rückt, so rückt kq in die Lage von A, p_2k, p_3k, während kq dem p projectivisch entsprechend ist. Ich will hier noch bemerken, dafs, wenn x den variablen Punct darstellt, der die Curve Ω beschreibt, und man die von mir in den

früheren Aufsätzen angewandte Bezeichnung festhält, den Punct p aber, in welchem die Curve Γ des Curvenbüschels die Gerade B schneidet, als Function des Punctes x setzt, in der Art, dafs, wenn x in der Curve Γ liegt, p den $n$ten Durchschnitt von Γ mit B darstellt: dafs dann die Gleichung der Curve Ω folgende ist:

$$pcDkx = 0.$$

Denn diese Gleichung drückt aus, dafs, wenn der Punct, in welchem pc die Gerade D schneidet, mit k verbunden wird, diese Gerade durch x, d. h. durch einen Punct von Γ geht; also stellt dann x den Durchschnitt dieser Geraden mit Γ, also den Durchschnitt des Curvenbüschels und des Strahlenbüschels, folglich die Curve Ω dar. Ich werde auf dies interessante Resultat in einem späteren Aufsatze zurückkommen.

Es bleibt mir noch übrig, die Übereinstimmung des hier gegebenen Begriffs der Projectivität mit dem früher gegebenen darzustellen. Der Begriff der höheren Projectivität wurde dort abhängig gemacht von einem planimetrischen Producte zweier gerader Linien oder zweier Puncte, von denen der eine Factor von dem variablen Puncte x abhängig, der andere constant war. Ich will hier nur den Fall betrachten, wo das Product aus zwei Puncten besteht; woraus der andere Fall durch Reciprocität von selbst hervorgeht. Dann sei der von x abhängige Punct p, der constante a, und $A, B, C, \ldots$ seien gerade Linien, die durch den Punct a gehen. Dann entsprechen nach der dortigen Definition den Curven $pA = 0$, $pB = 0$, $pC = 0, \ldots$ die Geraden $A, B, C, \ldots$ Nun seien in Bezug auf irgend ein Coordinatensystem x_1, x_2 die Coordinaten des variablen Puncts x, und p_1 und p_2 die von p, und die Gleichungen der Geraden A und B seien

$$A' = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 = 0$$

und

$$B' = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 = 0.$$

Dann ist die Gleichung jeder andern Geraden C, die durch den Durchschnitt von A und B geht,

$$\alpha A' + \beta B' = 0,$$

d. h.

$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)x_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)x_2 + \alpha\alpha_3 + \beta\beta_3 = 0.$$

Nun drücken die Gleichungen $pA = 0$, $pB = 0$, $pC = 0$ aus, dafs der Punct p in der Geraden A, oder B, oder C liege, d. h., dafs p_1 und p_2, statt

x_1 und x_2 gesetzt, den Gleichungen dieser Geraden genüge. Man hat also

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 = 0,$$
$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 = 0,$$
$$(\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1) p_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2) p_2 + \alpha\alpha_3 + \beta\beta_3 = 0.$$

Die letztere Gleichung können wir auch so schreiben:

$$\alpha(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3) + \beta(\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3) = 0.$$

Sie ist die Gleichung der Curve, welche nach jener Definition der durch die Gleichung

$$\alpha A' + \beta B' = 0$$

dargestellten Geraden entspricht. Durch diese beiden Gleichungen war aber der Begriff der Projectivität, wie wir ihn in diesem Aufsatze gegeben haben, bestimmt: also ist die Übereinstimmung beider Begriffe nachgewiesen.

Stettin, im Juli 1850.

22.

Nachtrag zu dem zweiten Abschnitte der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (S. Band 26, 30, 34 u. 36 dieses Journals.)

(Von Herrn Dr. *L. Oettinger*, ord. öffentl. Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. Br.)

---

§. 49.

Nachtrag zu §. 10 und 11.

In einer Urne sind n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man nimmt p Kugeln einzeln heraus, betrachtet die aufgeschriebenen Zahlen und legt die Kugeln in die Urne zurück. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel mit der auf ihr stehenden Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

Die Zahl der günstigen Fälle stimmt, wie leicht zu sehen, mit der Anzahl der Stellen-Elemente überein, welche entstehen, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen aus n Elementen zur $p$ten Classe bildet. Bezeichnet man die Gruppen-Anzahl dieser Stellen-Elemente bei den Versetzungen mit Wiederholungen, nach Analogie der Stellen-Elemente bei den Versetzungen ohne Wiederholungen (Combinationslehre §. 43.), durch

$$St'([a_1, a_2, a_3, \dots a_n]^p,$$

so wird ihre Gruppenzahl auf eine ähnliche Weise wie jene und zwar auf folgende Weise gefunden.

Die Zahl der Gruppen, in welchen je ein Element auf der Stelle, welches seine Stellenzahl angiebt, erscheinen kann, ist p. Vor und nach ihm können alle Elemente in jeder möglichen Mischung auf $p-1$ Stellen erscheinen. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ist

$$\frac{p}{1} n^{p-1}.$$

Diese Zählungsart führt jedoch zu viele Gruppen auf; denn es trifft sich, dafs auflösende Gruppen unter zwei Elementen zugleich, also *zweimal* gezählt werden, während sie nur einmal gezählt werden sollten. Es müssen daher alle Gruppen ausgeschieden werden, in welchen die Stellen-Elemente paarweise zusammentreten können. Ihre Zahl ist, da keine Versetzungen

möglich sind, $\frac{p(p-1)}{1.2}$. Vor und nach diesen Gruppen können alle Elemente, in jeder möglichen Mischung, auf $p-2$ Stellen erscheinen. Die hiedurch bedingte und auszuscheidende Gruppenzahl ist also $\frac{p(p-1)}{1.2}n^{p-2}$. Fährt man in dieser Zählungsweise durch allmäliges weiteres Ausscheiden fort, so ergiebt sich folgende Zahl günstiger Gruppen:

$$(1.)\quad St'[a_1, a_2, \ldots . a_n]^p = pn^{p-1} - (p)_2 n^{p-2} + (p)_3 n^{p-3} - (p)_4 n^{p-4} + \ldots .$$

Die Reihe bricht ab, wenn ein Glied in 0 übergeht. Diese Gruppenzahl läfst sich auch auf das Binomium zurückführen und wie folgt darstellen:

$$(2.)\quad St'[a_1, a_2, \ldots . a_n]^p = n^p - [n^p - pn^{p-1} + (p)_2 n^{p-2} - (p)_3 n^{p-3} + \ldots .]$$
$$= n^p - (n-1)^p = \varDelta(n-1)^p.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn Nr. 1 oder 2 durch die Zahl aller möglichen Fälle n^p dividirt wird. Man erhält

$$(3.)\quad w = \frac{p}{n} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.n^4} + \ldots .$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p = \frac{\varDelta(n-1)^p}{n^p}.$$

Die Wahrscheinlichkeit wird um so gröfser, je gröfser n und p sind; denn $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p$ nähert sich in diesem Falle der Null mehr und mehr. In Nr. 3 kann höchstens $p = n$ werden. Man kann daher fragen: wie viele Ziehungen sind nöthig, um bei einer bestimmten Zahl von Kugeln einen gewissen Grad der Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dafs wenigstens eine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde? Zu dem Ende hat man x aus der Gleichung

$$w = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^x$$

zu entwickeln. Setzt man $w = \frac{r}{s}$, so ist

$$(4.)\quad x = \frac{\log\left(1 - \frac{r}{s}\right)}{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{\log s - \log(s-r)}{\log n - \log(n-1)}.$$

Der Grad der Wahrscheinlichkeit x ist übrigens, wie sich leicht erkennen läfst, in bestimmte Grenzen eingeschlossen.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe unter den oben angegebenen Bedingungen zusam-

mentreffen werde, ist

$$(5.)\quad w = 1-\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{1.2.n^2}-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3}+\cdots\cdots = \left(1-\frac{1}{n}\right)^p.$$

Zugleich ergiebt sich aus (5.) die Zahl der Gruppen bei den Versetzungen mit Wiederholungen, wo kein Element auf seiner Stelle erscheint. Sie ist

$$(6.)\quad St'[0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n]^p$$
$$= n^p-pn^{p-1}+(p)_2n^{p-2}-(p)_3n^{p-3}+\cdots\cdots = (n-1)^p.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs in p Ziehungen gerade r Kugeln (nicht mehr und nicht weniger) mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden?

Die Zahl der Gruppen, in welchen gerade r Elemente zugleich an ihrer Stelle erscheinen, ist $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots.(p-r+1)}{1.2.3\ldots.r}$. Aufser diesen dürfen auf den übrigen $(p-r)$ Stellen keine Stellen-Elemente vorkommen. Um die Zahl der günstigen Fälle zu finden, mufs in (6.) $p-r$ statt p gesetzt und der gefundene Ausdruck mit $(p)_r$ verbunden werden. Dann ist die fragliche Gruppenzahl:

$$(7.)\quad St'[r;\ a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_n]^p = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots.(p-r+1)}{1.2.3\ldots.r}(n-1)^{p-r}$$

und die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$(8.)\quad w = \frac{p(p-1)\ldots.(p-r+1)}{1.2\ldots.rn^r}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r}.$$

Die Bedingungen sind wie oben. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln mit den aufgeschriebenen Zahlen in der Ziehungsreihe zusammentreffen werden?

Die Zahl der günstigen Fälle ergiebt sich, wenn man aus (7.) die Zahl der Gruppen nimmt, in welchen gerade $r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots.\ p$ Elemente an ihrer Stelle erscheinen. Man erhält sie, wenn in (7.) allmälig $r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots.\ p$ statt r gesetzt wird. Demnach ist

$$St'[r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots.\ p;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_n]^p$$
$$= (p)_r(n-1)^{p-r} = (p)_r\left[n^{p-r}-\frac{p-r}{1}n^{p-r-1}+\frac{(p-r)(p-r-1)}{1.2}n^{p-r-2}-\ldots\right]$$
$$+(p)_{r+1}(n-1)^{p-r-1} = (p)_{r+1}\left[n^{p-r-1}-\frac{p-r-1}{1}n^{p-r-2}+\frac{(p-r-1)(p-r-2)}{1.2}n^{p-r-3}-\ldots\right]$$
$$+(p)_{r+2}(n-1)^{p-r-2} = (p)_{r+2}\left[n^{p-r-2}-\frac{p-r-2}{1}n^{p-r-3}+\frac{(p-r-2)(p-r-3)}{1.2}n^{p-r-4}-\ldots\right]$$

. . . .

Ordnet man diese Darstellung nach den Potenzen von n, so ergiebt sich

$$(p)_{r+1}\left(1-\frac{r+1}{1}\right)n^{p-r-1} = -(p)_{r+1}\frac{r}{1}n^{p-r-1}$$

$$(p)_{r+2}\left(1-\frac{r+1}{1}+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}\right)n^{p-r-2} = (p)_{r+2}\frac{r(r+1)}{1.2}n^{p-r-2},$$

$$(p)_{r+3}\left(1-\frac{r+1}{1}+\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}-\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}\right)n^{p-r-3} = -(p)_{r+3}\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}n^{p-r-3}$$

u. s. w.

Die Zahl der günstigen Fälle läfst sich daher auch so darstellen:

$$(9.)\quad St'[r,\ r+1,\ r+2,\ \ldots.\ p;\ a_1,\ a_2,\ \ldots.\ a_n]^p$$

$$= (p)_r n^{p-r} - (p)_{r+1}\frac{r}{1}n^{p-r-1} + (p)_{r+2}\frac{r(r+1)}{1.2}n^{p-r-2} - (p)_{r+3}\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}n^{p-r-3} + \ldots.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist demnach

$$(10.)\quad w = \left[\frac{(p)_r}{(n-1)^r}+\frac{(p)_{r+1}}{(n-1)^{r+1}}+\frac{(p)_{r+2}}{(n-1)^{r+2}}+\ldots.\right]\left(1-\frac{1}{n}\right)^p$$

$$= \frac{(p)_r}{n^r}\left[1-\frac{(p-r)r}{(r+1)n}+\frac{(p-r)(p-r-1)r}{1.2(r+2)n^2}-\frac{(p-r)(p-r-1)(p-r-2)r}{1.2.3(r+3)n^3}+\ldots.\right]$$

$$= \frac{p(p-1)\ldots.(p-r+1)}{1.2\ldots.(r-1)n^r}\int_0^1 x^{r-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-r}\partial x.$$

Setzt man in (10.) $s+1$ statt r, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs höchstens s Kugeln mit den ihnen aufgeschriebenen Zahlen übereinstimmen werden,

$$(11.)\quad w = 1-\frac{(p)_{s+1}}{n^{s+1}}\left[1-\frac{(p-s-1)(s+1)}{(s+2)n}+\frac{(p-s-1)(p-s-2)(s+1)}{1.2(s+3)n^2}-\ldots.\right]$$

$$= 1-\frac{(p)_{s+1}}{n^{s+1}}(s+1)\int_0^1 x^s\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-s-1}\partial x.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r und höchstens s Kugeln (also r, $r+1$, $r+2$, ... s) mit den auf ihnen stehenden Zahlen in der Ziehungsreihe zusammentreffen werden, ergiebt sich, wenn man $s+1$ in (10.) setzt und das Resultat von (10.) abzieht. Sie ist

$$(12.)\quad w = \frac{p(p-1)\ldots.(p-r+1)}{1.2\ldots.(r-1)n^r}\int_0^1 x^{r-1}\left(1-\frac{x}{n}\right)\partial x$$

$$-\frac{p(p-1)\ldots.(p-s)}{1.2\ldots.s.n^{s+1}}\int_0^1 x^s\left(1-\frac{x}{n}\right)^{p-s-1}\partial x.$$

In einer Urne befinden sich m Kugel-Arten, von welchen jede n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthält. p Kugeln werden einzeln heraus genommen und nach der Ziehung in die Urne zurückgelegt.

Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel mit der auf ihr geschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffe?

Man sieht leicht, dafs die Zahl der günstigen Fälle mit den Gruppen der Stellen-Elemente zusammenfällt, welche entstehen, wenn man die Versetzungen mit Wiederholungen zur $p$ten Classe aus m Elementenreihen aufstellt. Die Gruppenzahl läfst sich ganz auf die oben zu Nr. 1. angegebene Weise finden, wenn man erwägt, dafs die auflösenden Gruppen jeweils so viel mal mehr vorkommen werden, als die mit einerlei Stellenzahlen bezeichneten Elemente aus den verschiedenen Elementenreihen Versetzungen mit Wiederholungen zu der erforderlichen Classe (m^1, m^2, m^3, ...) geben können. Diesem zufolge ist die Zahl der Stellen-Elemente (günstige Gruppen-Anzahl)

$$(13.)\quad St'[a_1, a_2, \ldots. a_n;\ b_1, b_2, \ldots. b_n;\ c_1, c_2, \ldots. c_n;\ \ldots.\ m_1, m_2, \ldots. m_n]^p$$
$$= p.m(mn)^{p-1} - (p)_2 m^2 (mn)^{p-2} + (p)_3 m^3 (mn)^{p-3} - p_4 m^4 (mn)^{p-4} + \ldots.$$
$$= (mn)^p - (mn-m)^p = m^p[n^p - (n-1)^p] = m^p \Delta (n-1)^p.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn durch $(mn)^p$ die Zahl aller möglichen Fälle dividirt wird:

$$(14.)\quad w = \frac{p}{n} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} - \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{1.2.3.4.n^4} + \ldots.$$

Bleibt man bei dem eben bezeichneten Entwicklungsgange, so lassen sich leicht die nachstehenden Fragen beantworten.

Die Bedingungen sind wie vorhin. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs keine Kugel mit der aufgeschriebenen Zahl in der Ziehungsreihe zusammentreffen werde?

$$(15.)\quad w = 1 - \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{1.2.n^2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^3} + \ldots. = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs gerade r, nicht mehr und nicht weniger, mit der aufgeschriebenen Zahl zusammentreffen werden, ist

$$(16.)\quad w = \frac{(p)_r m^r . m^{p-r}(n-1)^{p-r}}{(mn)^p} = \frac{(p)_r}{n^r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-r} = \frac{(p)_r}{(n-1)^r}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^p.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens r Kugeln auf ihrer Stelle erscheinen werden, ist

$$(17.)\quad w = \frac{1}{n^r}\left[(p)_r\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r} + (p)_{r+1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r-1} + (p)_{r+2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p-r-2} + \ldots\right]$$
$$= \frac{(p)_r}{n^r}\left[1 - \frac{(p-r)r}{(r+1)n} + \frac{(p-r)(p-r-1)r}{1.2.(r+2)n^2} - \frac{(p-r)(p-r-1)(p-r-2)r}{1.2.3.(r+3)n^3} + \ldots\right]$$
$$= \frac{p(p-1)\ldots.(p-r+1)}{1.2\ldots.(r-1)n^r}\int_0^1 x^{r-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{p-r} \partial x.$$

Man sieht aus der Vergleichung von (3. und 14), (5. und 15.), (8. und 16.), (10. und 17.), dafs die vorgelegten Fragen, obgleich von wesentlich verschiedenen Bedingungen ausgehend, doch zu einerlei Resultat führen.

An die bisher aufgestellten Gleichungen knüpft sich die Beantwortung folgender Probleme aus der Combinationslehre.

Werden die Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementenreihen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n;\ b_1, b_2, b_3, \ldots b_n;\ c_1, c_2, c_3, \ldots c_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m_n$ zur $p$ten Classe gebildet, so ist die Zahl der Gruppen, in welchen kein Stellen-Element erscheint,

$$(18.)\quad St'[0;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= (mn)^p - pm(mn)^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}m^2(mn)^{p-2} - \cdots = m^p(n-1)^p,$$

und diejenige, worin gerade r Stellen-Elemente erscheinen,

$$(19.)\quad St'[r;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m_n]^p$$
$$= \frac{p(p-1)\ldots(p-r+1)}{1.2\ldots r}m^p(n-1)^{p-r};$$

ferner diejenige, worin wenigstens r Stellen-Elemente erscheinen,

$$(20.)\quad St'[r, r+1, \ldots p;\ a_1, a_2, \ldots a_n;\ b_1, b_2, \ldots b_n;\ \ldots m_1, m_2, \ldots m^r]^p$$
$$= (p)_r m^p\left[n^{p-r} - (p-r)\frac{rn^{p-r-1}}{r+1} + (p-r)_2\frac{rn^{p-r-2}}{r+2} - (p-r)_3\frac{rn^{p-r-3}}{r+3} + \cdots\right].$$

In jeder von k Urnen sind n mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthalten. Man zieht allmälig alle Kugeln aus jeder Urne. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs wenigstens eine Kugel in der Ziehungsreihe mit der darauf geschriebenen Zahl zusammentreffe?

Das fragliche Ereignifs kann entweder bei dem Ziehen der Kugeln aus der ersten Urne, oder, wenn es nicht geschieht, bei dem Ziehen aus der zweiten, dritten etc. eintreffen. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit des Zutreffens nach (2. §. 10.) durch

$$w_1 = 1 - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \cdots (-1)^{n-1}\frac{1}{1.2\ldots n}$$

und die entgegengesetzte durch $w_2 = 1 - w_1$, so ergiebt sich für die fragliche Wahrscheinlichkeit:

$$(21.)\quad w = w_1 + w_2 w_1 + w_2^2 w_1 + w_2^3 w_1 + \cdots w_2^{k-1} w_1 = w_1\frac{w_2^k - 1}{w_2 - 1}$$
$$= w_1\frac{1 - w_2^k}{1 - w_2} = 1 - w_2^k.$$

Dies Nämliche gilt auch für den Fall, wenn in jeder Urne m Arten von Kugeln enthalten sind, welche die genannten Zahlen zur Aufschrift haben. Die Werthe von w_1 und w_2 sind dann aus (2. §. 11.) einzuführen.

Die Bedingungen sind wie vorhin. Man zieht aus jeder Urne gleichzeitig eine Kugel, ohne die gezogene Kugel in die Urne zurückzulegen, und fährt so fort, bis p Kugeln aus jeder Urne gezogen sind. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs alle, gleichzeitig in einer Ziehung erscheinenden Kugeln die nämliche Zahl haben, und dafs diese Zahl mit der Ordnungszahl in der Ziehungsreihe zusammentreffe?

Die Zahl der günstigen Fälle findet sich ganz nach der zu Nr. 1. angegebenen Schlufsweise. Das gleichzeitige Zusammentreffen von je k gleichbezeichneten Kugeln aus allen Urnen vermehrt die Zahl der günstigen Fälle nicht. Es giebt immer nur eine Art, wie Dies geschehen kann. Demnach giebt es p günstige Fälle, die sich mit den Versetzungen ohne Wiederholungen auf den übrigen Stellen verbinden können. Die hiedurch bedingte Gruppenzahl ist $p[(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)]^k$. Hievon sind nun diejenigen Gruppen auszusondern, in welchen das Zusammentreffen paarweise Statt findet. Sie sind

$$\frac{p(p-1)}{1.2}[(n-2)(n-3)\ldots.(n-p+1)]^k$$

u. s. w. Die Fortsetzung dieser Schlüsse giebt folgende Zahl der günstigen Gruppen:

$$22.\quad St'[a_1, a_2, \ldots. a_n;\ b_1, b_2, \ldots. b_n;\ \ldots.\ k_1, k_2, \ldots. k_n]^{p,p,p,\ldots.}$$
$$= p[(n-1)^{p-1|-1}]^k - (p)_2[(n-2)^{p-2|-1}]^k + (p)_3[(n-3)^{p-3|-1}]^k - \ldots.$$

Wird $[n(n-1)\ldots.(n-p+1)]^k$ durch die Zahl aller möglichen Fälle dividirt, so ergiebt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit, und man erhält

$$23.\quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)}{1.2[n(n-1)]^k} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^k} - \ldots.$$

Werden alle Kugeln aus jeder Urne gezogen, so ist

$$24.\quad w = \frac{1}{n^{k-1}} - \frac{1}{1.2[n(n-1)]^{k-1}} + \frac{1}{1.2.3[n(n-1)(n-2)]^{k-1}} - \ldots.$$

Die nämliche Frage läfst sich stellen, wenn in jeder Urne mehrere gleich bezeichnete Kugel-Arten (m) vorhanden sind und p Kugeln einzeln und gleichzeitig aus jeder Urne gezogen werden, ohne dafs man die gezogene Kugel in die Urne zurücklegt. Die Zahl der günstigen Fälle wird durch die gleiche Schlufsweise, wie vorhin, gefunden; wobei jedoch zu bemerken ist,

dafs die Zahl der auflösenden Gruppen zunimmt, indem in jeder Urne m Kugel-Arten vorhanden sind, von denen jede die entsprechenden Elemente liefert. Die Zahl der günstigen Gruppen ist

$$25.\quad A = pm^k[(mn-1)^{p-1|-1}]^k - (p)_2 m^{2k}[(mn-2)^{p-2|-1}]^k + (p)_3 m^{3k}[mn-3)^{p-3|-1}]^k - \dots.$$

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, durch Dividiren mit $[(mn)^{p|-1}]^k$,

$$26.\quad w = \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)m^{2k}}{1.2[mn(mn-1)]^k} + \frac{p(p-1)(p-2).m^{3k}}{1.2.3[mn(mn-1)(mn-2)]^k} - \dots.$$

Werden unter den nämlichen Bedingungen aus k Urnen, von welchen jede n, mit den Zahlen 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugeln enthält, je p Kugeln einzeln und gleichzeitig gezogen, wird stets die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt, und fragt man, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs wenigstens einmal alle gleichzeitig gezogenen Kugeln die gleiche, mit der Ziehungsreihe übereinstimmende Zahl zeigen, so findet sich für die dem Ereignifs günstige Gruppenzahl:

$$\begin{aligned}27.\quad & St'[a_1, a_2, \dots a_n;\ b_1, b_2, \dots b_n;\ \dots k_1, k_2, \dots k_n|^{p,p,p,\dots} \\ &= pn^{(p-1)k} - (p)_2 n^{(p-2)k} + (p)_3 n^{(p-3)k} - \dots \\ &= n^{pk} - [n^{pk} - pn^{(p-1)k} + (p)_2 n^{(p-2)k} - \dots] = n^{pk} - (n^k-1)^p.\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergiebt sich, wenn man durch n^{pk} dividirt, und ist

$$\begin{aligned}28.\quad w &= \frac{p}{n^k} - \frac{p(p-1)}{1.2.n^{2k}} + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3.n^{3k}} - \dots \\ &= 1 - \frac{(n^k-1)^p}{n^{pk}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^p.\end{aligned}$$

Sind in jeder Urne m verschiedene, mit 1, 2, 3, ... n bezeichnete Kugelarten enthalten, wird unter den angegebenen Bedingungen je eine Kugel aus jeder Urne gezogen und Dies p mal wiederholt, so ist die Zahl der günstigen Fälle:

$$\begin{aligned}29.\quad A &= pm^k(mn)^{(p-1)k} - (p)_2 m^{2k}(mn)^{(p-2)k} + (p)_3 m^{3k}(mn)^{(p-3)k} - \dots \\ &= (mn)^{pk} - [(mn)^{pk} - pm^k(mn)^{(p-1)k} + (p)_2 m^{2k}(mn)^{(p-2)k} \dots] \\ &= (mn)^{pk} - m^{pk}(n^k-1)^p.\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist, nach den gehörigen Reductionen,

$$30.\quad w = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^k}\right)^p.$$

Sie fällt mit (28.) zusammen. Man kann, wie man sieht, auf die vorliegenden Fälle auch die Fragen ausdehnen, wie grofs die Wahrscheinlichkeit sei, dafs gerade r, oder wenigstens r Kugeln unter einander mit den aufgeschriebenen Zahlen in den p Ziehungsreihen übereinstimmen werden. Ihrer Beantwortung steht keine weitere Schwierigkeit entgegen. Zugleich sieht man, dafs die in (22. bis 30.) gefundenen Gleichungen allgemeiner sind, als die in (§. 10. und 11.) gegebenen, so wie dafs sich letztere aus jenen ableiten lassen, wenn $k = 1$ gesetzt wird; was für die Richtigkeit der hier gegebenen Gleichungen spricht.

Anmerkung. Von den in diesem Paragraph mitgetheilten Entwicklungen hat *Laplace* die Nr. 24 seiner *Théor. anal. d. prob.* p. 224 et 225 entwickelt. Sein Text und die dazu entwickelte Gleichung passen aber nicht zusammen, und seine Gleichung beantwortet eine andere als die von ihm gestellte Frage. Seine Worte sind:

„Concevons maintenant un nombre i d'urnes renfermant chacune le nombre n de boules, toutes de couleurs différentes (hier durch die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ bezeichnet) et que l'on tire successivement toutes les boules de chaque urne. On peut déterminer la probabilité, qu'une ou plusieurs boules de la même couleur sortiront au même rang dans les i tirages."

Dieses Problem fällt offenbar mit dem obigen Nr. 21 zusammen und ist, wie leicht zu sehen, von dem in (24.) beantworteten ganz verschieden. *Laplace* hat bei Stellung der Aufgabe das *gleichzeitige* Erscheinen der mit gleicher Zahl bezeichneten Kugeln (bei ihm Kugeln von gleicher Farbe) übersehen; was jedoch die hervortretende Grundbedingung in dem vorliegenden Probleme bildet. Er hätte das Problem so aufstellen sollen, wie es zu (24.) gestellt wurde.

23.

Sur la sommation des suites infinies par des intégrales définies.

(Par *W. Smaasen*, Docteur en Sciences à Utrecht.)

L'analyse ne connait qu'un petit nombre de fonctions, et il n'est pas étonnant qu'elles ne suffiseat pas dans la plupart des cas pour réprésenter les fonctions qui pourront s'offrir.

Le nombre des fonctions est infini, et sauf un nombre limité de cas, une série infinie, qui en général est l'expression d'une fonction, ne peut pas être réduite à des expressions algébriques. Un moyen puissant consiste dans l'expression des fonctions par des *intégrales définies*. C'est une question assez facile à résoudre, de réduire une intégrale définie, dont les limites sont finies, à une série convergente, mais la question *inverse* offre des difficultés assez graves. Nous devons déjà aux recherches ingénieuses de Mr. *Kummer* (Voyez le tome XVII. de ce Journal pag. 210), la connaissance de quelques méthodes, qui peuvent dans plusieurs cas méner au but proposé.

Je me suis proposé de résoudre la question suivante pour quelques cas et par une méthode directe:

„Étant donné une série: on demande d'exprimer sa somme par une inté-
„grale simple ou multiple."

Je commencerai par mettre en évidence quelques séries, dont je ferai un fréquent usage. Soit donné la série

$$fx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \text{etc.} + a_\lambda x^\lambda + \text{etc.}$$

laquelle j'écrirai

$$fx = a_0 + \Sigma a_\lambda x^\lambda,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs positives et entières de λ, depuis $\lambda = 1$ jusqu'à $\lambda = \infty$.

Je suppose alternativement

$$x = u(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi) \quad \text{et} \quad x = u(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi).$$

Cela donne

$$f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}}) = a_0 + \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi + \sqrt{-1}\,\Sigma a_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi,$$

$$f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}}) = a_0 + \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi - \sqrt{-1}\,\Sigma a_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi,$$

et on trouvera, en prenant successivement la moitié de leur somme et de leur différence:

$$\tfrac{1}{2}\{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}}) + f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = a_0 + \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}}) + f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = \Sigma a_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi.$$

Je fais pour plus de simplicité $f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}}) = f(u,\varphi) + \sqrt{-1}\,f_2(u,\varphi)$, $f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}}) = f(u,\varphi) - \sqrt{-1}\,f_2(u,\varphi)$. En substituant ces valeurs dans les équations précédentes, on obtient

$$f_1(u,\varphi) = a_0 + \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi,$$

$$f_2(u,\varphi) = \Sigma a_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi.$$

On trouve facilement de la même manière:

$$\tfrac{1}{2}\{f_1(u,\varphi+\varphi') + f_1(u,\varphi-\varphi')\} = a_0 + \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi \cos\lambda\varphi',$$

$$-\tfrac{1}{2}\{f_2(u,\varphi+\varphi') + f_2(u,-\varphi+\varphi')\} = \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi \sin\lambda\varphi',$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f_1(u,\varphi+\varphi') - f_1(u,\varphi-\varphi')\} = \Sigma a_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi \sin\lambda\varphi'.$$

Si le développement de fx est convergent pour des valeurs de x entre des limites quelconques, les séries dérivées le seront également, si l'on attribue au module u une valeur quelconque entre les mêmes limites.

I.

Supposons la fonction fx développable suivant les puissances ascendantes de l'argument x, de sorte qu'on a:

$$fx = a_0 + \Sigma a_\lambda x^\lambda.$$

Je dis qu'on pourra exprimer les coefficients a_λ par des intégrales définies. En effet, on aura

$$\tfrac{1}{2}\{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}}) + f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = a_0 + \Sigma a_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}}) - f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = \Sigma a_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi.$$

Je multiplie les deux membres de chacune de ces équations, la première par $\cos\lambda\varphi\,\partial\varphi$, la seconde par $\sin\lambda\varphi\,\partial\varphi$, et j'intègre entre les limites 0 et π. L'intégrale du seul terme $\cos^2\lambda\varphi\,\partial\varphi$ et $\sin^2\lambda\varphi\,\partial\varphi$ sera différente de zéro, de sorte qu'on a

$$(1.)\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\cos\lambda\varphi\,\partial\varphi = a_\lambda u^\lambda \int_0^\pi \cos^2\lambda\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi a_\lambda u^\lambda,$$

$$(2.)\quad \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int_0^\pi \{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})-f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\sin\lambda\varphi\,\partial\varphi = a_\lambda u^\lambda \int_0^\pi \sin^2\lambda\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi a_\lambda u^\lambda.$$

Ces équations auront lieu pour toutes les valeurs de λ, excepté la première, qui dans le cas de $\lambda = 0$, se réduit à

$$(3.)\quad \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \{f(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+f(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\partial\varphi = \pi a_0.$$

On s'est servi de ces équations dans la recherche de la valeur d'un grand nombre d'intégrales définies; car si le développement de fx, et par suite le coefficient a_λ, est connu, on connait aussi la valeur de l'intégrale définie. Cette partie de la recherche me parait pourtant assez stérile, puisqu'elle n'offre qu'une méthode indirecte.

Supposons la fonction Ψx développable suivant les puissances ascendantes de x, de sorte qu'on a:

$$\Psi x = b_0 + \Sigma b_\lambda x^\lambda,$$

$$\tfrac{1}{2}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = b_0 + \Sigma b_\lambda u^\lambda \cos\lambda\varphi.$$

Je multiplie de part et d'autre par $\left\{f\left(\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$, et j'intègre entre les limites 0 et π; cela donne en vertu des équations (1., 3.):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \left\{f\left(\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\partial\varphi$$

$$= b_0\int_0^\pi \left\{f\left(\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$$

$$+\Sigma b_\lambda u^\lambda \int_0^\pi \left\{f\left(\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\cos\lambda\varphi\,\partial\varphi$$

$$= \pi(2a_0b_0 + \Sigma a_\lambda b_\lambda x^\lambda).$$

Si, de la même manière, on multiplie les deux membres de l'équation

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})-\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}}) = \Sigma b_\lambda u^\lambda \sin\lambda\varphi$$

par $\frac{1}{\sqrt{-1}}\left\{f\left(\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)-f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$, et qu'on intègre entre les limites 0 et π, on trouve

$$-\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})-\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\left\{f\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}-f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\Sigma b_\lambda u^\lambda \int_0^\pi \left\{f\left(\frac{x}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)-f\left(\frac{x}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\sin\lambda\varphi\,\partial\varphi = \pi\Sigma a_\lambda b_\lambda x^\lambda.$$

Les équations précédentes offrent l'énoncé du suivant

Théorème I. Si l'on connait les sommes fx et Ψx des deux séries

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{etc.},$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \text{etc.},$$

la somme de la série

$$2a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + a_3 b_3 x^3 + a_4 b_4 x^4 + \text{etc.}$$

sera déterminée par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1\left(\frac{x}{u},\ \varphi\right)\Psi_1(u,\ \varphi)\,\partial\varphi,$$

ou bien, en supprimant le premier terme $2a_0 b_0$, par celle-ci:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_2\left(\frac{x}{u},\ \varphi\right)\Psi_1(u,\ \varphi)\,\partial\varphi.$$

L'argument u est arbitraire, sauf d'être tel que les series de $f\left(\frac{x}{u}\right)$ et Ψu soient convergentes.

Applications.

A. Pour trouver la somme de la série

$$2 + (\overset{1}{n})(\overset{1}{m})x + (\overset{2}{n})(\overset{2}{m})x^2 + (\overset{3}{n})(\overset{3}{m})x^3 + (\overset{4}{n})(\overset{4}{m})x^4 + \text{etc.}$$

dans laquelle $(\overset{p}{n})$ et $(\overset{p}{m})$ désignent les coefficients binomiaux de l'ordre p, on fera

$$\Psi(u) = (1+u)^n, \quad f\frac{x}{u} = \left(1+\frac{x}{u}\right)^m$$

et on obtient

$$\Psi(ue^{\pm\varphi\sqrt{-1}}) = (1+2u\cos\varphi+u^2)^{\frac{1}{2}n}\times$$
$$\left\{\cos n\left(\arccos = \frac{1+u\cos\varphi}{\sqrt{(1+2u\cos\varphi+u^2)}}\right) \pm \sqrt{-1}\sin n\left(\arccos = \frac{1+u\cos\varphi}{\sqrt{(1+2u\cos\varphi+u^2)}}\right)\right\},$$
$$f\left(\frac{x}{u}e^{\pm\varphi\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{u^m}(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\left\{\cos m\left(\arccos = \frac{u+x\cos\varphi}{\sqrt{(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)}}\right) \pm \sqrt{-1}\sin m\left(\arccos = \frac{u+x\cos\varphi}{\sqrt{(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)}}\right)\right\};$$

donc la somme de la série proposée sera exprimée par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi u^m}\int_0^\pi (1+2u\cos\varphi+u^2)^{\frac{1}{2}n}(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)^{\frac{1}{2}m}\times$$
$$\cos n\left(\arccos = \frac{1+u\cos\varphi}{\sqrt{(1+2u\cos\varphi+u^2)}}\right)\cos m\left(\arccos = \frac{u+x\cos\varphi}{\sqrt{(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)}}\right)\partial\varphi,$$

ou bien, en retranchant de la série le premier terme, par celle-ci:

$$\frac{2}{\pi u^m}\int_0^\pi (1+2u\cos\varphi+u^2)^{\frac{1}{2}n}(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)^{\frac{1}{2}m}\times$$

$$\sin n\left(\arccos=\frac{1+u\cos\varphi}{\sqrt{(1+2u\cos\varphi+u^2)}}\right)\sin m\left(\arccos=\frac{u+x\cos\varphi}{\sqrt{(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)}}\right)\partial\varphi.$$

Posant $x=u=1$, on a

$$\frac{2^{m+n+1}}{\pi}\int_0^\pi (\cos^{m+n}\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}n\varphi\cos\tfrac{1}{2}m\varphi\,\partial\varphi=2+(\overset{1}{n})(\overset{1}{m})+(\overset{2}{n})(\overset{2}{m})+(\overset{3}{n})(\overset{3}{m})+\text{etc.}$$

B. Pour trouver la somme de la série

$$2+\frac{1}{1.2^2}\frac{x^2}{3}+\frac{1}{1^2.2^2.3^2.4^2}\frac{x^4}{5}+\frac{1}{1^2.2^2.3^2.4^2.5^2.6^2}\frac{x^6}{7}+\text{etc.}$$

on fera $fx=\frac{\sin x}{x}$, $\Psi x=\cos x$, et on aura

$$f\left(\frac{x}{u}e^{\varphi\sqrt{-1}}\right)=\frac{\sin\left\{\frac{x}{u}(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)\right\}}{\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi}\cdot\frac{u}{x}$$

$$=\frac{u}{2x}(\cos\varphi-\sqrt{-1}\sin\varphi)\left\{\left(e^{+\frac{x}{u}\sin\varphi}+e^{-\frac{x}{u}\sin\varphi}\right)\sin\left(\frac{x}{u}\cos\varphi\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{-1}\left(e^{+\frac{x}{u}\sin\varphi}-e^{-\frac{x}{u}\sin\varphi}\right)\cos\left(\frac{x}{u}\cos\varphi\right)\right\}$$

donc

$$f_1\left(\frac{x}{u},\varphi\right)=\frac{u}{2x}\left\{e^{+\frac{x}{u}\sin\varphi}\sin\left(\varphi+\frac{x}{u}\cos\varphi\right)-e^{-\frac{x}{u}\sin\varphi}\sin\left(\varphi-\frac{x}{u}\cos\varphi\right)\right\}.$$

De la même manière on obtiendra

$$\Psi_1(u,\varphi)=\tfrac{1}{2}(e^{+u\sin\varphi}+e^{-u\sin\varphi})\cos(u\cos\varphi),$$

donc la somme de la série sera déterminée par l'intégrale définie

$$\frac{u}{2\pi x}\int_0^\pi (e^{u\sin\varphi}+e^{-u\sin\varphi})\left\{e^{+\frac{x}{u}\sin\varphi}\sin\left(\varphi+\frac{x}{u}\cos\varphi\right)\right.$$

$$\left.-e^{-\frac{x}{u}\sin\varphi}\sin\left(\varphi-\frac{x}{u}\cos\varphi\right)\right\}\cos(u\cos\varphi)\,\partial\varphi,$$

où u est arbitraire, en exceptant les valeurs 0 et ∞.

L'intégrale, multipliée par une constante arbitraire, sera une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$x^2\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}+4x\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}-\frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

C. Posant $fx = \frac{1}{1-x}$, on a $a_0 = a_1 = a_2 = a_3$ etc. $= 1$ et

$$f\left(\frac{x}{u}e^{\varphi\sqrt{-1}}\right) = \frac{u}{u - x\cos\varphi - x\sqrt{-1}\sin\varphi} = \frac{u(u-2\cos\varphi+2\sqrt{-1}\sin\varphi)}{u^2-2xu\cos\varphi+x^2},$$

donc

$$\frac{u}{\pi}\int_0^{\pi}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{u-x\cos\varphi}{u^2-2xu\cos\varphi+x^2}\partial\varphi = 2\Psi_0+\Psi x:$$

expression qui pour $x < 1$ peut servir pour transformer la fonction Ψx dans une intégrale définie, où l'argument variable x n'entre plus sous le signe Ψ; ce qui pourra être utile dans quelques cas.

D. Soit proposé de sommer la série

$$2+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}x^4+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^6+\text{etc.}$$

Si l'on fait

$$fx = 1+\tfrac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\text{etc.} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

la somme de la série sera exprimée par $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_1\left(\frac{x}{u},\varphi\right)f_1(u,\varphi)\partial\varphi$. Posant $x=u^2$, l'intégrale se transformera en $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{f_1(u,\varphi)\}^2\partial\varphi$. Or on a

$$f(xe^{\varphi\sqrt{-1}}) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2\cos 2\varphi - x^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi)}} = \frac{\sqrt{(1-x^2\cos 2\varphi+x^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi)}}{\sqrt{(1-2x^2\cos 2\varphi+x^4)}},$$

$$f_1(x,\varphi) = \tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{(1-x^2\cos 2\varphi+x^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi)}+\sqrt{(1-x^2\cos 2\varphi-x^2\sqrt{-1}\sin 2\varphi)}}{\sqrt{(1-2x^2\cos 2\varphi+x^4)}}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{(1-x^2\cos 2\varphi+\sqrt{(1-2x^2\cos 2\varphi+x^4)})}}{\sqrt{(1-2x^2\cos 2\varphi+x^4)}},$$

donc on obtient

$$\int_0^{\pi}\{f_1(x,\varphi)\}^2\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{1-x^2\cos 2\varphi}{1-2x^2\cos 2\varphi+x^4}\partial\varphi+\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-2x^2\cos 2\varphi+x^4)}}.$$

La première de ces intégrales est réductible à

$$\tfrac{1}{4}\int\partial.\,\text{arc tang} = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{1-x^2-\text{tang}^2\varphi(1+x^2)}.$$

Or les deux valeurs de $\text{arc tang} = \frac{2\,\text{tang}\,\varphi}{1-x^2-\text{tang}^2\varphi(1+x^2)}$ diffèrent, aux limites 0 et π, d'un multiple de 2π, donc l'intégrale est indépendante de x; et si dans l'intégrale proposée on fait $x=0$, on trouve $\frac{1}{2}\pi$ pour sa véritable valeur.

La réduction de la seconde intégrale est assez facile. On obtient

$$\int_0^\pi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-2x^2\cos 2\varphi+x^4)}} = \int_0^\pi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2\cos^2\varphi)}} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\Psi}{\sqrt{((1+x^2)^2-4x^2\sin^2\psi))}}$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\partial\Psi}{(1+x^2)\sqrt{\left(1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2\sin^2\psi\right)}} = \frac{2}{1+x^2}D_1\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

en désignant suivant *Legendre* par D_1 la fonction elliptique complète de la première espèce. On aura alors

$$\frac{2}{\pi}\left\{\tfrac{1}{2}\pi+\frac{2}{1+x^2}D_1\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right\} = 2+\frac{1}{2^2}x^4+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}x^8+\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^{12}+\text{etc.},$$

ou bien

$$\frac{2}{\pi(1+x)}D_1\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right) = 1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1.3^2}{2^2.4^2}x^4+\frac{1.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^6+\text{etc.}$$

II.

Soient m et n deux nombres entiers, qui n'ont point de diviseur commun. Mettant dans les deux séries

$$fu = a_0+\Sigma a_\lambda u^\lambda \quad \text{et} \quad \Psi x = b_0+\Sigma b_\lambda x^\lambda$$

u^n à la place de u dans la première, et $\frac{x^m}{u^m}$ à la place de x dans la seconde, on aura

$$f(u^n) = a_0+\Sigma a_\lambda u^{n\lambda}, \quad \Psi\left(\frac{x}{u}\right)^m = b_0+\Sigma b_\lambda\left(\frac{x}{u}\right)^{\lambda m}.$$

Si à ces deux séries on applique les mêmes considérations qui ont servi à établir les équations (1, 2, 3.), on aura

$$\tfrac{1}{2}\int_0^\pi \{\Psi(x^m e^{+m\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(x^m e^{-m\varphi\sqrt{-1}})\}\cos\lambda m\varphi\,\partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi b_\lambda x^{\lambda m}.$$

Si donc on multiplie les deux membres de l'équation

$$\tfrac{1}{2}\{f(u^n e^{+n\varphi\sqrt{-1}})+f(u^n e^{-n\varphi\sqrt{-1}})\} = a_0+\Sigma a_\lambda u^{\lambda n}\cos\lambda n\varphi$$

par $\left\{\Psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{+m\varphi\sqrt{-1}}\right)+\Psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{-m\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$, et qu'on intègre ensuite entre les limites 0 et π, tous les termes de l'intégrale

$$\int_0^\pi \left\{\Psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{+m\varphi\sqrt{-1}}\right)+\Psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{-m\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\cos\lambda n\varphi\,\partial\varphi$$

s'évanouiront, excepté si λn est égal à un multiple quelconque de m; ce qui aura lieu, si λ est un multiple quelconque de m, $=\lambda m$, dans le cas supposé

où m et n n'ont point des diviseurs communs. Donc on aura

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\{f(u^n e^{+n\varphi\sqrt{-1}})+f(u^n e^{-n\varphi\sqrt{-1}})\}\left\{\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{+m\varphi\sqrt{-1}}\right)+\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{-m\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$$

$$= a_0\int_0^{\pi}\left\{\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{+m\varphi\sqrt{-1}}\right)+\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{-m\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$$

$$+\Sigma a_{\lambda m}x^{\lambda mn}\int_0^{\pi}\left\{\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{+m\varphi\sqrt{-1}}\right)+\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{-m\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\cos\lambda mn\varphi\,\partial\varphi$$

$$= 2\pi a_0 b_0+\pi\Sigma a_{\lambda m}b_{\lambda n}x^{\lambda mn}.$$

Il suit delà le

Théorème II. Si l'on suppose les fonctions fx et Ψx transformables dans les séries

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\text{etc.},$$
$$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+\text{etc.},$$

la somme de la série

$$2a_0b_0+a_mb_nx^{mn}+a_{2m}b_{2n}x^{2mn}+a_{3m}b_{3n}x^{3mn}+\text{etc.},$$

dans le cas ou m et n n'ont point de diviseur commun, sera exprimée, par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f_1(u^n,\,n\varphi)\,\Psi_1\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m,\,m\varphi\right)\partial\varphi.$$

Application.

Posant $fx=\psi x=e^x$, on aura

$$f(u^n e^{n\varphi\sqrt{-1}}) = e^{u^n\cos n\varphi}\{\cos(u^n\sin n\varphi)+\sqrt{-1}\sin(u^n\sin n\varphi)\},$$

$$\psi\left(\left(\frac{x}{u}\right)^m e^{m\varphi\sqrt{-1}}\right) = e^{\left(\frac{x}{u}\right)^m\cos m\varphi}\left\{\cos\left(\frac{x^m}{u^m}\sin m\varphi\right)+\sqrt{-1}\sin\left(\frac{x^m}{u^m}\sin m\varphi\right)\right\}$$

et en posant $x^m=u^{m+n}$, et $\Gamma(p)=1.2.3.4.\text{etc.}(p-1)$:

$$2+\frac{u^{n(m+n)}}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}+\frac{u^{2n(m+n)}}{\Gamma(2m+1)\Gamma(2n+1)}+\frac{u^{3n(m+n)}}{\Gamma(3m+1)\Gamma(3n+1)}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int^{\pi}e^{u^n(\cos n\varphi+\cos m\varphi)}\cos(u^n\sin n\varphi)\cos(u^n\sin m\varphi)\,\partial\varphi.$$

III.

Soit la fonction ψx du théorème (I.) $= \frac{1}{1-x^m} = 1 + x^m + x^{2m} + x^{3m} + \text{etc.}$, de sorte que $b_0 = 1$, $b_m = 1$, $b_{2m} = 1$, etc., tandis que les coefficients b_λ, dans lesquels l'indice λ n'est pas un multiple de m, s'évanouissent. Dans ce cas on aura

$$\Psi(ue^{\varphi\sqrt{-1}}) = \frac{1}{1-u^m\cos m\varphi - \sqrt{-1}\,u^m\sin m\varphi} = \frac{1-u^m\cos m\varphi + \sqrt{-1}\,u^m\sin m\varphi}{1-2u^m\cos m\varphi + u^{2m}};$$

donc le théorème (I.) pourra être modifié comme suit par le

Théorème III. Si fx est transformable dans la série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \text{etc.}$$

la somme de la série

$$2a_0 + a_mx^m + a_{2m}x^{2m} + a_{3m}x^{3m} + \text{etc.}$$

sera déterminée par l'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1\left(\frac{x}{u},\ \varphi\right)\frac{1-u^m\cos m\varphi}{1-2u^m\cos m\varphi + u^{2m}}\,\partial\varphi,$$

ou bien par celle-ci:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_2\left(\frac{x}{u},\ \varphi\right)\frac{u^m\sin m\varphi}{1-2u^m\cos m\varphi + u^{2m}}\,\partial\varphi,$$

où u est arbitraire, mais < 1.

Applications.

A. Posant $fx = (1+x)^n$, on obtient

$$\frac{2}{\pi u^n}\int_0^\pi \cos n\left(\arccos = \frac{u+x\cos\varphi}{\sqrt{(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)}}\right)\frac{1-u^m\cos m\varphi}{1-2u^m\cos m\varphi+u^{2m}}$$

$$\times(u^2+2xu\cos\varphi+x^2)^{\frac{1}{2}n}\,\partial\varphi = 2 + \overset{m}{(n)}x^m + \overset{2m}{(n)}x^{2m} + \overset{3m}{(n)}x^{3m} + \overset{4m}{(n)}x^{4m} + \text{etc.}$$

Pour $x = u$ l'intégrale prendra cette forme plus simple:

$$\frac{2^{n+1}}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-x^m\cos m\varphi}{1-2x^m\cos m\varphi+x^{2m}}\cos^n\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}n\varphi\,\partial\varphi,$$

où il n'est pas permis de faire $x = 1$, même si la série à droite est convergente. Pour $x = 0$, on obtient le résultat connu

$$\int_0^\pi \cos^n\tfrac{1}{2}\varphi\cos\tfrac{1}{2}n\varphi\,\partial\varphi = \frac{\pi}{2^n}.$$

B. Pour $fx = e^x$, on a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1-u^m\cos m\varphi}{1-2u^m\cos m\varphi+u^{2m}}\, e^{\frac{x}{u}\cos\varphi}\cos\left(\frac{x}{u}\sin\varphi\right)\partial\varphi$$

$$= 2+\frac{x^m}{\Gamma(m+1)}+\frac{x^{2m}}{\Gamma(2m+1)}+\frac{x^{3m}}{\Gamma(3m+1)}+\text{etc.}$$

IV.

Il sera facile d'exprimer la somme d'un *nombre déterminé* de termes d'une série par une intégrale définie. Pour cela on posera dans le Théor. (I.)

$$\Psi u = \frac{1-u^m}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+\text{etc.}+u^{m-1}$$

de sorte que

$$b_0 = b_1 = b_2 = \text{etc.} = b_{m-1}, \quad b_m = b_{m+1} = \text{etc.} = 0.$$

Cela donne

$$\Psi(ue^{\varphi\sqrt{-1}}) = \frac{1-u^m\cos m\varphi-\sqrt{-1}\,u^m\sin m\varphi}{1-u\cos\varphi-\sqrt{-1}\,u\sin\varphi}$$

et par conséquent

$$\Psi_1(u,\varphi) = \frac{1-u\cos\varphi-u^m\cos m\varphi+u^{m+1}\cos(m-1)\varphi}{1-2u\cos\varphi+u^2}.$$

De là on tire le

Théorème IV. Si fx est dévéloppable en

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{etc.}$$

la somme des m premiers termes, savoir

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\text{etc.}+a_{m-1}x^{m-1}$$

est déterminée par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_1\left(\frac{x}{u},\varphi\right)\frac{1-u\cos\varphi-u^m\cos m\varphi+u^{m+1}\cos(m-1)\varphi}{1-2u\cos\varphi+u^2}\partial\varphi,$$

où u est arbitraire, excepté d'être zéro. Pour $u=1$, l'intégrale prend la forme plus simple

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f_1(x,\varphi)\frac{1-\cos\varphi-\cos m\varphi+\cos(m-1)\varphi}{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\partial\varphi.$$

La même sommation pourra être exécutée plus simplement comme suit. L'intégrale $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin b\varphi\cos a\varphi}{\varphi}\partial\varphi$ est égale à 1 si b est $=$ ou $>a$, mais zéro si b est $<a$.

Si on multiplie les deux membres de l'équation

$$\tfrac{1}{2}\{f(xe^{+\varphi\sqrt{-1}})+f(xe^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = a_0+\Sigma a_\lambda x^\lambda \cos\lambda\varphi$$

par $\frac{2}{\pi}\frac{\sin m\varphi}{\varphi}\partial\varphi$ et qu'on intègre ensuite entre les limites 0 et ∞ on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{f(xe^{+\varphi\sqrt{-1}})+f(xe^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{\sin m\varphi}{\varphi}\partial\varphi$$

$$= \frac{2}{\pi}a_0\int_0^\infty \frac{\sin m\varphi}{\varphi}\partial\varphi + \frac{2}{\pi}\Sigma a_\lambda x^\lambda \int_0^\infty \frac{\cos\lambda\varphi \sin m\varphi}{\varphi}\partial\varphi.$$

Mais l'intégrale s'évanouit si λ est plus grand que m donc on a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{f(xe^{+\varphi\sqrt{-1}})+f(xe^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{\sin m\varphi}{\varphi}\partial\varphi = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\text{etc.}+a_mx^m.$$

En remplaçant m par $m-1$, et en retranchant le résultat de l'équation précédente, on trouvera

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{f(xe^{+\varphi\sqrt{-1}})+f(xe^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{\sin(m-1)\varphi-\sin m\varphi}{\varphi}\partial\varphi = a_mx^m.$$

Au moyen de cette intégrale on peut exprimer la somme des séries des théorèmes (I, II, III.) par des intégrales définies prises entre les limites 0 et ∞.

La même intégrale pourra servir à trouver la somme d'une série *double*. En effet, si l'on multiplie les deux membres de l'équation

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\{f(xe^{+\varphi\sqrt{-1}})-f(xe^{-\varphi\sqrt{-1}})\} = \Sigma a_\lambda x^\lambda \sin\lambda\varphi$$

par $\frac{1}{\pi}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{\partial\varphi}{\varphi}$, et qu'on intègre ensuite entre les limites 0 et ∞, on aura

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_0^\infty \{f(xe^{+\varphi\sqrt{-1}})-f(xe^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{\partial\varphi}{\varphi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\Sigma a_\lambda x^\lambda \int_0^\infty \{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\frac{\sin\lambda\varphi\,\partial\varphi}{\varphi}.$$

Or, en répresentant les coefficients du développement de Ψu par α_0, α_1, α_2, etc. l'intégrale du dernier membre est égale à

$$\pi(\alpha_0+\alpha_1u+\alpha_2u^2+\text{etc.}+\alpha_\lambda u^\lambda).$$

Cela donne le

Theorème V. La somme des deux séries

$$fx = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \text{etc.},$$
$$\Psi x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \text{etc.}$$

étant connue, la somme de la série double

$$\begin{aligned} & a_1 x (\alpha_0 + \alpha_1 u) \\ & + a_2 x^2 (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2) \\ & + a_3 x^3 (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3) \\ & + a_4 x^4 (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

sera exprimée par l'intégrale définie $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_2(x, \varphi)\,\Psi_1(u, \varphi)\frac{\partial\varphi}{\varphi}$.

Applications.

Pour trouver la somme de la série double

$$\begin{aligned} & a_1 x \\ & + a_2 x^2 (1 - \tfrac{1}{2}) \\ & + a_3 x^3 (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) \\ & + a_4 x^4 (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

on fera $\Psi u = \log(1 + u)$, et on aura $\Psi_1(u, \varphi) = \log(1 + 2u\cos\varphi + u^2)$, ce qui devient, en posant $u = 1$, égal à $\log(4\cos^2\frac{1}{2}\varphi)$; donc la somme de la série proposée est déterminée par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_2(x, \varphi)\,\frac{\log(4\cos^2\frac{1}{2}\varphi)}{\varphi}\,\partial\varphi.$$

On trouve de la même manière que la somme de la série double

$$\begin{aligned} & a_1 x (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \text{etc.} + \alpha_m u^m) \\ & + a_2 x^2 (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \text{etc.} \;\ldots\ldots\; + \alpha_{2m} u^{2m}) \\ & + a_3 x^3 (\alpha_0 + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \text{etc.} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; + \alpha_{3m} u^{3m}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

peut être exprimée par l'intégrale définie $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_2(x, \varphi)\,\Psi_1(u, m\varphi)\,\frac{\partial\varphi}{\varphi}$.

Également on trouvera

$$a_1x\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\text{etc.}\;+(-1)^m\frac{1}{m}\right)$$
$$+a_2x^2\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\text{etc.}\;\ldots\ldots+(-1)^m\frac{1}{2m}\right)$$
$$+a_3x^3\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\text{etc.}\;\ldots\ldots\ldots-(-1)^m\frac{1}{3m}\right)$$
$$\text{etc.}$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_2(x,\varphi)\frac{\log(4\cos^2\frac{1}{2}m\varphi)}{\varphi}\partial\varphi.$$

V.

Si dans l'équation du théorème (I.)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\left\{f\left(\frac{z}{u}e^{+\varphi\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{z}{u}e^{-\varphi\sqrt{-1}}\right)\right\}\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\partial\varphi$$
$$=2a_0b_0+\Sigma a_\lambda b_\lambda z^\lambda$$

on fait alternativement $z=ze^{+\varphi'\sqrt{-1}}$ et $=ze^{-\varphi'\sqrt{-1}}$, on obtient, en prenant la demi-somme des deux résultats:

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\left\{f\left(\frac{z}{u}e^{+(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{z}{u}e^{-(\varphi+\varphi')\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{z}{u}e^{+(\varphi-\varphi')\sqrt{-1}}\right)+f\left(\frac{z}{u}e^{-(\varphi-\varphi')\sqrt{-1}}\right)\right\}$$
$$\times\{\Psi(ue^{+\varphi\sqrt{-1}})+\Psi(ue^{-\varphi\sqrt{-1}})\}\partial\varphi=2a_0b_0+\Sigma a_\lambda b_\lambda z^\lambda\cos\lambda\varphi'.$$

En multipliant de part et d'autre par $\left\{F\left(\frac{x}{z}e^{+\varphi'\sqrt{-1}}\right)+F\left(\frac{x}{z}e^{-\varphi'\sqrt{-1}}\right)\right\}\partial\varphi$, etc. et intégrant entre les limites 0 et π, on trouvera

$$\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\left\{f_1\left(\frac{z}{u},\varphi+\varphi'\right)+f_1\left(\frac{z}{u},\varphi-\varphi'\right)\right\}\Psi_1(u,\varphi)F_1\left(\frac{x}{z},\varphi'\right)\partial\varphi\,\partial\varphi'$$
$$=2^2a_0b_0c_0+\Sigma a_\lambda b_\lambda c_\lambda x^\lambda,$$

où l'on a supposé $Fx=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+$ etc.

Ces équations donnent le

Théorème VI. Si les trois fonctions fx, Ψx, Fx sont développables en série ascendentes et dont les termes généraux sont a_λ, b_λ, c_λ, la somme de la série

$$2^2a_0b_0c_0+a_1b_1c_1x+a_2b_2c_2x^2+a_3b_3c_3x^3+\text{ etc.}$$

est déterminée par l'intégrale double

$$\frac{2}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\left\{f_1\left(\frac{z}{u},\varphi+\varphi'\right)+f_1\left(\frac{z}{u},\varphi-\varphi'\right)\right\}\Psi(u,\varphi)F_1\left(\frac{x}{z},\varphi'\right)\partial\varphi\,\partial\varphi'.$$

Les trois arguments $\frac{z}{u}$, u, $\frac{x}{z}$, sont arbitraires, sous condition que leur produit soit égal à x, et qu'ils rendent convergentes les séries f, Ψ et F.

L'intégrale citée est assez compliquée, ce qui vient des deux arguments arbitraires u et z qui y entrent. Elle pourra être écrite de 24 manières différentes, en permutant les fonctions et les arguments.

Application.

Pour trouver la somme de la série

$$4+\overset{1}{(n)}\overset{1}{(m)}\overset{1}{(p)}+\overset{2}{(n)}\overset{2}{(m)}\overset{2}{(p)}+\overset{3}{(n)}\overset{3}{(m)}\overset{3}{(p)}+\text{etc.},$$

on fera $fx=(1+x)^m$, $\Psi x=(1+x)^n$, $Fx=(1+x)^p$, et on aura

$$f_1\left(\frac{z}{u},\varphi\pm\varphi'\right)=\frac{1}{u^m}\{u^2+2zu\cos(\varphi\pm\varphi')+z^2\}^{\frac{1}{2}m}$$
$$\times\cos m\left(\text{arc}\cos=\frac{u+z\cos(\varphi\pm\varphi')}{\sqrt{(u^2+2zu\cos(\varphi\pm\varphi')+z^2)}}\right)$$

$$\Psi_1(u,\varphi)=\{1+2u\cos\varphi+u^2\}^{\frac{1}{2}n}\cos n\left(\text{arc}\cos=\frac{1+u\cos\varphi}{\sqrt{(1+2u\cos\varphi+u^2)}}\right)$$

$$F_1\left(\frac{x}{z},\varphi'\right)=\frac{1}{z^p}\{z^2+2zx\cos\varphi'+x^2\}^{\frac{1}{2}p}$$
$$\times\cos p\left(\text{arc}\cos=\frac{z+x\cos\varphi'}{\sqrt{(z^2+2zx\cos\varphi'+x^2)}}\right).$$

Posant $x=u=z=1$, on aura

$$\frac{2^{m+n+p+1}}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\cos^m\tfrac{1}{2}(\varphi+\varphi')\cos^n\tfrac{1}{2}\varphi\cos^p\tfrac{1}{2}\varphi'\cos\tfrac{1}{2}m(\varphi+\varphi')\cos\tfrac{1}{2}n\varphi\cos\tfrac{1}{2}p\varphi'\,\partial\varphi\,\partial\varphi'$$
$$+\frac{2^{m+n+p+1}}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\cos^m\tfrac{1}{2}(\varphi-\varphi')\cos^n\tfrac{1}{2}\varphi\cos^p\tfrac{1}{2}\varphi'\cos\tfrac{1}{2}m(\varphi-\varphi')\cos\tfrac{1}{2}n\varphi\cos\tfrac{1}{2}p\varphi'\,\partial\varphi\,\partial\varphi'$$
$$=4+\Sigma\overset{\lambda}{(m)}\overset{\lambda}{(n)}\overset{\lambda}{(p)}.$$

Utrecht 25 Mars 1848.

24.

Vollständige Auflösung der cubischen Gleichungen durch die Methode der Wurzeldifferenzen.

(Von Herrn Dr. *Otto Eisenlohr* zu Carlsruhe.)

---

§. 1.

Man hat zur Auflösung der cubischen und höhern Gleichungen verschiedene Wege eingeschlagen. Entweder sind sie aber zur wirklichen Berechnung der Wurzeln in vielen Fällen unpassend, oder die irrationalen und imaginären Wurzeln können nur durch Näherungswerthe dargestellt werden. *Durch die Methode der Wurzeldifferenzen* dürften sich nicht allein die cubischen Gleichungen vollständig auflösen lassen, sondern die Methode dürfte auch den Weg zur Auflösung der Gleichungen vierten und höhern Grades zeigen. Soviel mir bekannt, ist dieser Weg noch nicht versucht worden. Zwar hat *Rutherford* (Vollständige Lösung numerischer Gleichungen von Dr. *Wil. Rutherford;* aus dem Englischen von Dr. *Aug. Wiegand.* Halle 1849.) ein ähnliches Verfahren aufgestellt, allein die irrationalen und imaginären Wurzeln werden so ebenfalls nur durch Näherungswerthe dargestellt. Da das von mir versuchte Verfahren an der Auflösung der *cubischen* Gleichungen am deutlichsten gezeigt werden kann, so will ich diese Auflösung zuerst mittheilen; die Anwendung der Methode der Wurzeldifferenzen zur Auflösung der Gleichungen von höheren Graden aber erst später nachfolgen lassen.

Der Kürze wegen werde ich bekannte, oder leicht zu beweisende Lehrsätze ohne Beweis hersetzen und bei andern, wo es ohne Undeutlichkeit nicht thunlich ist, die oft weitläufigen Umformungen gröfstentheils weglassen.

I. Allgemeine Eigenschaften der cubischen Gleichungen.

§. 2.

Eine vollständige, geordnete cubische Gleichung wird durch

$$(1.)\quad fx = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$$

vorgestellt, und es kann angenommen werden, dafs die Coëfficienten A, B und C *ganze* und *rationale* Gröfsen sind. Dann müssen auch die rationalen



Wurzeln der Gleichung ***ganze Zahlen*** sein, und wenn zwei irrationale oder imaginäre Wurzeln vorhanden sind, müssen sie die Form $p-q.\sqrt{r}$ und $p+q.\sqrt{r}$ haben.

Man kann aber auch setzen

$$(2.)\quad fx = (x+a_1)(x+b_1)(x+c_1)$$
$$= x^3(a_1+b_1+c_1)x^2+(a_1.b_1+a_1.c_1+b_1.c_1)x+a_1.b_2.c_1 = 0,$$

so dafs die Coëfficienten einer cubischen Gleichung

$$(3.)\quad A = a_1+b_1+c_1,\quad B = a_1.b_1+a_1.c_1+b_1.c_1,\quad C = a_1.b_1.c_1$$

sind.

Jede cubische Gleichung hat drei Wurzeln, $x=-a_1$, $x=-b_1$, $x=-c_1$; und ist $a_1=b_1$ oder $a_1=b_1=c_1$, so hat die Gleichung zwei oder drei *gleiche* Wurzeln.

Ist eine Wurzel $x=-a_1$ der Gleichung bekannt, so kann die Gleichung durch $x+a_1$ ohne Rest dividirt werden, und der Quotient ist eine Gleichung *zweiten* Grades, durch deren Auflösung die beiden andern Wurzeln gefunden werden.

§. 3.

Nach der *Cardani*schen Formel wird eine Wurzel der Gleichung durch

$$(1.)\quad x = -\tfrac{1}{3}A+\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w} = -\tfrac{1}{3}A+r_1$$

ausgedrückt, wo

$$(2.)\quad \begin{cases} v = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)}, & w = +\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)}, \\ a = -\tfrac{1}{3}A^2+B, & b = \tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}A.B+C \text{ ist.} \end{cases}$$

Um die Form der beiden andern Wurzeln zu finden, setze man

$$(3.)\quad x^3+Ax^2+Bx+C = (x+\tfrac{1}{3}A-r_1)(x+p-q.\sqrt{r})(x+p+q.\sqrt{r})$$

und beachte, dafs

$$v\times w = \tfrac{1}{27}a^3,\quad \text{also}\quad a = 3.\sqrt[3]{(v.w)} \text{ ist.}$$

Setzt man hiernach die Coëfficienten A und B der Gleichung zusammen, so ergiebt sich

$$A = \tfrac{1}{3}A-r_1+p-q.\sqrt{r}+p+q.\sqrt{r} = \tfrac{1}{3}A-r_1+2p,$$

mithin

$$(4.)\quad p = \tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}r_1 = \tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}.(\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w}).$$

Zur Ermittlung von $q.\sqrt{r}$ dient die Gleichung

$$B = (\tfrac{1}{3}A-r_1)\times(p-q.\sqrt{r})+(\tfrac{1}{3}A-r_1)\times(p+q.\sqrt{r})+(p-q.\sqrt{r})\times(p+q.\sqrt{r})$$
$$= 2p.(\tfrac{1}{3}A-r_1)+p^2-q^2.r = \tfrac{1}{3}A^2-\tfrac{3}{4}r_1^2-q^2r.$$

Daher wird

$$q^2.r = \tfrac{1}{3}A^2 - B - \tfrac{3}{4}r_1^2 = -a - \tfrac{3}{4}\cdot(\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w})^2$$
$$= -3.\sqrt[3]{(v.w)} - \tfrac{3}{4}\cdot(\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w})^2 = -\tfrac{3}{4}\cdot(\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w})^2,$$

oder

$$(5.)\qquad q.\sqrt{r} = \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}).\sqrt{-3} = \tfrac{1}{2}r_2;$$

folglich ist:

$$(6.)\qquad x^3+Ax^2+Bx+C = (x+\tfrac{1}{3}A-\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w})$$
$$\times(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w})-\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}).\sqrt{-3})$$
$$\times(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}).\sqrt{-3})$$
$$= (x+\tfrac{1}{3}A-r_1)\times(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(r_1-r_2))\times(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(r_1+r_2)).$$

§. 4.

In einer cubischen Gleichung können sein:

I. Alle drei Wurzeln ***reell*** und ***rational,*** und zwar

1) Alle drei Wurzeln ***gleich.***
2) Zwei Wurzeln ***gleich,*** die dritte ***verschieden.***
3) Alle drei Wurzeln ***verschieden,*** von der Form c, $c+z$, $c+2z$.
4) Alle drei Wurzeln ***verschieden,*** und ohne besondern Zusammenhang.

II. Eine Wurzel ***reell*** und ***rational,*** die beiden andern

5) ***Reell,*** aber ***irrational.***
6) ***Imaginär.***

III. Alle drei Wurzeln ***irrational,*** und zwar

7) Alle drei Wurzeln ***reell.***
8) Eine Wurzel ***reell,*** die beiden andern ***imaginär.***

II. Entwicklung der Methode der Wurzeldifferenzen.

§. 5.

Es ist

$$fx = x^3+Ax^2+Bx+C = 0 = (x+a_1)(x+b_1)(x+c_1),$$

also

$$A = a_1+b_1+c_1,\quad B = a_1.b_1+a_1.c_1+b_1.c_1,\quad C = a_1.b_1.c_1.$$

Setzt man

$$b_1 = a_1+a_2,\qquad c_1 = a_1+a_2+a_3,$$

so ist

$$(1.)\quad fx = (x+a_1).(x+a_1+a_2).(x+a_1+a_2+a_3)$$
$$= (x+a_1)^3+(2a_2+a_3).(x+a_1)^2+a_2(a_2+a_3).(x+a_1),$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$(2.)\quad 2a_2+a_3 = \alpha \quad \text{und} \quad a_2(a_2+a_3) = \beta$$

gesetzt wird:

$$(3.)\quad fx = (x+a_1)^3+\alpha.(x+a_1)^2+\beta(x+a_1) = 0.$$

Durch Einführung dieser Werthe von b und c bekommen die Coëfficienten der Gleichung folgende Form:

$$(4.)\quad \begin{cases} A = 3a_1+2a_2+a_3 = 3a_1+\alpha, \\ B = 3a_1^2+2a_1.(2a_2+a_3)+a_2.(a_2+a_3) = 3a_1^2+2a_1.\alpha+\beta, \\ C = a_1^3+a_1^2.(2a_2+a_3)+a_1.a_2.(a_2+a_3) = a_1^3+a_1^2.\alpha+a_1.\beta. \end{cases}$$

Da $x = -a_1$ ist, so folgt hieraus

$$(5.)\quad \alpha = 3x+A, \quad \beta = 3x^2+2A.x+B.$$

Daher ist β das erste, α das zweite *Differential* der Gleichung.

Durch Elimination der Gröfse a_1 aus (4.) erhält man folgende zwei Gleichungen für α und β:

$$(6.)\quad \begin{cases} a = -\tfrac{1}{3}A^2+B = -\tfrac{1}{3}\alpha^2+\beta = -\tfrac{1}{3}(a_2^2+a_2a_3+a_3^2), \\ b = \tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}AB+C \\ \quad = \tfrac{2}{27}\alpha^3-\tfrac{1}{3}\alpha.\beta = \tfrac{1}{27}(-2a_2^3-3a_2^2.a_3+3a_2.a_3^2+2a_3^3) \\ \qquad\qquad = \tfrac{1}{27}(-a_2+a_3)(2a_2+a_3)(a_2+2a_3). \end{cases}$$

Aus diesen beiden Gleichungen können die Gröfsen α und β unabhängig dargestellt werden; nämlich:

$$(7.)\quad (\tfrac{1}{3}\alpha)^3+a\cdot\tfrac{1}{3}\alpha+b = 0.$$

Dieses ist die reducirte Gleichung, und sie entsteht aus der vollständigen Gleichung, wenn darin

$$x = \tfrac{1}{3}\alpha-\tfrac{1}{3}A$$

gesetzt wird. Für β erhält man

$$(8.)\quad \beta^3+3a.\beta^2-(4a^3+27b^2) = 0.$$

Bildet man die Gröfse $4a^3+27b^2$ aus (6.), so ergiebt sich

$$(9.)\quad \begin{cases} 4a^3+27b^2 = -\beta^2(\alpha^2-4\beta) = -a_2^2.a_3^2.(a_2+a_3)^2, \\ \tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2 = -\tfrac{1}{108}(a_2^2.a_3^2.(a_2+a_3)^2). \end{cases}$$

Die *Hülfsgröfsen a, b* und $\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2$ sind dieselben, welche in der *Cardani*schen Formel vorkommen.

Je nachdem man in der ursprünglichen Gleichung $x = -a_1$, oder $x = -b_1$, oder $x = -c_1$ setzt, gilt die Gleichung (7.) für $\alpha = 2a_2+a_3$,

oder für $\alpha = -a_2 + a_3$, oder für $\alpha = -a_2 - 2a_3$, die Gleichung (8.) aber für $\beta = a_2(a_2 + a_3)$, oder für $\beta = -a_2 . a_3$, oder für $\beta = a_3(a_2 - a_3)$. Daher enthält die Gröfse b alle drei möglichen Werthe von α und die Gröfse $4a^3 + 27b^2$ alle drei möglichen Werthe von β als ***Factoren.***

Aus (6. und 9.) können auch Gleichungen für eine der beiden Wurzeldifferenzen, oder auch für ihre Summe gebildet werden; was jedoch nicht vortheilhaft ist. Eben so ist die Darstellung der Gröfsen α und β durch die ***Cardani*****sche** Formel nicht vortheilhaft, indem, wie bei der Darstellung der x, immer die irrationalen Ausdrücke $\sqrt[3]{v}$ in $\sqrt[3]{w}$ vorkommen. Dagegen können die Wurzeldifferenzen a_2 und a_3, oder die Differentiale α und β aus den Gröfsen a, b und $4a^3 + 27b^2$ unmittelbar dargestellt werden; wodurch es möglich wird, die Gröfse a_1 nach (4.) zu berechnen und somit die gegebne Gleichung in ihre drei Wurzelfactoren zu zerlegen.

Bevor dieses Verfahren gehörig entwickelt werden kann, ist zu untersuchen, welche ***Formen*** die Wurzeldifferenzen annehmen können, und wie die Formen der obigen ***Hülfsgröfsen*** a, b und $4a^3 + 27b^2$ von den Formen der Wurzeldifferenzen abhängig sind.

§. 6.

Die Form der Wurzeldifferenzen a_2 und a_3 hangt von der Beschaffenheit der drei Wurzeln der Gleichung ab; sie können daher nach (§. 4.) ***acht*** verschiedene Formen haben.

Man setze die Gleichung

$$fx = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 = (x + a_1)(x + b_1)(x + c_1)$$
$$= (x + a_1)(x + a_1 + a_2)(x + a_1 + a_2 + a_3)$$

und unterscheide folgende Fälle:

1) Sind ***alle drei*** Wurzeln der Gleichung ***gleich,*** so ist

$$a_1 = b_1 = c_1; \quad fx = (x + a_1)^3;$$

folglich sind die Differenzen $a_2 = 0$, $a_3 = 0$.

2) Hat die Gleichung ***zwei gleiche*** Wurzeln, so ist entweder

$a_1 = b_1$ und $fx = (x + a_1)^2 . (x + c_1)$, also $a_2 = 0$, oder

$b_1 = c_1$ und $fx = (x + a_1) . (x + b_1)^2$, also $a_3 = 0$.

3) Sind die drei Wurzeln der Gleichung ***verschieden,*** hat aber die Gleichung die Form

$$fx = (x + a_1)(x + a_1 + z)(x + a_1 + 2z)$$
$$= (x + a_1)(x + a_1 + a_2)(x + a_1 + 2a_2),$$

so ist

$$a_3 = a_2 = z.$$

4) Sind alle drei Wurzeln *reell* und *rational,* aber *verschieden* und ohne besondern Zusammenhang, so kann angenommen werden, dafs in der Gleichung

$$fx = (x + a_1)(x + a_1 + a_2)(x + a_1 + a_2 + a_3)$$

$$a_1 + a_2 + a_3 > a_1 + a_2 \quad \text{und} \quad a_1 + a_2 > a_1$$

sei; wobei auch das Zeichen von a_1 berücksichtigt und eine negative Gröfse kleiner als Null betrachtet werden mufs. Alsdann sind die Differenzen a_2 und a_3 ganze positive Gröfsen.

5) Hat die Gleichung eine *reelle* und *rationale* Wurzel und zwei *reelle* aber *irrationale* Wurzeln, und bezeichnet man durch a_1 eine reelle und rationale Gröfse, so werden die Differenzen a_2 und a_3 *irrational.* Alsdann ist

$$fx = (x + a_1)(x + a_1 + p - q.\sqrt{r})(x + a_1 + p + q.\sqrt{r}),$$

also

$$a_2 = p - q.\sqrt{r}, \qquad a_3 = 2q.\sqrt{r}.$$

Hier sind p und q *rationale* Gröfsen, aber $\sqrt{r}$ ist *irrational.*

6) Hat die Gleichung eine *reelle* und *rationale* Wurzel, während die beiden andern Wurzeln *imaginär* sind, so erhält man

$$fx = (x + a_1)(x + a_1 + p - q.\sqrt{-r})(x + a_1 + p + q.\sqrt{-r}),$$

folglich

$$a_2 = p - q.\sqrt{-r}; \qquad a_3 = 2q.\sqrt{-r}.$$

Hier sind a_1, p und q *reelle* und *rationale* Gröfsen, $\sqrt{-r}$ ist immer *imaginär,* kann aber entweder *irrational* sein, oder für $r = 1$ auch *rational* werden.

7) Hat die Gleichung *drei reelle* aber *irrationale* Wurzeln, oder

8) *Drei irrationale* und darunter zwei *imaginäre* Wurzeln, so müssen die Differenzen a_2 und a_3 ebenfalls entweder *irrational,* oder *irrational* und zugleich *imaginär* sein. Alsdann wird nach (§. 3. Gl. 6.)

$$fx - (x + \tfrac{1}{3}A - r_1)(x + \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{2}(r_1 - r_2))(x + \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}(r_1 + r_2));$$

folglich ist

$$a_2 = r_1 + \tfrac{1}{2}(r_1 - r_2), \qquad a_3 = r_2.$$

Hier ist

$$r_1 = \sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{w}; \qquad r_2 = (\sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{w}).\sqrt{-3},$$

$$v = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)}; \qquad w = +\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)}.$$

§. 7.

Ermittelt man nach den obigen Formen der Wurzeldifferenzen die davon abhängigen Formen der *Hülfsgröfsen*

$$a = -\tfrac{1}{3}(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2),$$
$$b = \tfrac{1}{27}(-a_2 + a_3)(2a_2 + a_3)(a_2 + 2a_3),$$
$$4a^3 + 27b^2 = -a_2^2 . a_3^2 (a_2 + a_3)^2,$$

so ergiebt sich Folgendes.

1) Ist $a_2 = a_3 = 0$, oder $fx = (x + a_1)^3$, so wird
$$a = 0, \quad b = 0, \quad 4a^3 + 27b^2 = 0.$$
Hat also die Gleichung *drei gleiche* Wurzeln, so sind alle Hülfsgröfsen gleich Null.

2) Ist eine der beiden Wurzeldifferenzen, entweder $a_2 = 0$, oder $a_3 = 0$, die andere aber eine *rationale* Gröfse, so hat die Gleichung zwei *gleiche* Wurzeln und es wird
Für $a_2 = 0$: $a = -\tfrac{1}{3}a_3^2$, $b = \tfrac{2}{27}a_3^3$, $4a^3 + 27b^2 = 0$;
Für $a_3 = 0$: $a = -\tfrac{1}{3}a^2$, $b = -\tfrac{2}{27}a_2^3$, $4a^3 + 27b^2 = 0$.
Folglich ist das Vorhandensein *gleicher* Wurzeln daraus zu erkennen, dafs $4a^3 + 27b^2 = 0$ wird.

3) Ist $a_3 = a_2$, also
$$fx = (x + a_1)(x + a_1 + a_2)(x + a_1 + 2a_2),$$
so wird
$$a = -a_2^2, \quad b = 0, \quad 4a^3 + 27b^2 = -4a^6.$$
Die Zunahme der Wurzelfactoren um eine *gleiche* Gröfse läfst sich also daraus erkennen, dafs $b = 0$ wird.

4) Sind alle drei Wurzeln der Gleichung *reell* und *rational, aber verschieden* und ohne besondern Zusammenhang, so sind a_2 und a_3 positive rationale Gröfsen und es wird $a = -\tfrac{1}{3}(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2)$ immer *negativ;* ferner $b = \tfrac{1}{27}(-a_2 + a_3)(2a_2 + a_3)(a_2 + 2a_3)$ wird *positiv,* wenn $a_3 > a_2$, aber *negativ,* wenn $a_2 > a_3$ ist; daher giebt das *Zeichen* von b an, welche Wurzeldifferenz die *gröfsere* ist. Zuletzt wird $4a^3 + 27b^2 = -a_2^2 . a_3^2 . (a_2 + a_3)^2 = -u^2$ immer *negativ,* aber ein *vollständiges Quadrat.*

5) Ist eine Wurzel *reell* und *rational,* und sind die beiden andern Wurzeln *reell* und *irrational,* so wird
$$a_2 = p - q.\sqrt{r}; \quad a_3 = 2q.\sqrt{r}.$$

Führt man diese Werthe von a_2 und a_3 in die obigen Gleichungen ein, so erhält man

$$a = -\tfrac{1}{3}(p^2+3q^2.r), \quad b = 2p.\tfrac{1}{27}(-p^2+9q^2.r),$$
$$4a^3+27b^2 = -4q^2.r(p^2-q^2.r)^2 = -u^2.r.$$

Die Gröfse a ist alsdann *negativ*, und b wird entweder *negativ* oder *positiv*, je nachdem p^2 *gröfser* oder *kleiner* als $9q^2.r$ ist. Für $p=0$, und eben so für $p^2=9q^2r$, wird $b=0$. Das Vorhandensein von zwei *irrationalen* Wurzeln ist aber daran zu erkennen, dafs die Gröfse $4a^3+27b^2$ *negativ* ist und aus einem quadratischen Factor u^2 und einem nicht quadratischen Factor r besteht, welche den irrationalen Theil der beiden Wurzeln ausmachen.

Anmerkung. In der *Cardani*schen Formel ist hiernach die Gröfse

$$\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{108}(-u^2)} \quad \text{oder} \quad \sqrt{\tfrac{1}{108}(-u^2.r)}$$

immer *imaginär*, wenn die Gleichung drei verschiedene reelle Wurzeln hat.

6) Hat die Gleichung eine *reelle rationale* Wurzel und zwei *imaginäre* Wurzeln, so wird

$$a_2 = p-q.\sqrt{-r}, \quad a_3 = 2q.\sqrt{-r},$$

also

$$a = -\tfrac{1}{3}(p^2-3q^2.r), \quad b = -2p.\tfrac{1}{27}(p^2+9q^2.r),$$
$$4a^3+27b^2 = +4q^2.r(p^2-q^2.r)^2 = +u^2r.$$

Die Gröfse a bleibt entweder *negativ*, oder wird *positiv*, je nachdem p^2 gröfser oder kleiner als $3q^2.r$ ist: für $p^2=3q^2r$ wird $a=0$. Die Gröfse b wird *negativ* oder *positiv*, je nachdem p positiv oder negativ ist, daher entscheidet das *Zeichen* von b über das *Zeichen* von p; für $p=0$ wird $b=0$. Die Gröfse $4a^3+27b^2$ wird immer *positiv* und entweder, wenn $r=1$ ist, ein *vollständiges Quadrat*, oder sie besteht aus einem quadratischen Factor u^2 und einem nicht quadratischen Factor r, welcher den irrationalen und imaginären Theil der beiden Wurzeln bildet. Ist also a *positiv*, so sind *zwei imaginäre* Wurzeln vorhanden; mit Sicherheit kann aber das Vorkommen der zwei imaginären Wurzeln nur daraus erkannt werden, dafs $4a^3+27b^2$ *positiv* ist.

Anmerkung. In der *Cardani*schen Formel ist hiernach der Ausdruck

$$\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)} = \sqrt{\tfrac{1}{108}(u^2.r)}$$

nur dann *reell* und *rational*, wenn zwei *imaginäre* Wurzeln vorhanden sind, deren irrationaler und imaginärer Theil $\sqrt{-3}$ ist, also wenn die Gleichung

von der Form

$$fx = (x+a_1)(x+a_1+p-q.\sqrt{-3})(x+a_1+p+q.\sqrt{-3}) \text{ ist.}$$

7) Hat die Gleichung *drei irrationale* Wurzeln, welche entweder alle drei *reell*, oder unter welchen

8) Zwei *imaginäre* Wurzeln sind, so ist in beiden Fällen

$$a_2 = 3r_1 - \tfrac{1}{2}r_2, \quad a_3 = r_2,$$

wo r_1 und r_2 die oben angegebene Bedeutung haben. Führt man diese Werthe von a_2 und a_3 in die Gleichungen für die Hülfsgröfsen ein, so erhält man die identischen Gleichungen

$$a = a,\ b = b;\ 4a^3+27b^2 = 4a^3+27b^2 = 4a^3+27b^2.$$

Jedoch wird $4a^3+27b^2$ im ersten Fall *negativ*, im zweiten *positiv*.

Hieraus ergiebt sich, dafs sich das Vorkommen der drei irrationalen Wurzeln, gleichviel ob alle drei *reell*, oder zwei derselben *imaginär* sind, aus der Beschaffenheit der obigen Hülfsgröfsen gewöhnlich nicht zum Voraus erkennen läfst.

§. 8.

Die Auflösung einer cubischen Gleichung durch Ermittlung der Wurzeldifferenzen geschieht nun auf folgende Weise.

Die gegebene Gleichung sei

$$(1.)\quad fx = x^3+Ax^2+Bx+C = 0$$
$$= (x+a_1).(x+a_1+a_2).(x+a_1+a_2+a_3).$$

Man setze die Hülfsgröfsen

$$(2.)\quad a = -\tfrac{1}{3}A^2+B = -\tfrac{1}{3}(a_2^2+a_2a_3+a_3^2) = -\tfrac{1}{3}(\alpha^2-3\beta),$$

$$(3.)\quad b = \tfrac{2}{27}A^3-\tfrac{1}{3}A.B+C$$
$$= \tfrac{1}{27}(-a_2+a_3)(2a_2+a_3)(a_2+2a_3) \overset{\supset}{=} \alpha\cdot\tfrac{1}{27}(\alpha^2-9\beta) \text{ und}$$

$$(4.)\quad 4a^3+27b^2 = \pm a_2^2a_3^2(a_2+a_3)^2 = \mp\beta^2.(\alpha^2-4\beta)$$

zusammen.

Dann ist zu untersuchen, ob (ohne auf das Zeichen zu sehen) $\sqrt{(4a^3+27b^2)}$ *rational* oder *irrational* ist, und ob imaginäre Wurzeln vorhanden sind, in welchem Fall $4a^3+27b^2$ *positiv* wird.

Die Bestimmung der Wurzeldifferenzen a_2 und a_3, oder der *Differentiale* α und β der Gleichung, geschieht durch Ergänzung, der Gröfse a zu einem *Quadrat;* jedoch ist dies nicht nöthig, wenn eine der drei Hülfsgröfsen Null ist, indem alsdann, wie später gezeigt werden wird, die Wurzeldifferenzen leichter gefunden werden.

Ist $4a^3+27b^2=-u^2$ *negativ* und ein *Quadrat*, so setze man nach (Gl. 2.)

$-3a=a_2^2+a_2a_3+a_3^2=(a_2+a_3)^2-a_2a_3=s^2-z=(-a_2+a_3)^2+3a_2a_3=d^2+3z$,

also

$$(5.)\quad -3a+z=(a_2+a_3)^2=s^2,\quad -3a-3z=(-a_2+a_3)^2=d^2.$$

Zugleich wird $4a^3+27b^2=-a_2^2a_3^2(a_2+a_3)^2=-z^2.s^2$, also

$$(6.)\quad \frac{4a^3+27b^2}{-3a+z}=\frac{-a_2^2a_3^2(a_2+a_3)^2}{(a_2+a_3)^2}=-z^2.$$

Daher ergänze man die Gröfse $-3a$ zu einem der nächst höheren *Quadrate*, indem man eine Gröfse z zuzählt, deren Quadrat in $4a^3+27b^2$ als Factor enthalten ist. Findet man alsdann durch die Division mit dem Quadrat $-3a+z$ in $4a^3+27b^2$ den Quotienten z^2, so ist $z=a_2a_3$ und

$$-3a+z=s^2=(a_2+a_3)^2,\quad -3a-3z=d^2=(-a_2+a_3)^2,$$

wo $d=-a_2+a_3$ ein Factor der Gröfse b sein mufs. Aus den beiden Gleichungen

$$(7.)\quad \sqrt{(-3a+z)}=a_2+a_3\quad \text{und}\quad \sqrt{(-3a-3z)}=-a_2+a_3$$

können die Werthe der Wurzeldifferenzen berechnet werden.

Dieses Verfahren ist immer leicht, wenn die Gleichung *drei reelle* und *rationale* Wurzeln enthält, also *a negativ* und $4a^3+27b^2$ *negativ* und ein *vollständiges Quadrat* ist. Ergiebt sich aber aus der Untersuchung von $4a^3+27b^2=\mp u^2r$, dafs *irrationale* oder *imaginäre* Wurzeln vorkommen, so setze man nach (Gl. 2.) $-3a=\alpha^2-3\beta$ oder

$$(8.)\quad -3a+3\beta=-3a+3z=\alpha^2.$$

Es ist aber nach (Gl. 3. und 4.)

$$(9.)\quad 27b=\alpha(\alpha^2-9\beta)\quad \text{und}$$

$$(10.)\quad 4a^3+27b^2=\mp\beta^2(\alpha^2-4\beta),\quad \text{also}$$

$$(11.)\quad \frac{4a^3+27b^2}{\alpha^2-4\beta}=\frac{4a^3+27b^2}{-3a-\beta}=\mp\beta^2.$$

Man findet daher α^2, wenn man die Gröfse $-3a$ durch Zuzählen einer Gröfse $3z$, wo z^2 in $4a^3+27b^2$ als Factor enthalten ist, zu einem der nächst höhern Quadrate ergänzt. Findet man alsdann durch die Division von $4a^3+27b^2$ mit $-3a-z$ den Quotienten z^2, so ist $z=\beta$ und $-3a+3z=\alpha^2$, also

$$\alpha=\sqrt{(-3a+3z)}.$$

Die Wurzeldifferenzen a_2 und a_3 können aus den Werthen von $\alpha=2a_2+a_3$ und $\beta=a_2(a_2+a_3)$ berechnet werden.

Dieser Weg ist einzuschlagen, wenn $4a^3+27b^2$ zwar negativ, aber kein vollständiges Quadrat ist, oder wenn $4a^3+27b^2$ positiv ist, also die Gleichung zwei irrationale oder zwei imaginäre Wurzeln hat. In diesen beiden Fällen sind nämlich α und β reelle und rationale Gröfsen, aber a_2 und a_3 werden irrational oder imaginär, weshalb die Ergänzung von $-3a$ zu einem Quadrat der Summe der Wurzeldifferenzen nicht ausführbar ist.

Sind die Werthe von a_2 und a_3 und von $2a_2+a_3=\alpha$ ermittelt, so findet sich nach (Gl. 4. in §. 5.)

$$(12.)\quad a_1 = \tfrac{1}{3}(A-\alpha),$$

wodurch die gegebene Gleichung nach Gl. 1. in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden kann.

Die Gröfsen s^2 oder α^2 sind ***Quadrate,*** welche der Hülfsgröfse $-3a$ nahe liegen; daher hat man nun nur wenige Factoren z von $4a^3+27b^2$ zu versuchen. Ist aber die Ergänzung von $-3a$ zu einem Quadrat nicht möglich, indem die Division von $4a^3+27b^2$ mit $-3a+z$ oder mit $-3a+z$ (wo z^2 ein Factor von $4a^3+27b^2$ ist) für alle möglichen Werthe von z entweder nicht aufgeht, oder der Quotient nicht gleich z^2 wird, so enthält die Gleichung ***drei irrationale*** Wurzeln, und sie kann dann nur dadurch in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden, dafs man nach (§. 3.)

$$(13.)\quad fx = (x+\tfrac{1}{3}A-r_1)(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(r_1-r_2))(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(r_1+r_2))$$

setzt und die Gröfsen

$$(14.)\quad \begin{cases} r_1 = \sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w}, & r_2 = (\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}).\sqrt{-3}, \\ v = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)}, & w = +\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)} \end{cases}$$

durch Einführung der Werthe von a und b bildet.

§. 9.

Diese Methode der Auflösung cubischer Gleichungen pafst sowohl für ***numerische,*** als ***Buchstaben***gleichungen, und gründet sich im Allgemeinen auf einfache Versuche, welche denjenigen bei der Ausziehung einer Quadratwurzel ähnlich und nach der Beschaffenheit der Wurzeln auf verschiedene Weise auszuführen sind. Die Rechnung kann noch bedeutend abgekürzt werden, wenn man für jede besondere Form, welche die Wurzeln haben können, eine besondere Auflösung befolgt. Da aber die Form der Wurzeln einer cubischen Gleichung nicht aus der Beschaffenheit der Coëfficienten derselben, sondern nur durch Bildung der Hülfsgröfsen a, b und $4a^3+27b^2$ erkannt werden kann, so ist es gut, die cubischen Gleichungen nach den verschiedenen

Formen, welche die ***Hülfsgröfsen*** annehmen können, einzutheilen, und für jede besondere Form derselben eine besondere Auflösung zu befolgen.

Werden diejenigen Fälle, wo die Hülfsgröfsen bei verschiedener Beschaffenheit der Wurzeln *dieselbe* Form annehmen, vereinigt, und werden die beiden Fälle, wo die Gleichung keine rationale Wurzel enthält (weil dieses nicht immer aus der Form der Hülfsgröfsen, sondern oft erst bei der Ausführung der Auflösung zu erkennen ist), den übrigen als besondere Fälle angeschlossen, so lassen sich nach (§. 7.) folgende sechs Hauptformen unterscheiden:

I. Wenn eine der drei Hülfsgröfsen gleich *Null* ist.

1) Wenn $a = 0$,

2) Wenn $b = 0$,

3) Wenn $4a^3 + 27b^2 = 0$ ist.

II. Wenn alle drei Hülfsgröfsen bestimmte Werthe haben:

4) Wenn $4a^3 + 27b^2 = -u^2$ *negativ* und ein *Quadrat* ist.

5) Wenn $4a^3 + 27b^2 = -u^2.r$ *negativ*, oder *kein* vollständiges Quadrat ist.

6) Wenn $4a^3 + 27b^2$ *positiv* ist.

Hat man die Hülfsgröfsen aufgestellt, so bringt man die gegebene Gleichung unter eine dieser sechs Hauptformen und führt die Auflösung auf eine verschiedene, von der Hauptform abhängige Weise aus.

Anmerkung. Aus den obigen Entwicklungen läfst sich leicht sehen, dafs man durch Einführung willkürlicher Gröfsen und durch Umformung der cubischen Gleichungen niemals zu Ausdrücken gelangt, die in *allen* Fällen die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel gestatten, und dafs es daher keine zur Auflösung *aller* cubischen Gleichungen gleichmäfsig brauchbare Formel giebt. Durch die *Cardani*sche Formel kann z. B. für die 1te, 2te, 3te und 6te Hauptform nur eine, für die 4te und 5te aber keine Wurzel gefunden werden.

§. 10.

Erste Hauptform $a = 0$.

Ist

$$a = -\tfrac{1}{3}A^2 + B = -\tfrac{1}{3}(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2) = 0,$$

so hat die Gleichung nach (§. 7.) entweder drei *gleiche*, oder *eine reelle* und *zwei imaginäre* Wurzeln. Im ersten Fall sind die Wurzeldifferenzen $a_2 = a_3 = 0$; im zweiten werden sie imaginär. In beiden Fällen ist

$$B = \tfrac{1}{3}A^2,$$

daher hat die Gleichung die Form

$$(1.)\quad fx = x^3 + Ax^2 + \tfrac{1}{3}A^2.x + C = 0.$$

Ist dann auch

$$C = \tfrac{1}{27}A^3,$$

so ist

$$(2.)\quad fx = (x + \tfrac{1}{3}A)^3,$$

und die Gleichung hat drei *gleiche* Wurzeln. Ist C nicht gleich $\frac{1}{27}A^3$, so ist $fx = x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2.x + C = 0$, also $x^3 + Ax^2 + \frac{1}{3}A^2.x + \frac{1}{27}A^3 = \frac{1}{27}A^3 - C$ oder $(x + \frac{1}{3}A)^3 = \frac{1}{27}A^3 - C$, folglich

$$(3.)\quad x = -\tfrac{1}{3}A + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{27}A^3 - C)} = -\tfrac{1}{3}A + \sqrt[3]{r} \text{ und}$$

$$(4.)\quad a_1 = \tfrac{1}{3}A - \sqrt[3]{r}.$$

Durch Division der gegebenen Gleichung mit $x + a_1$ erhält man die quadratische Gleichung

$$(5.)\quad x^2 + (\tfrac{2}{3}A + \sqrt[3]{r}).x + \tfrac{1}{3}A^2 + \tfrac{1}{3}A.\sqrt[3]{r} + \sqrt[3]{r^2} = 0.$$

Diese Gleichung giebt für die beiden andern Wurzeln:

$$(6.)\quad x = -\tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} \pm \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} \times \sqrt{-3},$$

folglich ist die gegebene Gleichung

$$\begin{aligned}(7.)\quad fx &= x^3 + Ax^2 + \tfrac{1}{3}A^2.x + C = 0 \\ &= (x + \tfrac{1}{3}A - \sqrt[3]{r}) \times (x + \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} - \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} \times \sqrt{-3}) \\ &\quad \times (x + \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r'} + \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} \times \sqrt{-3})\end{aligned}$$

und die Wurzeldifferenzen sind

$$(8.)\quad a_2 = \tfrac{3}{2}.\sqrt[3]{r} - \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} \times \sqrt{-3}, \qquad a_3 = \sqrt[3]{r} \times \sqrt{-3}.$$

Ist daher $a = 0$, so macht man

$$(9.)\quad r = \tfrac{1}{27}A^3 - C.$$

Ist dieses gleich Null, so hat die Gleichung drei *gleiche* Wurzeln $x = -\frac{1}{3}A$; hat aber r einen andern Werth, so giebt man der Gröfse

$$(10.)\quad \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{27}A^3 - C)}$$

die einfachste Form und führt sie in die (Gl. 7.) ein. Hier kann $\sqrt[3]{r}$ rational oder irrational sein.

§. 11.

Beispiele zur ersten Hauptform.

Nr. 1. $x^3 - \frac{5}{2}.x^2 + \frac{25}{12}.x - \frac{125}{216} = 0,$

$$a = -\frac{25}{12} + \frac{25}{12} = 0, \quad r = \frac{1}{27}A^3 - C = -\frac{125}{8.27} + \frac{125}{216} = 0.$$

Also $r = 0$, und $\frac{1}{3}A = -\frac{5}{6}$, folglich

$$fx = (x - \tfrac{5}{6}).$$

Nr. 2. $x^3 + 15x^2 + 75x + 98 = 0,$

$$a = -\frac{225}{3} + 75 = 0, \quad r = \frac{1}{27}A^3 - C = \frac{15^3}{27} - 98 = 27,$$

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{27} = 3, \quad \tfrac{1}{3}A = 5;$$

$$\tfrac{1}{3}A - \sqrt[3]{r} = 5 - 3 = 2; \quad \tfrac{1}{3}A + \tfrac{1}{2}.\sqrt[3]{r} = 5 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{13}{2},$$

folglich

$$fx = (x+2)(x + \tfrac{13}{2} - \tfrac{3}{2}.\sqrt{-3})(x + \tfrac{13}{2} + \tfrac{3}{2}.\sqrt{-3}).$$

Nr. 3. $x^3 + 4x^2 + \frac{16}{3}x - \frac{811}{27} = 0,$

$$a = -\frac{4^2}{3} + \frac{16}{3} = 0, \quad r = \frac{1}{27}A^3 - C = \frac{4^3}{27} + \frac{811}{27} = \frac{875}{27} = \frac{125.7}{27},$$

$$\sqrt[3]{r} = \tfrac{5}{3}.\sqrt[3]{7}, \quad \tfrac{1}{3}A = \tfrac{4}{3},$$

folglich

$$fx = (x + \tfrac{4}{3} - \tfrac{5}{3}.\sqrt[3]{7}).(x + \tfrac{4}{3} + \tfrac{5}{6}.\sqrt[3]{7} - \tfrac{5}{6}.\sqrt[3]{7} \times \sqrt{-3})$$
$$\times (x + \tfrac{4}{3} + \tfrac{5}{6}.\sqrt[3]{7} + \tfrac{5}{6}.\sqrt[3]{7} \times \sqrt{-3}).$$

§. 12.

Zweite Hauptform. $b = 0$.

Findet sich für die Hülfsgröfse a ein bestimmter Werth und dann

$$b = \frac{2}{27}A^3 - \frac{1}{3}A.B + C = \frac{1}{27}(-a_2 + a_3)(2a_2 + a_3)(a_2 + 2a_3) = 0,$$

so ist entweder nach (§. 7. Nr. 3.) $a_3 = a_2$, oder nach (Nr. 5 und 6.), wenn daselbst $p = 0$ gesetzt wird, $a_2 = q.\sqrt{r}$; $a_3 = 2q.\sqrt{r}$; wo r positiv oder negativ sein kann.

Im ersten Fall wird

$$fx = x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0 = (x + a_1)(x + a_1 + a_2)(x + a_1 + 2a_2);$$

in den beiden andern Fällen

$$fx = (x + a_1)(x + a_1 - q.\sqrt{r})(x + a_1 + q.\sqrt{r})$$
$$= (x + a_1 - q.\sqrt{r})(x + a_1)(x + a_1 + q.\sqrt{r}).$$

Mithin kann bei veränderter Stellung der Wurzelfactoren auch hier $a_3 = a_2$ gesetzt werden. Es ist also für $a_3 = a_2$:

$$(1.) \quad a = -\tfrac{1}{3}(a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^2) = -a_2^2$$

und folglich

$$(2.) \quad a_2 = \sqrt{-a}.$$

Ferner, weil

$$(3.)\quad A = 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 3a_1 + 3a_2$$

ist, wird

$$(4.)\quad a_1 = \tfrac{1}{3}A - a_2 = \tfrac{1}{3}A - \sqrt{-a},\quad a_1 + a_2 = \tfrac{1}{3}A,\quad a_1 + 2a = \tfrac{1}{3}A + \sqrt{-a},$$

folglich

$$(5.)\quad fx = (x + \tfrac{1}{3}A - \sqrt{-a})(x + \tfrac{1}{3}A)(x + \tfrac{1}{3}A + \sqrt{-a}).$$

Setzt man hieraus die Gleichung zusammen, so findet sich

$$(6.)\quad fx = x^3 + Ax^2 + (\tfrac{1}{3}A^2 + a)x + \tfrac{1}{27}A^3 + \tfrac{1}{3}A.a = 0$$
$$= x^3 + Ax^2 + Bx + \tfrac{1}{3}A\cdot(-\tfrac{2}{9}.A^2 + B) = 0.$$

Hat demnach die gegebene Gleichung diese Form, so wird $b = 0$, und sie hat immer ***eine reelle und rationale*** Wurzel $x = -\frac{1}{3}A$. Die beiden andern Wurzeln sind ebenfalls ***reell*** und ***rational,*** wenn ***a negativ*** und ein ***Quadrat*** ist; sie werden aber entweder ***irrational,*** oder ***imaginär,*** wenn ***a*** entweder ***negativ,*** aber ***kein Quadrat,*** oder wenn ***a positiv*** ist.

§. 13.
Beispiele zur zweiten Hauptform.

Nr. 1. $x^3 + 6x^2 - 13x - 42 = 0$,

$$a = -\tfrac{6^2}{3} - 13 = -25;\quad b = 2\cdot\tfrac{6^3}{27} + \tfrac{6.13}{3} - 42 = 16 + 26 - 42 = 0;$$
$$\tfrac{1}{3}A = \tfrac{6}{3} = +2;\quad a_2 = \sqrt{-a} = \sqrt{25} = 5;$$
$$\tfrac{1}{3}A - \sqrt{-a} = 2 - 5 = -3,\quad \tfrac{1}{3}A + \sqrt{-a} = 2 + 5 = +7;$$

folglich

$$fx = (x-3)(x+2)(x+7).$$

Nr. 2. $x^3 + 9x^2 - 5x - 69 = 0$,

$$a = -\tfrac{9^2}{3} - 5 = -32;\quad b = \tfrac{2.9^3}{27} + \tfrac{9.5}{3} - 69 = 0;$$
$$\tfrac{1}{3}A = \tfrac{9}{3} = 3,\quad \sqrt{-a} = \sqrt{32} = 4.\sqrt{2},$$

folglich

$$fx = (x+3)(x+3-4.\sqrt{2})(x+3+4.\sqrt{2}).$$

Nr. 3. $x^3 - 9x^2 + 52x - 102 = 0$,

$$a = -\tfrac{9^2}{3} + 52 = 25,\quad b = -\tfrac{2.9^3}{27} + \tfrac{9.52}{3} - 102 = 0,$$
$$\tfrac{1}{3}A = -\tfrac{9}{3} = -3,\quad \sqrt{-a} = \sqrt{-25} = 5.\sqrt{-1},$$

folglich

$$fx = (x-3)(x-3-5.\sqrt{-1})(x-3+5.\sqrt{-1}).$$

§. 14.

Dritte Hauptform. $4a^3+27b^2=0$.

Finden sich aus der gegebenen Gleichung für a und b bestimmte Werthe, ist aber $4a^3+27b^2=0$, so hat die Gleichung nach (§. 7. Nr. 2.) *zwei gleiche* Wurzeln, indem eine der beiden Wurzeldifferenzen a oder a_3 Null ist. Setzt man nun die *gleichen* Wurzeln $x=-n$, so wird

(1.) $$fx = x^3+Ax^2+Bx+C = 0 = (x+n)(x+n)(x+n+z)$$

und es ist

$$A = 3n+z, \quad B = n(3n^2+2z), \quad C = n^2(n+z), \quad \text{also}$$

(2.) $$\begin{cases} a = -\frac{1}{3}A^2+B = -\frac{1}{3}z^2, \quad b = \frac{2}{27}A^3+\frac{1}{3}A.B+C = \frac{2}{27}z^3, \\ 4a^3+27b^2 = -4\cdot\frac{z^6}{27}+27\cdot\frac{4.z^6}{27^2} = 0, \quad \text{mithin} \end{cases}$$

(3.) $$\begin{cases} z = \sqrt{-3a} \quad \text{oder} \quad z = \sqrt[3]{\tfrac{27}{2}b} = 3.\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}, \\ n = \frac{1}{3}A-\frac{1}{3}z = \frac{1}{3}A-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}, \quad n+z = \frac{1}{3}A+2.\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}, \end{cases}$$

folglich ist die Gleichung

(4.) $$\begin{aligned} fx &= (x+\tfrac{1}{3}A-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b})^2\times(x+\tfrac{1}{3}A+2.\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}) \\ &= x^3+Ax^2+(\tfrac{1}{3}A^2-3.\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}b^2})x+\tfrac{1}{27}A^3-\tfrac{1}{3}A.\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}b^2}+b = 0. \end{aligned}$$

Für ein *positives* b sind die zwei *kleinsten*, für ein *negatives* b die zwei *gröfsten* Wurzelfactoren gleich.

Die Gröfse a ist hier *negativ*, und $-3a$ ein *Quadrat*. Von den beiden Wurzeldifferenzen mufs, weil $4a^3+27b^2=-a_2^2a_3^2(a_2+a_3)^2=0$ ist, die eine gleich Null, die andere eine ganze positive Gröfse sein; ob $a_2=0$ oder $a_3=0$ sei, entscheidet das Zeichen von b. Es ist nämlich

$$b = \tfrac{1}{27}(-a_2+a_3)(2a_2+a_3)(a_2+2a_3),$$

also für $a_2=0$, $b=+\frac{2}{27}a_3^3$ und für $a_3=0$, $b=-\frac{2}{27}a_2^3$.

Da eine Quadratwurzel leichter auszuziehen ist, als eine Cubikwurzel, so setze man, wenn $4a^3+27b^2=0$ ist, die Gröfsen a und b zusammen und

(5.) $$z = \sqrt{-3a}.$$

Ist alsdann b positiv, so wird $z=a_3$ und $a_2=0$; ist b negativ, so wird $z=a_2$ und $a_3=0$. Die Gröfse a_1 wird, weil $a_1=\frac{1}{3}(A-(2a_2+a_3))$ ist, für $a_2=0$, wo b positiv ist,

(6.) $$a_1 = \tfrac{1}{3}(A-a_3) = \tfrac{1}{3}A-\tfrac{1}{3}z.$$

Dagegen für $a_3=0$, wo b negativ ist,

(7.) $$a_1 = \tfrac{1}{3}(A-2a_2) = \tfrac{1}{3}A-\tfrac{2}{3}\cdot z.$$

Demnach ist die Gleichung, je nachdem $a_2=0$ oder $a_3=0$ ist, entweder

$$(8.)\quad fx = (x+a_1)^2.(x+a_1+a_3) \text{ oder}$$

$$(9.)\quad fx = (x+a_1).(x+a_1+a_2)^2.$$

§. 15.

Beispiele zur dritten Hauptform.

Nr. 1. $x^3+x^2-33x+63 = 0$,

$$a=-\frac{100}{3},\quad b=\frac{2000}{27},\quad 4a^3+27b^2=-4\cdot\left(\frac{100}{3}\right)^3+27\cdot\left(\frac{2000}{27}\right)^2 = 0.$$

Hier ist b positiv, also $a_2=0$, mithin $a=-\frac{1}{3}a_3^2$, $\sqrt{-3a}=\sqrt{100}=10$; $a_3=10$, $a_1=\frac{1}{3}(A-a_3)=\frac{1}{3}-\frac{10}{3}=-3$, $a_1+a_3=-3+10=+7$, folglich

$$fx = (x-3)^2.(x+7).$$

Nr. 2. $x^3+8x^2+5x-50=0$.

$$a=-\frac{49}{3}=-\frac{7^2}{3};\quad b=-\frac{686}{27}=-\frac{2.7^3}{27},$$

$$4a^3+27b^2 = 4\cdot\left(\frac{-7^2}{3}\right)+27\cdot\left(\frac{2.7^3}{3}\right)^2 = 0.$$

Da b negativ ist, so wird $a_3=0$, und $a_2=\sqrt{-3a}=\sqrt{49}=7$, $a=\frac{1}{3}(A-2a_2)$ $=\frac{8}{3}-\frac{2.7}{3}=-2$, $a_1+a_2=-2+7=+5$, folglich

$$fx = (x-2)(x+5)^2.$$

§. 16.

Vierte Hauptform. $4a^3+27b^2=-u^2$.

Giebt die Gleichung

$$fx = x^3+Ax^2+Bx+C = 0 = (x+a_1)(x+a_1+a_2).(x+a_1+a_2+a_3)$$

für die Hülfsgröfsen a, b und $4a^3+27b^2$ bestimmte Werthe, ist aber a ***negativ*** und man findet durch Ausziehen der Quadratwurzel, dafs

$$(1.)\quad 4a^3+27b^2 = -u^2 = -a_2^2a_3^2(a_2+a_3)^2$$

ist, so wird

$$(2.)\quad u = a_2.a_3(a_2+a_3).$$

Eine solche Gleichung kann ***keine imaginären*** Wurzeln haben. Die Wurzeln können jedoch entweder alle ***drei rational,*** oder auch alle ***drei irrational*** sein; dies läfst sich aus der Beschaffenheit der Gröfsen b und u erkennen.

Es müssen nämlich, wenn drei verschiedene rationale Wurzeln vorhanden sind, die Wurzeldifferenzen a_2 und a_3 ganze positive und rationale

Gröfsen, und es darf weder $a_2 = a_3$ noch $a_2 = 0$ oder $a_3 = 0$ sein, weil sonst entweder b oder u gleich Null sein würde. Da nun

$$(3.) \quad 27b = (-a_2 + a_3).(2a_2 + a_3).(a_2 + 2a_3)$$

ist, so müssen die Gröfsen $27b$ und u *gerade* Zahlen sein, und jede mufs wenigstens drei verschiedene Factoren haben. Hat eine derselben ihrer nur zwei, so kann dieses bei rationalen Wurzeln nur dann sein, wenn entweder $a_3 = a_2 + 1$, oder $a_2 = a_3 + 1$ ist, wo alsdann $b = m(m + 1)$ wird; oder auch, wenn $a_2 = 1$ oder $a_3 = 1$ ist, in welchem Fall $u = n(n + 1)$ ist. Ist daher entweder b oder u eine *ungerade*, oder eine *Primzahl*, so sind immer *drei irrationale* Wurzeln vorhanden; dagegen läfst sich nicht bestimmt erkennen, dafs keine drei irrationalen Wurzeln vorhanden sein können, wenn $27b$ und u *gerade* Zahlen sind und drei Factoren haben. Der Fall würde sich nur zeigen, nachdem man die Auflösung ohne Erfolg versucht hat. Wenn drei irrationale Wurzeln vorhanden sind, mufs die Gleichung auf eine andere Weise in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden. Sind dagegen alle drei Wurzeln rational, so setze man

$$(4.) \quad -3a = a_2^2 + a_2.a_3 + a_3^2, \; 27b = (-a_2 + a_3).(2a_2 + a_3).(a_2 + 2a_3), \; u = a_2.a_3.(a_2 + a_3)$$

und führe die Auflösung nach (§. 8.) aus. Es ist nämlich

$$-3a = a_2^2 + a_2.a_3 + a_3^2 = (a_2 + a_3)^2 - a_2 a_3 = s^2 - z = (-a_2 + a_3)^2 + 3a_2 a_3 = d^2 + 3z,$$
$$27b = (-a_2 + a_3)(2a_2 + a_3)(a_2 + 2a_3) = d.(2s^2 + z),$$
$$u = a_2.a_3(a_2 + a_3) = z.s \quad \text{oder}$$

$$(5.) \quad -3a + z = (a_2 + a_3)^2 = s^2, \quad -3a - 3z = (-a_2 + a_3)^2 = d^2.$$

Daher zähle man zu $-3a$, welches immer *positiv* ist, eine Zahl z, welche von u ein Factor ist, so dafs $-3a + z$ das *Quadrat* einer Gröfse s wird, welche den andern Factor von u ausmacht. Dieses geschieht am einfachsten, wenn man zuerst aus $-3a$ die Quadratwurzel näherungsweise sucht, dieselbe zu einer Gröfse y erhöht, welche von u ein Factor ist, und dann den andern Factor z von u zu $-3a$ zählt. Ist dann $-3a + z = y^2$, so ist $y = s = a_2 + a_3$ und $z = a_2.a_3$. Ist die Summe s und das Product z der Wurzeldifferenzen gefunden, so macht man (nach Gl. 5.) $d^2 = (-a_2 + a_3)^2$. Dies giebt die beiden Gleichungen

$$(6.) \quad a_2 + a_3 = s \quad \text{und} \quad -a_2 + a_3 = d$$

und hieraus, je nachdem b positiv oder negativ ist, entweder

$$(7.) \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(s - d), \quad a_3 = \tfrac{1}{2}(s + d) \quad \text{oder}$$
$$(8.) \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(s + d), \quad a_3 = \tfrac{1}{2}(s - d).$$

Das Zeichen von b giebt an, welche der beiden Wurzeldifferenzen die gröſsere ist; für ein positives b wird $a_3 > a_2$, für ein negatives b wird $a_2 > a_3$. Daher sind die Wurzeldifferenzen im ersten Fall nach (Gl. 7.), im zweiten nach (Gl. 8.) zu berechnen. Sind a_2 und a_3 gefunden, so ist

$$(9.)\qquad a_1 = \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}(2a_2 + a_3)$$

der Werth von a_1, durch welchen die gegebene Gleichung in ihre drei Wurzelfactoren zerlegt werden kann. Findet sich kein ganzer und rationaler Werth für a_2 und a_3, so hat die Gleichung drei irrationale Wurzeln und ist auf diesem Wege nicht auflösbar.

§. 17.

Beispiele zur vierten Hauptform.

Nr. 1. $x^3 - 24x^2 + 153x - 130 = 0,$

$$a = -39;\ b = 70;\ 4a^3 + 27b^2 = -104976 = -324^2;\ u = 324;$$

$$\sqrt{-3a} = \sqrt{117} = 10 \text{ bis } 11.$$

Da u den Factor 12 hat, so ergänze man $-3a$ zu 144. Dann ist

$$-3a + z = 117 + 27 = 144 = 12^2 = s^2,\ u = z.s = 324 = 27.12, \text{ also ist}$$

$$s = 12,\ z = 27,\ d^2 = -3a - 3z = 117 - 3.27 = 36 = 6^2.$$

Da b positiv ist, so ist $a_2 < a_3$, also

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(s-d) = \tfrac{1}{2}(12-6) = 3,\quad a_3 = \tfrac{1}{2}(s+d) = \tfrac{1}{2}(12+6) = 9,$$

$$a_1 = \tfrac{1}{3}A - \tfrac{1}{3}(2a_2 + a_3) = -\frac{24}{3} - \frac{2.3+9}{3} = -8 - 5 = -13,$$

$$a_1 + a_2 = -13 + 3 = -10;\quad a_1 + a_2 + a_3 = -10 + 9 = -1, \text{ folglich}$$

$$fx = (x-13).(x-10).(x-1).$$

Nr. 2. $x^3 - 35x^2 + 126x + 720 = 0,$

$$a = -\frac{847}{3},\ b = -\frac{26620}{27};\quad 4a^3 + 27b^2 = -63776196 = -7986^2;$$

$$u = 7986 = 2.3993 = 2.3.1331 = 2.3.11.121,$$

$$\sqrt{-3a} = \sqrt{847} = 29 \text{ bis } 30.$$

Da 33 ein Factor von u ist, welcher $\sqrt{847}$ am nächsten liegt, so ergänze man die Gröſse $-3a$ zu $33^2 = 1089$. Dann ist

$$-3a + z = 847 + 242 = 1089 = 33^2,\ u = 33 \times 242,\ s = 33,\ z = 242,$$

$$d^2 = -30 - 3z = 847 - 3.242 = 121,\quad d = 11.$$

Da b negativ ist, so ist $a_2 > a_3$, also

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(s+d) = \frac{33+11}{2} = 22, \quad a_3 = \tfrac{1}{2}(s-d) = \frac{33-11}{2} = 11,$$

$$a_1 = -\frac{35}{3} - \frac{2.22+11}{3} = -30, \quad a_1 + a_2 = -30+22 = -8,$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -8 + 11 = +3 \text{ und}$$

$$fx = (x-30)(x-8)(x+3).$$

Nr. 3. $x^3 - 58x^2 + 963x - 3906 = 0,$

$$a = -\frac{475}{3}, \quad b = \frac{7000}{27}, \quad 4a^3 + 27b^2 = -14062500 = -3750^2,$$

$$u = 3750 = 25.150, \quad \sqrt{-3a} = \sqrt{475} = 21 \text{ bis } 22,$$

daher die Ergänzung zu $25^2 = 625$ und

$$-3a + z = 475 + 150 = 625 = 25^2, \quad s = 25, \quad z = 150,$$

$$-3a - 3z = 475 - 450 = 25 = s, \quad d = s.$$

b ist positiv, als $a_3 > a_2$ und

$$a_2 = \frac{25-5}{2} = 10, \quad a_3 = \frac{25+5}{2} = 15, \quad a_1 = -\frac{58}{3} - \frac{2.10+15}{3} = -31,$$

$$a_1 + a_2 = -31 + 10 = -21; \quad a_1 + a_2 + a_3 = -21 + 15 = -6,$$

$$fx = (x-31)(x-21)(x-6).$$

Nr. 4. $x^3 + 17x^2 - 224x - 2940 = 0.$

$$a = -\frac{961}{3}, \quad b = -\frac{35282}{27}, \quad 4a^3 + 27b^2 = -85377600 = -9240^2,$$

$$u = 9240 = 40.231 = 40.11.21, \quad \sqrt{-3a} = \sqrt{961} = 31.$$

Factoren von u, gröfser als 31, sind 33, 35, 40, u. s. w. Dies giebt

$u = 33.280 - 3a + z = 961 + 280 = 1241$, also kein Quadrat;

$u = 35.264 - 3a + z = 961 + 264 = 1225 = 35^2$, also

$$s = 35, \quad z = 264, \quad d^2 = -3a - 3z = 961 - 792 = 169 = 13^2, \quad d = 13.$$

b ist negativ, also $a_2 > a_3$ und

$$a_2 = \frac{35+13}{2} = 24, \quad a_3 = \frac{35-13}{2} = 11, \quad a_1 = \frac{17}{3} - \frac{2.24+11}{3} = -14,$$

$a_1 + a_2 = -14 + 24 = +10; \quad a_1 + a_2 + a_3 = +10 + 11 = 21$, folglich

$$fx = (x-14)(x+10)(x+21).$$

Nr. 5. $x^3 - 7x + 7 = 0,$

$$a = -7, \quad b = +7, \quad 4a^3 + 27b^2 = -49 = -7^2; \quad u = 7.$$

Da b und u *ungerade* Zahlen sind, so hat die Gleichung drei irrationale Wurzeln.

Nr. 6. $x^3 - 15x^2 + 72x - 109 = 0.$

$$a = -3, \quad b = +1, \quad 4a^3 + 27b^2 = -81 = -9^2.$$

Hier sind ebenfalls drei irrationale Wurzeln vorhanden.

Nr. 7. $x^3-(17c-5d)x^2+(91c^2-70cd-4d^2)x-147c^3+12c^2d$
$+245cd^2-20d^3=0.$

$$a=-\tfrac{1}{3}(16c^2+40cd+37d^2),\quad b=\tfrac{1}{27}(128c^3+480c^2d+312cd^2-110d^3),$$
$$4a^3+27b^2=-16d^2(16c^2+40cd+21d^2)^2,\quad u=4d(16c^2+40cd+21d^2),$$
$$-3a=16c^2+40cd+37d^2=4^2c^2+8c.7d+49d^2-16cd-12d^2,$$
$$-3a+4d(4c+3d)=4^2c^2+8c\times 7d+49d^2=(4c+7d)^2,$$
$$u=4d(4c+3d)(4c+7d),$$
$$-3a-12d(4c+3d)=16c^2-8cd+d^2=(4c-d)^2,\ \text{also}$$
$$s=a_2+a_3=4c+7d,\quad z=4d(4c+3d),\quad d=-a_2+a_3=4c-d,$$
$$a_2=\tfrac{8}{2}d=4d;\quad a_3=\tfrac{1}{2}(8c+6d)=4c+3d;\quad 2a_2+a_3=4c+11d,$$
$$a_1=\tfrac{1}{3}(-17c+5d)-\tfrac{1}{3}(4c+11d)=-7c-2d,$$
$$a_1+a_2=-7c-2d+4d=-7c+2d;$$
$$a_1+a_2+a_3=-7c+2d+4c+3d=-3c+5d\ \text{und}$$
$$fx=(x-7c-2d).(x-7c+2d).(x-3c+5d).$$

§. 18.

Fünfte Hauptform. $4a^3+27b^2=-u^2.r.$

Giebt die Gleichung für die Hülfsgröfsen a und b bestimmte Zahlenwerthe und ist $4a^3+27b^2$ negativ und die Quadratwurzel aus $-(4a^3+27b^2)$ irrational, so dafs $4a^3+27b^2$ keinen quadratischen Factor r hat, so hat die Gleichung nur *reelle,* aber darunter entweder zwei oder drei *irrationale* Wurzeln. Ist die eine Wurzel rational, so ist die Gleichung auf dem hier angegebenen Wege auflöslich; sind aber alle drei Wurzeln irrational, so mufs man sie auf einem andern Wege suchen. Dafs eine Gleichung von obiger Form keine rationale Wurzel hat, läfst sich gewöhnlich daraus erkennen, dafs die Gröfsen b und u *Primzahlen* sind, oder dafs $r>-4a$ ist, häufig aber nur dadurch, dafs die Auflösung nicht ausführbar ist.

Man setze

(1.) $fx=x^3+Ax^2+Bx+C=0=(x+a_1)(x+a_1+p-q.\sqrt{r})(x+a_1+p+q.\sqrt{r}).$

Dann ist

(2.) $a_2=p-q.\sqrt{r},\quad a_3=2q.\sqrt{r};\quad \alpha=2a_2+a_3=2p.$ Ferner

(3.) $A=3a_1+2p,\quad B=3a_1^2+4a_1.p+p^2-q^2r,\quad C=a_1^3+2a_1^2.p+a_1(p^2-q^2r).$

Hieraus ergiebt sich für die drei Hülfsgröfsen:

$$(4.)\quad a=-\tfrac{1}{3}(p^2+3q^2r),\qquad b=2p\times\tfrac{1}{27}(-p^2+9q^2.r);$$
$$4a^3+27b^2=-4q^2.r.(p^2-q^2.r)^2=-u^2.r,\ \text{also}$$
$$(5.)\quad u=2q.\sqrt{(p^2-q^2r)}.$$

Zuerst suche man die Gröfsen u^2 und r, indem man den Ausdruck $4a^3+27b^2$ in zwei Factoren zerlegt, deren einer ein Quadrat ist, der andere nicht. Ist $4a^3+27b^2$ eine sehr grofse Zahl, an welcher die Gröfse r nicht leicht zu erkennen ist, so trenne man nach und nach quadratische Factoren ab, bis u^2 und r gefunden sind.

Die Gröfsen a_1, p und q müssen rational sein, und wenn die Coëfficienten der Gleichung ganze rationale Gröfsen sind, mufs a_1 eine ganze Zahl sein; die Gröfsen p und q können aber entweder ganze Zahlen, oder Brüche von der Form $\frac{1}{2}(2y+1)$ sein. Um die Fälle zu unterscheiden, wo p und q ganze Zahlen oder Brüche sind, setze man zuerst

$$p = \tfrac{1}{2}(2m+1), \quad q = \tfrac{1}{2}(2n+1). \text{ Dann ist}$$
$$p^2-q^2.r = m(m+1)-r.n.(n+1)-\tfrac{1}{4}(r-1).$$

Sind also p und q Brüche von obiger Form, so können nach (Gl. 3.) B und C nur dann ganze Zahlen sein, wenn $r=4h+1$ ist. Setzt man hierauf in (Gl 4. und 5.) $p=\frac{1}{2}(2m+1)$, $q=\frac{1}{2}(2n+1)$, $r=4h+1$, so erhält man

$$a = -\tfrac{1}{3}[m(m+1)+3n(n+1)(4h+1)+3h+1],$$
$$b = (2m+1)\cdot\tfrac{1}{27}[-m(m+1)+9n(n+1)(4h+1)+9h+2],$$
$$u = (2n+1)[m(m+1)-n(n+1)(4h+1)-h].$$

Da hier $m(m+1)$ und $n(n+1)$ *gerade* Zahlen sind, so sind b und u nur dann gerade, wenn h eine gerade Zahl, also $r=8h+1$ ist; in welchem Falle aber a eine ungerade Zahl ist. Doch ergiebt sich Folgendes:

Ist r nicht $=4h+1$, so sind p und q immer *ganze* Zahlen.

Ist $r=4h+1$, und sind b und u gerade, so sind p und q ebenfalls ganze Zahlen.

Ist $r=4h+1$ und sind b und u ungerade, so sind p und q Brüche von der Form $\frac{1}{2}(2y+1)$.

Ist $r=8h+1$, und sind b und u gerade, a aber ungerade, so bleibt die Form von p und q zweifelhaft.

Ferner ist zu beachten, dafs q immer *positiv* ist, dafs aber p und u *positiv* oder *negativ* sein können. Die Gröfse p hat nach (Gl. 4.) dasselbe Zeichen wie b, wenn $9q^2.r>p^2$ ist, aber das entgegengesetzte Zeichen, wenn $p^2>9q^2.r$ ist. Die Gröfse u ist negativ, wenn $q^2.r>p^2$ ist. Für $p=0$ wird $b=0$ und die Gleichung gehört zur zweiten Hauptform. Ist $p=-a_1$, so wird $fx=(x+a_1)(x-q.\sqrt{r})(x+q.\sqrt{r})$, $A=a_1$, $B=-q^2r$, $C=-a_1.q^2r=A.B$ und

$$(6.) \quad fx = (x+A).(x-\sqrt{-B}).(x+\sqrt{-B}).$$

Ist daher $C = A.B$, so kann die Gleichung nach vorstehender Formel in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden.

Die Gröfsen p und q werden, wenn u und r gefunden sind, auf folgende Weise ermittelt. Man setze nach (Gl. 4. und 5.)

$$(7.)\quad -3a = p^2 + 3q^2.r;\ \text{also}\ p^2 = -3a - 3q^2.r = -3a - 3r.z^2,$$

$$(8.)\quad u = \pm 2q.(p^2 - q^2 r);\ \text{also}\ p^2 = q^2 r \pm \frac{u}{2q} = r.z^2 \pm \frac{u}{2z}.$$

Man vervielfache $3r$ mit dem Quadrat einer Gröfse z, welche ein Factor von u ist, aber auch 1 sein kann, und zähle das Product von $-3a$ ab. Ist der Rest ein Quadrat, so führe man z in die (Gl. 8.) ein. Giebt dies dasselbe Quadrat, so ist es $= p^2$ und $z = q$. Ergiebt sich aber aus a, b, r und u, dafs p und q Brüche von der Form $\frac{1}{2}(2y+1)$ sind, so führe man in beide Gleichungen $q = \frac{1}{2}z$ ein, dann wird

$$(9.)\quad p^2 = -3a - \tfrac{1}{4}(3r.z^2) = \tfrac{1}{4}(-12a - 3r.z^2),\quad p^2 = \tfrac{1}{4}(r.z^2) \pm \frac{u}{z}.$$

In diesem Fall ist das Product $3r.z^2$ von $-12a$ abzuzählen und für z ein ungerader Factor von u zu nehmen. Der Gröfse p giebt man dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen von b je nachdem $9.q^2.r$ gröfser oder kleiner als p^2 ist. Zuletzt erhält man für ein positives oder negatives p:

$$(10.)\quad a_1 = \tfrac{1}{3}(A - 2p),\quad \text{oder}\quad a_1 = \tfrac{1}{3}(A + 2p).$$

Ist p *imaginär*, also $r.q^2 > 4a$, oder findet man keine den obigen Gleichungen genügenden rationalen Werthe für p und q, oder auch keinen ganzen Werth für a_1, so hat die Gleichung *drei irrationale* Wurzeln.

Die Auflösung ist hier etwas schwieriger und weitläufiger, als bei der vierten Hauptform, sowohl wegen der Zerlegung von $4a^3 + 27b^2$ in die Factoren u^2 und r, als auch wegen der Bildung von p^2. Sind die Gröfsen $3a$ und $3r$ sehr grofse Zahlen, so kann man durch Ermittelung der *Grenzwerthe* von z die Rechnung abkürzen.

§. 19.

Beispiele zur fünften Hauptform.

Nr. 1. $x^3 + 23x^2 + 173x + 427 = 0,$

$$a = -\tfrac{10}{3},\quad b = \tfrac{56}{27},\quad 4a^3 + 27b^2 = -48 = -3.16,\quad u = 4,$$

$r = 3 = 4.1 - 1$; also sind p und q *ganze* Zahlen.

$$p^2 = -3a - 3r.z^2 = 10 - 9.z^2,\qquad p^2 = r.z^2 \pm \frac{u}{2z} = 3z^2 \pm \frac{2}{z}.$$

Hier kann $z=1$ gesetzt werden, welches $p^2=10-9=1$, $q^2=3\pm2=1$, also $p^2=1$, $q=1$ und $9r.1^2=27>p^2$ giebt. Daher hat p das Zeichen von b, oder $p=+1$ und es ist

$$a_1=\tfrac{1}{3}(A-2p)=\frac{23-2}{3}=7,\quad a_1+p=7+1=8 \quad \text{und}$$

$$fx = (x+7)(x+8-\sqrt{3})(x+8+\sqrt{3}).$$

Nr. 2. $x^3-7x^2-37x+115=0.$

$$a=-\frac{160}{3},\quad b=\frac{88}{27},\quad 4a^3+27b^2=-606528=-13.216^2,$$

$$u=216,\qquad r=13=4.3+1.$$

Da b und u *gerade* Zahlen sind, so müssen p und q *ganze* Zahlen sein.

$$p^2=160-39.z^2,\qquad p^2=13.z^2\pm\frac{108}{z},\qquad z=1,$$

$$p^2=160-39=121=11^2,\quad p^2=13+108=121=11^2.$$

Demnach ist $q=1$ und $p=\pm11$. Da $q.r.z^2=117<121$ ist, so bekommt p das entgegengesetzte Zeichen von b und es wird also $p=-11$.

$$a_1=\tfrac{1}{3}(A+2p)=\frac{-7+22}{3}=5,\quad a_1+p=5-11=-6 \quad \text{und}$$

$$fx = (x+5)(x-6-\sqrt{13})(x-6+\sqrt{13}).$$

Nr. 3. $x^3-58x^2+912x-2784=0.$

$$a=-\frac{628}{3},\quad b=\frac{10672}{27};\quad 4a^3+27b^2=-32474112;$$

$$u=992;\qquad r=33=8.4+1.$$

Da a eine gerade Zahl ist, so sind p und q *ganze* Zahlen und es ist $p^2=628-99z^2$, $p^2=628-99=529=23^2$; $p^2=33z^2\pm\frac{496}{z}$, $z=1$, $p^2=33+496=529=23^2$; $q=1$, $p=\pm23$, $9.33.1^2<529$, also hat p das entgegengesetzte Zeichen von b und es ist $p=-23$,

$$a_1=\frac{-58+2.23}{3}=-4,\quad a_1+p=-4-23=-27 \quad \text{und}$$

$$fx = (x-4)(x-27-\sqrt{33})(x-27+\sqrt{33}).$$

Nr. 4. $x^3+63x^2+1081x+3955=0.$

$a=-242$, $b=-224$, $4a^3+27b^2=-55335200$, $u^2.r=5533520=10^2.2.276676=20^2.2.69169$, $\sqrt{69169}=263$, also $u=20.263=5260$, $r=2$, und p und q sind ganze Zahlen.

$$p^2 = -3a-3r.z^2 = 726-6.z^2,$$

$$p^2 = r.z^2\pm\frac{u}{2z} = 2z^2\pm\frac{2630}{z}.$$

Da $\frac{1}{2}u = 2630$ die Factoren 1, 2, 5 und 263 hat, so ist nach und nach $z = 1$, $z = 2$, $z = 5$ zu setzen. Dies giebt $p^2 = 726 - 6.1^2 = 720$, $p^2 = 726 - 6.2^2 = 702$, $p^2 = 726 - 6.5^2 = 576 = 24^2$; $p^2 = 2.25 + \frac{2630}{5} = 50 + 526 = 576$, also $q = 5$, $9.2.25 < 576$, daher bekommt p das entgegengesetzte Zeichen von b und wird also, weil b negativ ist, positiv, oder $p = 24$.

$$a_1 = \frac{63 - 2.24}{3} = 5, \quad a_1 + p = 5 + 24 = 29 \quad \text{und}$$

$$fx = (x + 5)(x + 29 - 5.\sqrt{2})(x + 29 + 5.\sqrt{2}).$$

Nr. 5. $x^3 - 69x^2 + 468x + 14828 = 0$.

$a = -1119$, $b = 1258$, $4a^3 + 27b^2 = -108 \times 51499476$, $u = 28188$, $r = 7$, also sind p und q ganze Zahlen und $p^2 = 3357 - 21.z^2$; $p^2 = 7z^2 \pm \frac{14094}{z}$. Die Zahl 14094 hat die Factoren 1, 2, 3, 3, 27, 29. Da aber für $z = 20$ p^2 negativ wird, so sind für z die Factoren 1, 2, 3, 6, 9 zu versuchen. Dies giebt

$$\begin{aligned}
z &= 1, & p^2 &= 3357 - 21 & &= 3336 & &= 3.1112; \\
z &= 2, & p^2 &= 3357 - 21.4 & &= 3273 & &= 3.1091; \\
z &= 3, & p^2 &= 3357 - 21.9 & &= 3168 & &= 9.352; \\
z &= 6, & p^2 &= 3357 - 21.36 & &= 2601 & &= 51^2;
\end{aligned}$$

$$p^2 = 7.36 \pm \frac{14094}{6} = 252 + 2349 = 2601, \quad q = 6.$$

Da $9.36.7 < 2601$ ist, so bekommt d das entgegengesetzte Zeichen von b, also ist $p = -51$, $a_1 = \frac{-69 + 2.51}{3} = 11$, $a_1 + p = 11 - 51 = -40$ und

$$fx = (x + 11).(x - 40 - 6.\sqrt{7}).(x - 40 + 6.\sqrt{7}).$$

Nr. 6. $x^3 + 15x^2 + 13x - 124 = 0$.

$a = -62$, $b = 61$, $4a^3 + 27b^2 = -852845$, $r.u^2 = 852845 = 5.170569 = 5.413^2$, $u = 413 = 7.59$, $r = 5 = 4.1 + 1$.

Da b und u *ungerade* Zahlen sind, so sind p und q Brüche und es ist

$$p^2 = \frac{-12a - 3.r.z^2}{4} = \frac{+12.62 - 15.z^2}{4} = \frac{744 - 15z^2}{4},$$

$$p^2 = \frac{r.z^2}{4} \pm \frac{u}{z} = \frac{5z^2}{4} \pm \frac{413}{z}.$$

Factoren von u sind 1, 7, 59, also ist

$$z = 1, \quad p^2 = \frac{744 - 15}{4} = \frac{729}{4} = \frac{27^2}{4}, \quad p^2 = \tfrac{5}{4} + 413,$$

$$z = 7, \quad p^2 = \frac{744 - 15.49}{4} = \frac{744 - 735}{4} = \tfrac{9}{4} = (\tfrac{3}{2})^2,$$

$$p^2 = \frac{5.49}{4} \pm \frac{413}{7} = \frac{245}{4} - 59 = \tfrac{9}{4} = (\tfrac{3}{2})^2,$$

mithin ist

$$z = 7;\quad q = \tfrac{1}{2};\quad 9.r.z^2 = 9.49.5 > 9.$$

Folglich bekommt p das Zeichen von b und es ist $p = +\tfrac{3}{2}$,

$$a_1 = \frac{15-2\cdot\frac{3}{2}}{3} = \frac{15-3}{3} = +4,\quad a_1 + p = 4 + \tfrac{3}{2} = \tfrac{11}{2} \text{ und}$$

$$fx = (x+4)(x + \tfrac{11}{2} - \tfrac{7}{2}\cdot\sqrt{5})(x + \tfrac{11}{2} + \tfrac{7}{2}\cdot\sqrt{5}).$$

Nr. 7. $x^3 - 839x + 58 = 0.$

$$a = -839,\quad b = 58;\quad 4a^3 + 27b^2 = -590567012;\quad r.u^2 = 17.28^2.421^2,$$

$$u = 28.421 = 11788;\quad r = 17 = 8.2 + 1.$$

Da b und u *gerade* Zahlen sind, aber a *ungerade* ist, so können p und q ganze Zahlen oder Brüche sein. Demnach setze man

$$p^2 = \frac{12.839 - 3.17.z^2}{4};\quad p^2 = \frac{17z^2}{4} \pm \frac{11788}{z}$$

und nehme für z sowohl gerade als ungerade Factoren von $u = 11788$ an. Da aber für $z = 15$, p^2 negativ wird, so sind nur die Factoren 1, 2, 4, 7, 14 von u zu versuchen. Dies giebt

$$z = 1,\quad p^2 = \frac{10068 - 51}{4} = \frac{10017}{4} = \frac{9.1113}{4},$$

$$z = 2,\quad p^2 = \frac{10068 - 51.4}{4} = 2517 - 51 = 2466,$$

$$z = 4,\quad p^2 = \frac{10068 - 51.16}{4} = 2517 - 204 = 2313 = 9.257,$$

$$z = 7,\quad p^2 = \frac{10068 - 51.49}{4} = \frac{10068 - 2499}{4} = \frac{7569}{4} = \frac{87^2}{4},$$

$$p^2 = \frac{17.49}{4} \pm \frac{11788}{7} = \frac{37^2}{4}.$$

Also $z = 7$, $q = \tfrac{1}{2}$, und da $9.17.49 = 7497 < 7569$ ist, so bekommt p das entgegengesetzte Zeichen von u und wird daher negativ, oder $p = -\tfrac{87}{2}$,

$$a_1 = \frac{0+87}{3} = +29,\quad a_1 + p = 29 - \tfrac{87}{2} = -\tfrac{29}{2} \text{ und}$$

$$fx = (x+29)(x - \tfrac{29}{2} - \tfrac{7}{2}\cdot\sqrt{17})(x - \tfrac{29}{2} + \tfrac{7}{2}\cdot\sqrt{17}).$$

Nr. 8. $x^3 + x^2 - 7x + 3 = 0.$

$$a = -\frac{22}{3},\quad b = \frac{146}{27},\quad 4a^3 + 27b^2 = -4.197,\quad u = 2,\quad r = 197,$$

$$r > 4a,\quad p^2 = \frac{+88 - 197.z}{4}.$$

Dies wird für jeden Werth von z negativ, folglich hat die Gleichung *drei irrationale* Wurzeln.

§. 20.

Sechste Hauptform. $4a^3+27b^2=+u^2.r$.

Findet man aus der gegebenen Gleichung für sämmtliche Hülfsgröfsen bestimmte Werthe, und ist $4a^3+27b^2=+u^2.r$ eine positive Gröfse, so hat nach (§. 7.) die Gleichung zwei *imaginäre* Wurzeln. Die dritte Wurzel ist jedenfalls *reell,* kann aber entweder *rational* oder *irrational* sein. In beiden Fällen kann die Gleichung in ihre drei Wurzelfactoren zerlegt werden. Sollen die irrationalen Wurzeln durch Dezimalbrüche ausgedrückt werden, so ist ein besonderer Weg einzuschlagen. Dafs eine solche Gleichung keine rationale Wurzel hat, läfst sich gewöhnlich daraus erkennen, dafs die Gröfsen b und u *Primzahlen* sind, oder dafs $r>4a$ ist. Zuweilen aber ergiebt es sich auch erst daraus, dafs die Auflösung nicht gelingt.

Ist eine Wurzel *rational,* so geschieht die Auflösung der Gleichung beinahe ganz wie bei der fünften Hauptform; nur ist daselbst r negativ zu setzen und zu berücksichtigen, dafs auch $r=1$ sein kann. Man setze

$$(1.)\quad fx=x^3+Ax^2+Bx+C=0$$
$$=(x+a_1)(x+a_1+p-q.\sqrt{-r})(x+a_1+p+q.\sqrt{-r}).$$

Dann wird

$$(2.)\quad a_2=p-q.\sqrt{-r},\quad a_3=2q.\sqrt{-r},\quad 2a_2+a_3=\alpha=2p.$$

Ferner sind die Coëfficienten der Gleichung

$$(3.)\quad A=3a_1+2p,\quad B=3a_1^2+4a_1.p+p^2+q^2r,$$
$$C=a_1^3+2a_1^2.p+a_1(p^2+q^2.r).$$

Hieraus erhält man

$$(4.)\quad a=-\tfrac{1}{3}(p^2+3q^2r),\quad b=-\tfrac{2}{27}p^2.(p^2+9q^2r),$$
$$4a^3+27b^2=4q^2.r(p^2+q^2.r)^2=u^2.r,\ \text{also}$$
$$(5.)\quad u=2q.(p^2+q^2r).$$

Die Gröfse a ist meistens positiv, bleibt jedoch negativ, wenn $p^2>3q^2r$ ist; für $p^2=3q^2.r$ wird $a=0$ und die Gleichung gehört zur *ersten* Hauptform. Daher kann auch eine Gleichung, worin a negativ ist, imaginäre Wurzeln haben. Die Gröfse b wird negativ oder positiv, je nachdem p positiv oder negativ ist, daher erhält die Gröfse p das entgegengesetzte Zeichen von b. Die Gröfse $4a^3+27b^2$ wird immer positiv und für $r=1$ ein vollständiges Quadrat, oder sie besteht aus einem quadratischen Factor u^2 und einem nicht quadratischen Factor r. Diese beiden Factoren müssen, wie bei der fünften Hauptform, durch Zerlegung von $4a^3+27b^2$ bestimmt werden.

Ist $r = 3$, so wird $\frac{1}{27}a^3 + \frac{1}{4}b^2 = (\frac{1}{2}u)^2$. Alsdann kann eine Wurzel der Gleichung nach der Cardanischen Formel gefunden werden; was jedoch nicht schneller zum Ziele führt.

Die Gröfsen p und q sind, zugleich mit a_1, entweder rational, oder irrational. Im ersten Fall können sie entweder ganze Zahlen oder Brüche von der Form $\frac{1}{2}(2y+1)$ sein. Für $p = 0$ wird $b = 0$ und die Gleichung gehört zur *zweiten* Hauptform. Die Gröfse p kann positiv oder negativ sein, q ist aber immer positiv. Für $p = -a_1$ wird

$$A = a_1, \quad B = q^2.r, \quad C = a_1.q^2.r = A.B.$$

Ist daher in einer Gleichung $C = A.B$, so ist die reelle Wurzel $x = -A$.

Wenn die Coëfficienten der Gleichung ganze Zahlen sind, so können p und q nur dann Brüche sein, wenn $r = 4h - 1$ ist. Dieses ergiebt sich wie in (§. 18.) leicht aus (Gl. 3. und 4.), und es läfst sich, ob p und q ganze Zahlen oder Brüche sind, allgemein wie folgt erkennen:

Ist r nicht $= 4h - 1$, so sind p und q immer *ganze* Zahlen.

Ist $r = 4h - 1$ und sind b und u *gerade* Zahlen, so sind p und q *ganze* Zahlen.

Ist $r = 4h - 1$ und sind b und u *ungerade* Zahlen, so sind p und q Brüche von der Form $\frac{1}{2}(2y+1)$.

Ist $r = 8h - 1$ und sind b und u *gerade* Zahlen, ist aber a *ungerade*, so bleibt es zweifelhaft, ob p und q ganze Zahlen oder Brüche sind.

Sind die Gröfsen u und r bestimmt, so setze man

$$(6.) \quad 3a = -p^2 + 3qr, \quad \text{oder} \quad p^2 = -3a + 3q^2r = -3a + 3r.z^2,$$

$$(7.) \quad u = 2q.(p^2 + q^2r), \quad \text{oder} \quad p^2 = \frac{u}{2q} - q^2.r = \frac{u}{2z} - r\ z^2.$$

Oder, wenn p und q Brüche sind, wo $q = \frac{1}{2}z$ gesetzt werden mufs,

$$(8) \quad p^2 = -\tfrac{1}{4}(12a + 3r.z^2); \quad p^2 = \frac{u}{z} - \tfrac{1}{4}(r.z^2).$$

Man vervielfache $3r$ mit dem Quadrat eines in u enthaltenen Factors z, zähle von dem Product die Gröfse $3a$, oder bei der Bruchform, $12a$ ab. Ist der Rest ein Quadrat, so führe man z in die zweite Gleichung für p ein; giebt dies dasselbe Quadrat, so sind die Gröfsen p und q gefunden und es ist

$$(9.) \quad a_1 = \tfrac{1}{3}(A - 2p),$$

worauf die (Gl. 1.) in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden kann.

§. 21.

Beispiele zur sechsten Hauptform.

Nr. 1. $x^3+19x^2+128x+290=0$.

$a=\frac{23}{3}$, $b=-\frac{340}{27}$, $4a^3+27b^2=6084=78^2$, $u=78$, $r=1$;

daher sind p und q ganze Zahlen.

$$p^2=-3a+3rz^2, \qquad p^2=-23+3.z^2,$$
$$p^2=\frac{u}{2z}-rz^2, \qquad p^2=\frac{39}{z}-z^2.$$

Da $\frac{1}{2}u=39$ die Factoren 1, 3, 13 hat und für $z=1$ der erste, für $z=13$ der zweite Werth der p^2 negativ wird, so kann z nur $=3$ gesetzt werden. Dies giebt $p^2=-23+3.9=4=2^2$; $p^2=13-9=4=2^2$. Also ist $q=3$ und, da b negativ ist, $p=+2$, $a_1=\frac{1}{3}(A-2p)=\frac{19-4}{3}=5$, $a_1+p=5+2=7$; folglich

$$fx=(x+5)(x+7-3.\sqrt{-1})(x+7+3.\sqrt{-1}).$$

Nr. 2. $x^3+17x^2+97x+225=0$.

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1060}{27}$, $4a^3+27b^2=41616=204^2$, $r=1$, $u=204$,

$\frac{1}{2}u=102=1.2.3.17$, $p^2=-2+3z^2$; $p^2=\frac{102}{z}-z^2$,

$z=1$, $p^2=-2+3 \quad =1$, $p^2=102-1=101$,

$z=2$, $p^2=-2+3.4=10$,

$z=3$, $p^2=-2+3.9=25$, $p^2=\frac{102}{3}-3^2=34-9=25$,

$q=3$, $p=-5$, weil b positiv ist.

$a_1=\frac{1}{3}(17+2.5)=9$, $a_1+p=9-5=4$ und

$$fx=(x+9)(x+4-3.\sqrt{-1})(x+4+3.\sqrt{-1}).$$

Nr. 3. $x^3+19x^2+122x+260=0$.

$a=\frac{5}{3}$, $b=-\frac{124}{27}$, $4a^3+27b^2=588=3.196=3.14^2$, $u=14$, $r=3=3.4-1$. Da b und u gerade Zahlen sind, so werden p und q zu *ganzen* Zahlen. $p^2=-5+3.3.z^2$; $p^2=\frac{7}{z}-3z^2$. Hier kann z nur $=1$ gesetzt werden. $p^2=-5+9=4$; $p^2=7-3=4=2^2$; also $q=1$, und da b negativ ist, $p=+2$; $a_1=\frac{19-2.2}{3}=5$, $a_1+p=5+2=7$ und

$$fx=(x+5)(x+7-\sqrt{-3})(x+7+\sqrt{-3}).$$

Nr. 4. $x^3-47x^2+1508x-8596 = 0.$

$$a=\frac{2315}{3},\quad b=-\frac{198146}{27},\quad 4a^3+27b^2=3292157808,$$

$$r.u^2=3292157808=12^2.22862207=12^3.23.994009=12^2.23.997^2,$$

$$r=23=8.3-1;\quad u=3.4.997=11964.$$

Da $r=8h-1$, aber a ungerade ist, so können p und q ganze Zahlen oder Brüche sein. Zuerst setze man für q eine ganze Zahl und

$$p^2 = -2315+3.23.z^2;\quad p^2 = \frac{5982}{z}-23z^2.$$

Da für $z=4$, p^2 nach der ersten, für $z=10$ aber nach der zweiten Gleichung negativ wird, so ist nur $z=6$ zu setzen. Dies giebt

$$p^2 = -2315+69.36 = -2315+2484 = 169 = 13^2,$$

$$p^2 = \frac{5982}{6}-23.36 = 997-828 = 169 = 13^2.$$

Daher $q=6$, $p=-13$,

$$a_1=\frac{-47+2.13}{3}=-7,\quad a_1+p=-7-13=-20 \quad \text{und}$$

$$fx = (x-7).(x-20-6.\sqrt{-23}).(x-20+6\cdot\sqrt{-23}).$$

Nr. 5. $x^3+63x^2+1181x+4455 = 0,$

$$a=-142,\quad b=-1824,\quad 4a^3+27b^2=4.19593800,$$

$$r.u^2=20^2.195938=20^2.2.97969=2.20^2.313^2,$$

$r=2$, $u=2.10.313=6260$; also p und q sind ganze Zahlen.

$$p^2 = 426+3.2.z^2,\quad p^2 = \frac{3130}{z}-2.z^2,$$

$$z = 1,\quad p^2 = 426+6 = 432 = 9\times 48,$$

$$z = 2,\quad p^2 = 426+6.4 = 450 = 9\times 50,$$

$$z = 5,\quad p^2 = 426+6.25 = 576 = 24^2,$$

$$p^2 = \frac{3130}{5}-2.25 = 626-50 = 576,$$

$$q = 5,\quad p=+24,\quad a_1=\frac{63-2.24}{3}=5,\quad a_1+p=5+24=29 \text{ und}$$

$$fx = (x+5)(x+29-5.\sqrt{-2})(x+29+5.\sqrt{-2}).$$

No. 6. $x^3+9x^2+45x+62=0.$

$$a = 18,\quad b = -19,\quad 4a^3+27b^2 = 27.1225,$$

$$u^2.r = 3.3^2.35^2,\quad r=3=4h-1,\quad u=3.35=105.$$

Da b und u ungerade Zahlen sind, so müssen p und q Brüche sein.

$$p^2=\frac{-12a+3.r.z^2}{4},\quad p^2=\frac{-12.18+3.3.z^2}{4}=\frac{-216+9z^2}{4},$$

$$p^2=\frac{u}{z}-\frac{r.z^2}{4},\quad p^2=\frac{105}{z}-\frac{3.z^2}{4}.$$

Da für $z=3$, p^2 nach der ersten, und für $z=10$ nach der zweiten Gleichung negativ wird, so kann z nur $=5$ oder $=7$ gesetzt werden.

$$z=5,\quad p^2=\frac{-216+9.25}{4}=\frac{-216+225}{4}=\tfrac{9}{4},$$

$$p^2=\frac{105}{5}-\frac{3.25}{4}=21-\frac{75}{4}=\frac{84-75}{4}=\tfrac{9}{4}.$$

Also $q=\frac{5}{2}$, und da b negativ ist, $p=+\frac{3}{2}$,

$$a_1=\frac{9-2\cdot\frac{3}{2}}{3}=\frac{9-3}{3}=2;\quad a_1+p=2+\tfrac{3}{2}=\tfrac{7}{2}\ \text{und}$$

$fx=(x+2)(x+\frac{7}{2}-\frac{5}{2}\cdot\sqrt{-3})(x+\frac{7}{2}+\frac{5}{2}\cdot\sqrt{-3})$.

Nr. 7. $x^3+7x^2+8x+12=0$.

$$a=-\frac{25}{3},\quad b=\frac{506}{27},\quad 4a^3+27b^2=7168,$$

$$r.u^2=7.1024+7.32^2,\quad r=7=8h-1;\quad u=32;$$

also sind p und q ganze Zahlen oder Brüche.

$$-12a=\frac{+12.25}{3}=100,\quad p^2=\frac{100+3.7.z^2}{4};\quad p^2=\frac{32}{z}-\frac{7.z^2}{4},$$

$z=1$, $p^2=\frac{100+21}{4}=\frac{121}{4}=\left(\frac{11}{2}\right)^2$; $p^2=32-\frac{7}{4}=\frac{128-7}{4}=\frac{121}{4}$, also

$z=1$, $q=\frac{1}{2}$, $p=-\frac{11}{2}$, $a_1=\frac{7+11}{3}=6$, $a_1+p=6-\frac{11}{2}=+\frac{1}{2}$ und

$fx=(x+6)(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-7})(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{-7})$.

Nr. 8. $x^3-6x+6=0$.

$a=-6$, $b=+6$, $4a^3+27b^2=108$, $u^2.r=36.3$, $u=6$, $r=3=4h-1$. Da b und u gerade Zahlen sind, so müssen p und q ganze Zahlen sein. $p^2=18+3.3.z$, $p^2=\frac{6}{2z}-3z^2=\frac{3}{z}-3z^2$. Da p^2 nach der zweiten Gleichung für jeden ganzen Werth von z negativ ist, so hat die gegebene Gleichung keine rationale Wurzel.

§. 22.

Darstellung der drei irrationalen Wurzeln.

Eine cubische Gleichung, deren Coëfficienten *ganze rationale* Zahlen sind, kann *drei irrationale* Wurzeln haben, wenn sie zur *ersten, vierten, fünften* oder *sechsten* Hauptform gehört. Für die *erste* Hauptform ist die Auflösung nach (§. 10.) vollständig ausführbar; für die *sechste* Hauptform kann die Gleichung nach (§. 8. Gl. 13. u. 14.) in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden. Dieser Fall ist daher nur kurz zu betrachten. Gehört aber die Gleichung zur *vierten* oder *fünften* Hauptform, so ist eine besondere Auflösung nöthig.

Wie das Vorhandensein von drei irrationalen Wurzeln aus der Beschaffenheit der Hülfsgröfsen zu erkennen sei, ist in (§. 16. und 18.) angegeben.

Man setze

$$(1.)\quad fx = x^3+Ax^2+Bx+C = 0$$
$$= (x+\tfrac{1}{3}A-r_1)(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(r_1-r_2))(x+\tfrac{1}{3}A+\tfrac{1}{2}(r_1+r_2)).$$

Hier ist

$$(2.)\quad \begin{cases} r_1 = \sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w}, \quad r_2 = (\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}).\sqrt{-3}, \\ v = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\left(\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}\right)}, \\ w = +\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\left(\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}\right)}. \end{cases}$$

Setzt man nun

$$(3.)\quad \frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4} = -\frac{u^2.r}{108}$$

(wo $r=1$ ist, wenn die Gleichung zur *vierten* Hauptform gehört, und r negativ, also $\frac{a^3}{27}+\frac{b^2}{4}$ positiv ist, wenn zwei imaginäre Wurzeln vorhanden sind), so erhält man

$$(4.)\quad \begin{cases} v = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\frac{-u^2.r}{108}} = -\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{6}u.\sqrt{-\tfrac{1}{3}r}, \\ w = +\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\frac{-u^2.r}{108}} = +\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{6}u.\sqrt{-\tfrac{1}{3}r}, \end{cases}$$

und wenn die Gleichung zur *sechsten* Hauptform gehört:

$$(5.)\quad \begin{cases} v = -\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\frac{u^2.r}{108}} = -\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{6}u.\sqrt{\tfrac{1}{3}r}, \\ w = +\tfrac{1}{2}b+\sqrt{\frac{u^2.r}{108}} = +\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{6}u.\sqrt{\tfrac{1}{3}r}. \end{cases}$$

Im letztern Fall sind die Gröfsen v und w reell, und es können $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[3]{w}$, r_1 und r_2 unmittelbar zusammengesetzt, also kann auch die gegebene Gleichung nach (Gl. 1.) in ihre Wurzelfactoren zerlegt werden. Gehört die Gleichung zur *vierten* und *fünften* Hauptform, so enthält nach (Gl. 4. und 1.) jeder der drei Wurzelfactoren eine imaginäre Gröfse; diese Gröfsen sind indessen nicht wirklich, sondern nur *scheinbar* imaginär, denn entwickelt man $\sqrt[3]{v}$ und $\sqrt[3]{w}$ nach dem binomischen Lehrsatz in Reihen, so erhält man durch Abzählen oder Zusammenzählen für das allgemeine Glied:

$$\sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w} = \Sigma_s -2\cdot\frac{(\frac{1}{3})^{2s|-1}}{1^{2s|1}}\cdot\frac{(\frac{1}{2}b)^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{2}b)^{2s}}\cdot(\tfrac{1}{6}u)^{2s}\cdot\left(\frac{-r}{3}\right)^s \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w} = \Sigma_s \quad 2\cdot\frac{(\frac{1}{3})^{2s+1|-1}}{1^{2s+1|1}}\cdot\frac{(\frac{1}{2}b)^{\frac{1}{3}}}{(\frac{1}{2}b)^{2s+1}}\cdot(\tfrac{1}{6}u)^{2s+1}\cdot\left(\frac{-r}{3}\right)^{\frac{1}{2}(2s+1)},$$

wo Σ_s bedeutet, dafs der Gröfse s alle ganzen positiven Werthe von 0 an gegeben werden sollen.

Die Summe beider Reihen enthält zwar noch die imaginäre Gröfse $(-\frac{1}{3}r)^{\frac{1}{2}(2s+1)}$; wird sie aber mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt, so wird sie reell und es ergiebt sich

$$(-\tfrac{1}{3}r)^{\frac{1}{2}(2s+1)}.\sqrt{-3} = (-\tfrac{1}{3}r)^s.(-\tfrac{1}{3}r)^{\frac{1}{2}}.\sqrt{-3} = (-\tfrac{1}{3}r)^s.\sqrt{r},$$

folglich ist

$$(6.)\quad \begin{cases} r_1 = \sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w} = -2.\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}\times\Sigma_s\cdot\frac{(\frac{1}{3})^{2s|-1}}{1^{2s|1}}\cdot\left(\frac{-u^2.r}{27b^2}\right)^s, \\ r_2 = (\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}).\sqrt{-3} = \frac{2u}{3b}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.\sqrt{r}\times\Sigma_s\frac{(\frac{1}{3})^{2s+1|-1}}{1^{2s+1|1}}\cdot\left(\frac{-u^2.r}{27b^2}\right)^s. \end{cases}$$

Oder, abgekürzt:

$$(7.)\quad r_1 = -2.\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.S_1, \qquad r_2 = \frac{2u}{3b}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.\sqrt{r}\times S_2,$$

folglich ist nach (Gl. 1.)

$$(8.)\quad \begin{aligned} fx = &(x+\tfrac{1}{3}A+2.\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.S_1) \\ &\times\left(x+\tfrac{1}{3}A-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.S_1-\frac{u}{3b}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.\sqrt{r}\times S_2\right) \\ &\times\left(x+\tfrac{1}{3}A-\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.S_1+\frac{u}{3b}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}b}.\sqrt{r}\times S_2\right). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck befinden sich keine imaginären Gröfsen und die Wurzeln der Gleichung werden reell.

Die Wurzelfactoren einer solchen Gleichung können demnach auf zweierlei Weise dargestellt werden: entweder indem man die Werthe von A, v und w in (Gl. 1.) einführt, was zwar die wahre Form solcher Gleichungen ist, jedoch keinen Vortheil hat, weil die Gröfsen r_1 und r_2 pseudo-imaginär sind: oder indem man die durch S_1 und S_2 bezeichneten Reihen summirt. Diese Summirung der Reihen ist nur dann nach (Gl 6.) ausführbar, wenn die spätern Glieder immer kleiner werden; was geschieht, wenn $\frac{1}{3}u^2.r < 9$ ist; diese Rechnung ist aber immer beschwerlich. Leichter ist die Ausführung mit Hülfe der Kreisfunctionen. Zu denselben setze man

$$r_1 = \sqrt[3]{v}-\sqrt[3]{w} = y-z, \qquad r_2 = (\sqrt[3]{v}+\sqrt[3]{w}) = (y+z).\sqrt{-3},$$

$$y = \sqrt[3]{(-\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)})}, \qquad z = \sqrt[3]{(+\tfrac{1}{2}b+\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)})},$$

also

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)} = -\tfrac{1}{2}b\cdot\left(1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right),$$

$$z^3 = +\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)} = +\tfrac{1}{2}b\cdot\left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{4a^3}{27b^2}\right)}\right).$$

Hier ist $\sqrt{\left(\frac{a^3}{27} + \frac{b^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{-u^2.r}{108}}$ imaginär, also kann man setzen:

$$1 + \frac{4a^3}{27b^2} = -\operatorname{tg}\varphi^2 \quad \text{oder} \quad 1 + \operatorname{tg}\varphi^2 = -\frac{4a^3}{27b^2}.$$

Nun ist auch

$$1 + \operatorname{tg}\varphi^2 = \frac{1}{\cos\varphi^2}, \quad \text{also} \quad \cos\varphi^2 = -\frac{27b^2}{4a^3}.$$

Führt man diesen Werth von $1 + \frac{4a^3}{27b^2}$ in die Gleichungen für y und z ein, so gehen sie in folgende über:

$$y^3 = -\tfrac{1}{2}b(1 - \operatorname{tg}\varphi.\sqrt{-1}) = -\frac{b}{2.\cos\varphi}\cdot(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}),$$

$$z^3 = +\tfrac{1}{2}b(1 + \operatorname{tg}\varphi.\sqrt{-1}) = +\frac{b}{2.\cos\varphi}\cdot(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1}).$$

Oder, wenn $\frac{1}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{-4a^3}{27b^2}} = \frac{2}{b}\cdot\sqrt{\frac{-a^3}{27}} = \frac{2}{b}\cdot\left(\frac{-a}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ gesetzt wird,

$$y^3 = -(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{3}{2}}.(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1}), \quad z^3 = +(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{3}{2}}.(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1});$$

daher

$$y = -(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{1}{2}}.(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}, \quad z = +(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{1}{2}}.(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}.$$

Nun ist

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1})^n = \cos n\varphi \pm \sin n\varphi.\sqrt{-1},$$

also

$$y = -(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{1}{2}}.(\cos\tfrac{1}{3}\varphi - \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-1}), \quad z = +(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{1}{2}}.(\cos\tfrac{1}{3}\varphi + \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-1}),$$

$$y - z = -2.(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{1}{2}}.\cos\tfrac{1}{3}\varphi, \quad y + z = +2.(-\tfrac{1}{3}a)^{\frac{1}{2}}.\sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-1},$$

$$(y+z).\sqrt{-3} = -2.(-a)^{\frac{1}{2}}.\sin\tfrac{1}{3}\varphi,$$

folglich

$$(9.) \quad r_1 = -2.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} \times \cos\tfrac{1}{3}\varphi, \quad r_2 = -2.\sqrt{-a} \times \sin\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Hier ist a immer negativ, also $\sqrt{-a}$ *reell*. Der Winkel ist aus der Gleichung

$$(10.) \quad \cos\varphi^2 = -\frac{27b^2}{4a^3}$$

zu nehmen und dabei auf das Zeichen von b zu achten. Ist b *positiv*, so wird $\cos\varphi$ *positiv*, also r_1 *negativ*; ist b *negativ*, so wird $\cos\varphi$ *negativ*

und r_1 *positiv*. Zuletzt erhält man

$$(11.)\quad fx = (x+\tfrac{1}{3}A \pm 2.\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a})$$
$$\times(x+\tfrac{1}{3}A \mp (\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} - \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-a}))$$
$$\times(x+\tfrac{1}{3}A \mp (\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} + \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-a})).$$

Das obere Zeichen gilt für ein positives, das untere für ein negatives b.

Zur Berechnung von $\cos\varphi$, r_1 und r_2 kann man sich der *Logarithmen* bedienen. Was man für r_1 und r_2 nach (Gl. 6. oder 9.) und somit für x nach (Gl. 1 oder 11.) findet, sind unbegrenzte Dezimalbrüche, also nur Annäherndes, und daher läfst sich die gegebene Gleichung durch keinen dieser Wurzelfactoren ohne Rest dividiren. Könnte man die durch S_1 und S_2 bezeichneten Reihen durch geschlossene Gröfsen darstellen, so würden die Wurzelfactoren vollständig sein.

§. 23.

Beispiele.

A. ***Wenn die gegebene Gleichung die vierte oder fünfte Hauptform, also keine imaginären Wurzeln hat.***

Nr. 1 $x^3-7x+7=0$,

$$a=-7,\quad b=+7,\quad 4a^3+27b^2=-49=-7^2;\quad u=7,\quad r=1.$$

Da die Gleichung die vierte Hauptform hat, aber b und u *Primzahlen* sind, so hat sie drei irrationale Wurzeln.

$$\sqrt[3]{v}=\sqrt[3]{(-\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{18}.\sqrt{-3})};\qquad \sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{(\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{18}.\sqrt{-3})},$$
$$r_1=\sqrt[3]{(-\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{18}.\sqrt{-3})}-\sqrt[3]{(+\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{18}.\sqrt{-3})},$$
$$r_2=(\sqrt[3]{(-\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{18}.\sqrt{-3})}+\sqrt[3]{(\tfrac{7}{2}+\tfrac{7}{18}.\sqrt{-3})}).\sqrt{-3}.$$

Da hier $\frac{u^2.r}{b}=7<9$ ist, so können r_1 und r_2 auch nach (Gl. 6.) berechnet werden. Es ist aber besser, nach (Gl. 10. und 11.) zu rechnen.

Es ist nach (Gl. 10.)

$$\cos\varphi^2=-\frac{27b^2}{4a^3}=\frac{27.7^2}{4.7^3}=\tfrac{27}{28},\quad \cos\varphi=\sqrt{\tfrac{27}{28}},\quad \log\cos\varphi=0{,}9921029-1,$$
$$\varphi=10^\circ\,53'\,36'';\qquad \tfrac{1}{3}\varphi=3^\circ\,37'\,52''.$$

Nun ist nach (Gl. 11.)

$$\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a}=\cos 3^\circ\,37'\,52''.\sqrt{\tfrac{7}{3}},\qquad \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-a}=\sin 3^\circ\,37'\,52''.\sqrt{7}$$

zu berechnen und dies giebt

$$fx=(x+3{,}048916).(x-1{,}356896).(x-1{,}692020).$$

Allgemein ist

$$fx = x^3 - (n^2+n+7)x + (n^2+n+7) = 0.$$

$a = -(n^2+n+7)$, $b = n^2+n+7$, $4a^3+27b^2 = -(2n+1)^2(n^2+n+7)^2$.
Hier liegt immer eine positive Wurzel zwischen 1 und 2. Für $n=0$ entsteht obige Gleichung; für $n=1$ wird

Nr. 2. $x^3 - 9x + 9 = (x+3{,}411\,474).(x-1{,}184\,793).(x-2{,}226\,681)$.

Nr. 3. $x^3 + x^2 - 7x + 3 = 0$,

$$a = -\tfrac{22}{3},\quad b = \tfrac{146}{27},\quad 4a^9 + 27b^2 = -4.197,\quad u = 2,\quad r = 197.$$

Die Gleichung hat die fünfte Hauptform, aber, da u eine Primzahl ist, drei irrationale Wurzeln.

Man findet

$$\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)} = \sqrt{-\tfrac{197}{27}},$$

$$\sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{(-\tfrac{73}{27} + \sqrt{-\tfrac{197}{27}})},\qquad \sqrt[3]{w} = \sqrt[3]{(\tfrac{73}{27} + \sqrt{-\tfrac{197}{27}})},$$

$$r_1 = \sqrt[3]{(-\tfrac{73}{27} + \sqrt{-\tfrac{197}{27}})} - \sqrt[3]{(\tfrac{73}{27} + \sqrt{-\tfrac{197}{27}})}$$

$$r_2 = (\sqrt[3]{(-\tfrac{73}{27} + \sqrt{-\tfrac{197}{27}})} + \sqrt[3]{(\tfrac{73}{27} + \sqrt{-\tfrac{197}{27}})}).\sqrt{-3},$$

$$\tfrac{1}{3}A = \tfrac{1}{3}.$$

Hieraus können die Wurzelfactoren der obigen Gleichung nach (Gl. 1.) zusammengefafst werden.

Durch Auflösung mittels Kreisfunctionen erhält man

$$\cos\varphi^2 = \frac{73^2}{22^3};\qquad \varphi = 44^0\,58'\,23'';\qquad \tfrac{1}{3}\varphi = 14^0\,59'\,28'',$$

$$\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} = \cos 14^0\,59'\,28''.\sqrt{\tfrac{22}{9}} = 1{,}510260,$$

$$\sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-a} = \sin 14^0\,59'\,28''.\sqrt{\tfrac{22}{3}} = 0{,}700479,$$

$$2.\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} = 3{,}020520,$$

$$\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} - \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-a} = 0{,}809781,$$

$$\cos\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-\tfrac{1}{3}a} + \sin\tfrac{1}{3}\varphi.\sqrt{-a} = 2{,}210739,$$

$\tfrac{1}{3}A = \tfrac{1}{3} = 0{,}333333$, folglich

$$fx = (x+3{,}353853)(x-0{,}476448)(x-1{,}877406).$$

Nr. 4. $x^3 - mx \pm m = 0$,

$$a = -m,\quad b = \pm m,\quad 4a^3 + 27b^2 = m^2(-4m+27).$$

Ist $m = z+7$, so sind alle drei Wurzeln *reell,* aber entweder *zwei,* oder *alle drei irrational;* ist $m < 7$, so wird $4a^3+27b^2$ positiv und die Gleichung hat zwei *imaginäre* Wurzeln. Es findet sich

$$x^3 - mx + m = (x+n)(x^2 - nx + n^2 - m) - n^3 + (n+1).m$$
$$= (x-n)(x^2 + nx + n^2 - m) + n^3 - (n-1).m.$$

Daher wird

$$x = -n, \text{ wenn } m = \frac{n^3}{n+1}, \quad x = +n, \text{ wenn } m = \frac{n^3}{n-1}.$$

Ist m eine ganze Zahl, so kann für x niemals ein ganzer rationaler negativer Werth sich ergeben, wohl aber bekommt x einen ganzen rationalen positiven Werth, nämlich $x = 2$, wenn $m = 8$ ist. Ferner wird

$$\begin{aligned} x^3 - mx + m &= (x-1)(x^2 + x - 1 - m) + 1 \\ &= (x-2)(x^2 + 2x + 4 - m) + 8 - m. \end{aligned}$$

Ist also $m > 8$, so liegt immer eine positive irrationale Wurzel zwischen 1 und 2.

Da für

$$m = \frac{(n-1)^3}{n}, \quad x = -(n-1)$$

ist, so liegt eine negative irrationale Wurzel zwischen n und $n-1$, wenn

$$m > \frac{(n-1)^3}{n}, \quad m < \frac{n^3}{n+1} \text{ ist.}$$

Eine dritte positive Wurzel liegt zwischen $n-1$ und n, wenn

$$m > \frac{(n-1)^3}{n-2}, \quad m < \frac{n^3}{n-1} \text{ ist.}$$

Ist $b = -m$, so erhalten die drei Wurzeln das entgegengesetzte Zeichen.

B. *Wenn die gegebene Gleichung die sechste Hauptform, also zwei imaginäre Wurzeln hat.*

Nr. 1. $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$,

$$a = -6, \quad b = +6, \quad 4a^3 + 27b^2 = 108 = 3.36, \quad u = 6, \quad r = 3.$$

Nach dem Beispiel (Nr. 8. in §. 21.) hat die Gleichung *drei irrationale* Wurzeln. Man bilde daher nach (Gl. 1. und 2.) die Wurzelfactoren:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)} = \sqrt{1} = 1, \\ &v = -\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)} = -3 + 1 = -2; \quad \sqrt[3]{v} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}, \\ &w = +\tfrac{1}{2}b + \sqrt{(\tfrac{1}{27}a^3 + \tfrac{1}{4}b^2)} = +3 + 1 = +4; \quad \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{4}, \\ &r_1 = \sqrt[3]{v} - \sqrt[3]{w} = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} = -(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}), \\ &r_2 = (\sqrt[3]{v} + \sqrt[3]{w}).\sqrt{-3} = (-\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}).\sqrt{-3} = -(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}).\sqrt{-3}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} fx = (x + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) &\times (x - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) + \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}).\sqrt{-3}) \\ &\times (x - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}).\sqrt{-3}). \end{aligned}$$

Für die Irrationalgröfsen, durch Logarithmen berechnet, ergiebt sich

$$fx = (x+2{,}8473221)(x-1{,}4236610-0{,}2836060.\sqrt{-1})$$
$$\times(x-1{,}4236610+0{,}2836060.\sqrt{-1}).$$

Nr. 2. $x^3-12x^2+57x-94 = 0$,

$$a=9,\quad b=6,\quad 4a^3+27b^2=108.36=36^2.3,$$
$$u=36,\ r=3,\ \text{also sind } p \text{ und } q \text{ ganze Zahlen.}$$

Nach (§. 20. Gl. 6.) ist daher

$$p^2 = -27+9.z^2 \qquad p^2=\frac{18}{z}-3z^2.$$

Da p^2 für jeden ganzen Werth von z negativ wird, so hat die Gleichung *drei irrationale* Wurzeln. Diese sind nach (§. 22. Gl. 1. und 2.)

$$\sqrt{(\tfrac{4}{27}a^3+\tfrac{1}{4}b^2)}=\sqrt{36}=6,\quad \sqrt[3]{v}=\sqrt[3]{(-3+6)}=\sqrt[3]{3},\quad \sqrt[3]{w}=\sqrt[3]{(3+6)}=\sqrt[3]{9};$$
$$r_1=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\quad r_2=(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).\sqrt{-3},\quad \tfrac{1}{3}A=-\tfrac{12}{3}=-4,$$

folglich ist

$$fx = (x-4-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).(x-4+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})-\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).\sqrt{-3})$$
$$\times(x-4+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9})+\tfrac{1}{2}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}).\sqrt{-3}).$$

Für die Zahlenwerthe der Irrationalgröfsen erhält man

$$fx = (x-3{,}3621658)(x-4{,}3189171-3{,}050429.\sqrt{-1})$$
$$\times(x-4{,}3189171+3{,}050429.\sqrt{-1}).$$

Carlsruhe, im Mai 1851.

25.

Théorèmes sur les courbes de troisième degré.

(Par Mr. *George Salmon* à Dublin.)

Le théorème suivant mè parait très fécond en conséquences pour les courbes de troisième ordre.

1. Si d'un point quelconque (O) d'une telle courbe on tire à la courbe quatre tangentes (OA, OB, OC, OD), la fonction enharmonique de ce faisceau $\left(\frac{\sin AOB \sin COD}{\sin AOC \sin BOD}\right)$ est constante. Par conséquent chaque courbe de troisième ordre a une caractéristique numérique qui ne change pas par la projection en quelqu'autre transformation linéaire.

Car cette fonction ne change pas si l'on passe au point consécutif (P) de la courbe. Qu'on mène quatre tangentes du point P: chaque tangente rencontre la tangente consécutive à son point de contact avec la courbe: mais il est connu que les six points O, P, A, B, C, D sont sur la même conique.

On peut aussi démontrer algébriquement la même proposition, en formant l'expression générale de la fonction enharmonique; et on trouvera que cette fonction dépend seulement du rapport $S^3:T^2$; où S et T sont les fonctions qui (comme M. *Aronhold* l'a fait voir) ne changent pas par des transformations linéaires.

Par cette méthode on arrive aussi facilement au théorème de M. *Aronhold*, savoir que la condition (R), pour qu'une courbe de troisième ordre puisse avoir un point double, est de la forme

$$R = S^3 - T^2.$$

Car l'équation biquadratique qui donne les quatre tangentes d'un point quelconque de la courbe, et qui est de la forme

$$Ax^4 + 4Bx^3y + 6Cx^2y^2 + 4Dxy^3 + Ey^4 = 0,$$

peut être formée sans difficulté. Or la condition pour les deux racines de cette équation d'être *égales*, est

$$(AE - 4BD + 3C^2)^3 = 27(ACE + 2BCD - AD^2 - EB^2 - C^3)^2;$$

ce qui donne directement la formule de M. *Aronhold*.

Trois racines de l'équation seront égales et la courbe aura un point de rebroussement, si $S = 0$, $T = 0$.

Par notre méthode on peut aussi former aisément les fonctions S, T, que M. *Aronhold* n'a pas données explicitement.

Soit l'équation de la courbe

$$a_1x^3+3a_2x^2y+3b_1xy^2+b_2y^3+3a_3x^2z+6fxyz+3b_3y^2z+3c_1xz^2+3c_2yz^2 \\ +c_3z^3=0,$$

on obtient

$$S=f^4-2f^2(b_1c_1+c_2a_2+a_3b_3)+3f(a_2c_1b_3+a_3b_1c_2)-fa_1b_2c_3 \\ +f(a_1b_3c_2+b_1c_3a_2+c_1a_3b_2)-(a_1c_1b_3^2+b_2c_2a_3^2+a_1b_1c_2^2+c_3b_3a_2^2+a_3c_3b_1^2+a_2b_2c_1^2) \\ +(a_1c_1b_2c_2+a_1b_1c_3b_3+a_2b_2a_3c_3)-(a_2c_2b_1c_1+b_1c_1a_3b_3+a_2c_2a_3b_3)+a_2^2c_2^2+b_3^2a_3^2+c_1^2b_1^2,$$

$$T=-8f^6+24f^4(b_1c_1+a_2c_2+a_3b_3)-36f^3(a_2b_3c_1+a_3b_1c_2)-12f^3(a_1b_3c_2+a_2b_1c_3 \\ +a_3b_2c_1)-20a_1b_2c_3f^3-24f^2(b_1^2c_1^2+a_2^2c_2^2+a_3^2b_3^2)+12f^2(a_1c_1b_3^2+a_3c_3b_1^2+b_3c_3a_2^2 \\ +b_2c_2a_3^2+a_2b_2c_1^2+a_1b_1c_2^2)+36f^2(a_1b_2c_1c_2+b_2c_3a_2a_3+a_1c_3b_1b_3)-12f^2(a_2b_1c_1c_2 \\ +b_3c_2a_2c_3+a_3c_1b_1b_3)+36f(a_3b_1c_2+a_2b_3c_1)(a_2c_2+a_3b_3+b_1c_1)+12f(c_3c_2b_1a_2^2 \\ +c_1c_3a_2b_1^2+a_1a_2b_3c_2^2+b_1b_2c_1a_3^2+a_1a_3c_2b_3^2+b_1b_2a_3c_1^2)-60f(a_2a_3b_1b_3c_3+a_1b_1b_3c_1c_2 \\ +a_2a_3b_2c_1c_2)+12fa_1b_2c_3(a_3b_3+b_1c_1+a_2c_2)-24f(a_1a_2b_3^2c_3+a_3^2b_1b_2c_3+b_1^2a_1c_2c_3 \\ +c_1^2a_1b_2b_3+c_2^2a_1a_3b_2+a_2^2b_2c_1c_3)+6a_1b_2c_3(b_1c_2a_3+c_1a_2b_3)+6(a_2a_3b_1^2c_2c_3 \\ +a_1a_2b_3^2c_1c_2+a_2^2b_1b_3c_1c_3+a_3^2b_1b_2c_1c_2+a_2a_3b_2b_3c_1^2+a_1a_3b_1b_3c_2^2)+a_1^2b_2^2c_3^2 \\ +24(a_1c_1b_1^2c_2^2+a_1b_1b_3^2c_1^2+b_2c_2a_2^2c_1^2+a_2b_2a_3^2c_2^2+a_3c_3a_2^2b_3^2+b_3c_3a_3^2b_1^2) \\ +18(a_2a_3b_1b_2c_1c_3+a_1a_2b_1b_3c_2c_3+a_1a_3b_2b_3c_1c_2)-12(a_1a_2b_1c_2^3+a_2b_1b_2c_1^3+a_1a_3c_1b_3^3 \\ +b_2b_3c_2a_3^3+b_3c_2c_3a_2^3+a_3c_1c_3b_1^3)+4(a_1b_1^3c_3^2+a_1^2b_2c_2^3+a_2^3b_2c_3^2+a_3^3b_2^2c_3+a_1b_2^2c_1^3 \\ +a_1^2b_3^3c_3)-3(a_2^2b_1^2c_3^2+a_1^2b_3^2c_2^2+a_3^2b_2^2c_1^2)-6(a_1^2b_2b_3c_2c_3+a_1a_3b_2^2c_1c_3+a_1a_2b_1b_2c_3^2) \\ +8(b_1^3c_1^3+a_2^3c_2^3+a_3^3b_3^3)-27(a_3^2b_1^2c_1^2+a_2^2b_3^2c_1^2)-12(a_1a_2b_2c_1c_2^2+a_1b_2b_1c_1^2c_2 \\ +a_2^2a_3b_2c_2c_3+a_2a_3^2b_2b_3c_3+a_1a_3b_1b_3^2c_3+a_1b_1^2b_3c_1c_3)-6a_1a_2b_1c_1a_3b_3-12(a_2b_1^2c_1^2c_2 \\ +a_3b_1^2c_1^2b_3+a_2^2b_1c_1c_2^2+a_2^2a_3b_3c_2^2+a_3^2b_1c_1b_3^2+a_2a_3^2b_3^2c_2)$$

et

$$R=T^2-64S^3.$$

Reprenons maintenant le théorème (1.). On en tire la proposition suivante.

2. Si à deux points de la courbe P, Q, on mène des tangentes $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4$, les points d'intersection, p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3, p_4q_4 se trouveront sur une *conique* qui passe aussi par les points P, Q. Il existe quatre coniques de cette sorte, dont chacune passe par les points P, Q et par quatre des seize points d'intersection des tangentes.

3. Soient P, Q les deux points imaginaires à l'infini sur un cercle quelconque; alors, suivant la définition de M. *Plücker* (3.), une courbe circulaire de troisième degré a seize foyers, disposés sur quatre cercles.

Seulement quatre de ces foyers sont réels. La courbe a en outre un foyer double.

Les théorèmes (2. et 3.) sont dû à M. *Hart* qui les a obtenus comme suit. D'abord la propriété caractéristique des ovales de *Descartes* est $a\varrho_1 + b\varrho_2 = c$, où ϱ_1, ϱ_2 sont les distances de quelque point de la courbe à deux points fixes. M. *Chasles* a démontré que la courbe a de plus un foyer tel que $a_1\varrho_1 + b_1\varrho_3 = c_1$, et M. *Hart* a trouvé l'extension suivante de ce théorème.

„Soit $a\varrho_1 \pm b\varrho_2 \pm c\varrho_3 = 0$ la propriété caractéristique d'une courbe; alors cette courbe sera du quatrième ordre, et aura de plus un foyer tel que $a_1\varrho_1 \pm b_1\varrho_2 \pm c_1\varrho_4 = 0$. Les quatre foyers seront disposés sur un cercle; et si $a \pm b \pm c = 0$, la courbe ne sera que du troisième degré." Une courbe de troisième degré aura quatre foyers, pourvu que les termes les plus élévés en x et y soient divisibles par $x^2 + y^2$.

Le problème suivant „Les quatre foyers étant donnés: décrire la courbe" admet deux solutions. Soient les quatre foyers A, B, C, D. Si AB, CD, s'entrecoupent en O; l'équation de la courbe sera, ou

$$(BO + OC)\varrho_1 + (AO - OC)\varrho_2 = AB\varrho_3$$
$$(BO - OD)\varrho_1 + (AO + OD)\varrho_2 = AB\varrho_4,$$

ou

$$(BO - OC)\varrho_1 + (AO + OC)\varrho_2 = AB\varrho_3$$
$$(BO + OD)\varrho_1 + (AO - OD)\varrho_2 = AB\varrho_4.$$

De ces équations on tire $CD(\varrho_1 \mp \varrho_2) = AB(\varrho_3 \mp \varrho_4)$, c'est à dire, la courbe est le *lieu géométrique* de l'intersection de deux coniques dont les foyers sont donnés.

Les deux courbes s'entrecoupent à angles droits au centre du cercle et aux trois points O, P, Q, qui sont les intersections des droites AB, CD; AC, BD; AD, BC. Les tangentes à ces points sont parellèles aux bisecteurs de l'angle AOC. On voit aisément que l'asymptote de la courbe est aussi parallèle à l'une ou l'autre de ces bisecteurs. Donc, au moyen de la projection on obtient cette proposition:

Soient P, Q, R les trois points dans lesquels une droite rencontre une courbe de troisième ordre, et menez les tangentes $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_3$: alors les intersections des droites qui joignent $(p_1q_1 - p_2q_2)$, $(p_3q_3 - p_4q_4)$; $(p_1q_1, p_3q_3)(p_2q_2, p_4q_4)$; $(p_1q_1, p_4q_4)(p_2q_2, p_3q_3)$ seront des points de contact des tangentes qui passent par R: le quatrième point de contact sera le pôle de PQ pour la conique qui passe par P, Q, p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3, p_4q_4.

Trinity College Dublin July 24. 1851.

26.

Sur la formation de l'équation de la courbe reciproque à une courbe donnée.

(Par Mr. *George Salmon* à Dublin.)

Dans le tome 41 de ce Journal (p. 285) M. *Hesse* a donné une méthode pour former l'équation de la courbe reciproque à une courbe du troisième ou quatrième ordre. L'application de sa méthode est cependant presqu'impossible au quatrième ordre, parcequ'elle demande ici l'élimination entre 12 équations linéaires.

Mais il me parait que la méthode qui se présente au premier abord, soit aussi la plus facile. Entre l'équation de la courbe donnée et l'équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0,$$

on pourra éliminer z, et puis y appliquer la condition que l'équation résultante en x et y ait deux racines égales. De cette manière on trouve pour la courbe réciproque à la courbe:

$$\begin{aligned} &A_1x^4 + B_2y^4 + C_3z^4 + 4A_2x^3y + 4A_3x^3z + 4B_1y^3x + 4B_3y^3z + 4C_1z^3x \\ &\quad + 4C_2z^3y + 6Dy^2z^2 + 6Ez^2x^2 + 6Fx^2y^2 + 12Lx^2yz + 12My^2xz \\ &\quad + 12Nz^2xy = 0, \end{aligned}$$

et $S^3 = 27T^2$, où

$$\begin{aligned} S = &(B_2C_3 - 4B_3C_2 + 3D^2)x^4 + (C_3A_1 - 4A_3C_1 + 3E^2)y^4 + (A_1B_2 - 4A_3B_1 + 3F^2)z^4 \\ &+ 4(B_3C_1 - B_1C_3 - 3ND + 3MC_2)x^3y + 4(B_1C_2 - B_2C_1 - 3MD + 3NB_3)x^3z \\ &+ 4(C_2A_3 - A_2C_3 - 3EN + 3LC_1)y^3x + 4(A_2C_1 - A_1C_2 - 3LE + 3NA_3)y^3z \\ &+ 4(B_3A_2 - B_2A_3 - 3MF + 3LB_1)z^3x + 4(A_3B_1 - A_1B_3 - 3FL + 3MA_2)z^3y \\ &+ 6(A_1D - 2A_3M - 2A_2N + 2L^2 + EF)y^2z^2 \\ &+ 6(B_2E - 2B_1N - 2B_3L + 2M^2 + FD)z^2x^2 \\ &+ 6(C_3F - 2C_2L - 2C_1M + 2N^2 + DE)x^2y^2 \\ &+ 12(B_1C_1 + 2DL - EB_3 - FC_2 - MN)x^2yz \\ &+ 12(C_2A_2 + 2EM - FC_1 - DA_3 - NL)y^2zx \\ &+ 12(A_3B_3 + 2FN - DA_2 - EB_1 - LM)z^2xy. \end{aligned}$$

Pour éviter des longueurs, je ne donne pas tous les termes de T. On obtiendra les autres coefficients en permutant symétriquement les lettres

$$
\begin{aligned}
T = {} & (FA_1B + 2FA_2B_1 - A_1B_1^2 - B_2A_2^2 - F^3)z^6 \\
& + 2\left\{\begin{array}{l} 3F^2M + 3LA_2B_2 + 2A_3B_1^2 + A_1B_1B_3 - MA_1B_2 - 2MA_2B_1 \\ - FA_2B_3 - 2FA_3B_2 - 3FLB_1) \end{array}\right\} z^5x \\
& + \left\{\begin{array}{l} 6FB_2E + 8MB_2A_3 + DA_1B_2 + 6FB_1N + 6FLB_3 + 4MA_2B_3 \\ + 2DA_2B_1 + 12LMB_1 - 6NA_2B_2 - A_1B_3^2 - 8A_3B_1B_3 \\ - 9B_2L^2 - 6EB_1^2 - 3F^2D - 12FM^2 \end{array}\right\} z^4x^2 \\
& + 2\left\{\begin{array}{l} 9FA_3A_3 + LB_2A_3 - 10LA_2B_3 + MA_1B_3 - 10MA_3B_1 + 2NA_1B_2 \\ + 4NA_2B_1 + 3FEB_1 + 3FDA_2 + 6B_1L^2 + 6A_2M^2 - 6NF^2 \\ - 3FLM - 3EA_2B_2 - 3DA_1B_1 \end{array}\right\} z^4xy \\
& + 2\left\{\begin{array}{l} A_2B_2C_2 + 2C_1B_1^2 + 2A_1B_3^2 + 6EB_1B_3 + 9B_2LN + 4M^3 + 6DFM \\ - 8A_2B_3 - 2DB_2A_3 - FC_2B_1 - 2FC_1B_2 - 6EMB_2 - 3DLB_1 \\ - 3FNB_3 - 6MNB_1 - 6MLB_3 \end{array}\right\} z^3x^3 \\
& + 2\left\{\begin{array}{l} 3ELB_2 + DA_1B_3 + 11DB_1A_3 + 8NA_2B_3 - 5NB_2A_3 + 15FMN \\ + 12L^2B_3 + 3F^2C_2 + 12EMB_1 + 3A_2B_2C_1 - 2A_2B_1C_2 \\ - 12LNB_1 - 9DMA_2 - 6LM^2 - 6LNB_1 - 3DFL \\ - 3FB_1C_1 - 6MA_3B_3 - 15EFB_3 - A_1B_2C_2 \end{array}\right\} z^3x^2y \\
& + \left\{\begin{array}{l} A_1B_2C_3 - 20A_2B_3C_1 - 20A_3B_1C_2 + 2A_1B_3C_2 + 2B_2A_3C_1 \\ + 2C_3A_2B_1 + 24LB_1C_1 + 24MA_2C_2 + 24NA_3B_3 - 6ELB_3 \\ - 6ENB_1 - 6DMA_3 - 6DNA_2 - 6FLC_2 - 6FMC_1 - 3A_1D^2 \\ - 3B_2E^2 - 3C_2F^2 - 30M^2E - 30L^2D - 30N^2F + 48DEF \\ + 48LMN \end{array}\right\} z^2x^2y^2 \\
& \qquad \text{etc.}
\end{aligned}
$$

On voit bien que les 24 tangentes aux points d'inflexion d'une courbe de quatrième ordre touchent une courbe de quatrième classe.

Dublin, Août 1851.

27.

Elementary geometrical proof of Joachimsthal's theorem.

(By Mr. *Ch. Graves* esq. prof. at the university of Dublin.)

Lemma 1. *If tangent planes be drawn at two points, P, P', on a central surface of the second order; and if perpendiculars be let fall from the points of contact on these tangent planes; the perpendiculars will be proportional to the perpendiculars let fall from the centre of the surface upon the tangent planes.*

This is evident in the case of the sphere; and the theorem may be extended to the other surfaces by a simple *deformation*.

Lemma 2. *Let LL' be the line of intersection of the two tangent planes, and let the point S be taken on it so that the lines PS, $P'S$, make equal angles with the lines LL'; then the lines PS, $P'S$, will be reciprocally proportional to the perpendiculars let fall from the centre upon the tangent planes at P and P'.*

For the lines PS, $P'S$, are evidently proportional to the perpendiculars let fall from P, P', upon the tangent planes; and these, by the preceding Lemma, are proportional to the perpendiculars let fall from the centre upon the tangent planes at P' and P.

If the point S has been taken in L, L', so that the angles PSL, $P'SL'$, are equal, the point S will be that the sum of whose distances from P and P is a minimum.

Again, the lines PS, $P'S$, being tangents, are proportional to the parallel semi-diameters of the surface. We may, therefore, state the result at which we have now arrived in the following proposition.

If two points on a central surface be connected by a shortest line passing over the line of intersection of the two planes which touch the surface at those two points; the semi-diameters of the surface parallel to the two straight portions of the shortest line will be reciprocally proportional to the perpendiculars let fall from the centre upon the tangent planes in which those portions are respectively contained.

If we suppose, now, that the two points approximate indefinitely, we see, as a particular case of the more general theorem just stated, that „*For two consecutive elements of a shortest line traced upon the surface, the product of the perpendicular let fall from the centre upon the tangent plane, and the semi-diameter parallel to the element of the curve, remains the same.*"

Of this celebrated theorem it would, perhaps, be hard to discover a more elementary demonstration. *May* 25, 1850.

28.

De arithmetice determinanda area oblongi sphaerici e datis lateribus, et de theoremate Pythagorae e Planimetria in Sphaericam evehendo.

(Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, Math. Prof. o. Monast. Guestph.) *)

Oblongum sphaericum est quadrigonum sph., cuius latera opposita sunt aequalia et cuius anguli interni aequales sunt. Quaelibet ipsius linea diagonalis alteram sibi aequalem dividit in partes aequales, et oblongum ipsum dividit in triangula congrua. Jam si area oblongi $= a$, et latera duo sunt α et β, angulus oblongi $= C$, patent formulae notissimae

$$a = 4C - 2\pi \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{4} a = \frac{\sin C}{\cot \frac{1}{2}\alpha . \cot \frac{1}{2}\beta + \cos C},$$

---

*) Der Herr Professor Dr. *Gudermann* ist am 25ten Septbr. d. J. plötzlich verstorben; leider! viel zu früh für die Wissenschaft. Der obige Aufsatz und der Brief, mit welchem ihn der Herr Verfasser dem Herausgeber dieses Journals sendete, haben zwar kein Datum, allein das Postzeichen des Briefes besagt den 25ten Septbr., also den *Sterbetag* des Verfassers. Da nun schon daraus, dafs das Manuscript dieses und des folgenden Aufsatzes dem Briefe auf einem und demselben Blatte unmittelbar folgt, anzunehmen ist, dafs die Aufsätze und der Brief nicht *früher* geschrieben sind, so ist es ganz möglich, und sogar sehr wahrscheinlich, dafs das Manuscript der Aufsätze die *letzten Worte*, wenigstens die letzten *mathematischen* Worte sind, die der Verblichene niederschrieb.

Der Herausgeber dieses Journals kann es sich nicht versagen, sein inniges Bedauern über den plötzlichen und frühzeitigen Tod des wackern Gelehrten, in welches auch gewifs Viele mit ihm einstimmen werden, hier auszudrücken. Herr *Gudermann* war ein scharfsinniger und dabei ganz ungemein fleifsiger und eifriger Mathematiker. Er war in allen Theilen dieser Wissenschaft sehr bewandert, und besafs insbesondere eine ungemeine Gewandtheit im Calcul. Seine zahlreichen Beiträge zu diesem Journal beweisen Dies, und zeigen zugleich, dafs er auch weiter vorzudringen vermochte. Man wird anerkennen müssen, dafs er mitunter Bedeutendes geleistet und zum Fortschritt und zur weitern Entwicklung mehrerer Theile der Mathematik wesentlich beigetragen hat, z. B. der Sphärik. Dabei war er ein bescheidner Mann, frei von Scheelsucht und gern die Verdienste Anderer anerkennend und würdigend. Der Herausgeber ist aus den zahlreichen Briefen des Verstorbenen an ihn, zu dieser *Überzeugung* gelangt. Hätte Herr *Gudermann* länger gelebt: gewifs würde ihm die Mathematik noch manches Gute und auch Neue zu verdanken gehabt haben. Sein Tod brachte der Wissenschaft einen wirklichen Verlust. Sanft ruhe seine Asche!

Der Herausgeber ist noch im Besitz mehrerer Abhandlungen des Dahingeschiedenen, welche derselbe für dieses Journal bestimmte. Er wird nicht ermangeln, sie jetzt mit doppelter Angelegentlichkeit durch dasselbe bekannt zu machen.

Der Herausgeber.

quarum altera, quia $C = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\pi$, ideoque $\sin C = \cos\frac{1}{2}a$ et $\cos C = -\sin\frac{1}{2}a$ est, abit in

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}a} = \frac{\cos\frac{1}{2}a}{\cot\frac{1}{2}\alpha\cot\frac{1}{2}\beta - \sin\frac{1}{2}a},$$

sive in formulam

$$\sin\frac{1}{2}a = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha . \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta,$$

qua duce ex oblongi lateribus α et β optime computabis ipsius aream a, dummodo $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\alpha . \operatorname{tang}\frac{1}{2}\beta < 1$, sive $\alpha + \beta < \pi$ est.

Si $\beta = a$ sumitur, oblongum fit quadratum, lineae ipsius diagonales nunc se normaliter in partes aequales intersecant, et quadrati aream e dato ipsius latere α computabis ope formulae

$$\sin\frac{1}{2}a = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha, \text{ in qua } \alpha < \frac{1}{2}\pi.$$

Ex his, Lector benevole! jam perspicies, pari modo, quo in Planimetria e datis oblongi sphaerici lateribus α et β adiuvante circulo sph., cuius diameter $= \alpha + \beta$, et in Sphaerica geometrice inveniri latus quadrati, quod oblongo dato sit aequale.

Lineam oblongi diagonalem γ facillime invenies determinatam esse formula

$$\cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - 1, \quad \text{sive} \quad \cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{[\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta) . \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)]}$$

sive

$$\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{(\sin^2\frac{1}{2}\alpha + \sin^2\frac{1}{2}\beta)}.$$

Quodsi supra lateribus α, β, γ trianguli rectangularis sphaerici construuntur tria quadrata sphaerica, quorum areae sint a, b, c, et quae construi possunt, dummodo quodvis latus quadrante brevius sit, si latus γ hypotenusam esse censes, erit $\cos\gamma = \cos\alpha . \cos\beta$, ideoque $\log\sqrt{\frac{1}{\cos\gamma}} = \log\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}} + \log\sqrt{\frac{1}{\cos\beta}}$. Quia vero $\sin\frac{1}{2}a = \operatorname{tng}^2\frac{1}{2}a = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, ideoque $\cos\alpha = \frac{1-\sin\frac{1}{2}a}{1+\sin\frac{1}{2}a}$ est, oritur relatio

$$\log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{1}{2}c}{1-\sin\frac{1}{2}c}} = \log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{1}{2}a}{1-\sin\frac{1}{2}a}} + \log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{1}{2}b}{1-\sin\frac{1}{2}b}},$$

quae adhibita functione ***longitudinali hyperbolica*** eadem est ac

$$\mathfrak{L}(\frac{1}{2}c) = \mathfrak{L}(\frac{1}{2}a) + \mathfrak{L}(\frac{1}{2}b).$$

et exprimit theorema Pythagoricum e Planimetria in Sphaericam translatum.

29.

Superficies ellipsoïdis construitur e centro dato et e simiaxibus datis; et plana construuntur, quibus superficies tangatur.

(Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, Math. prof. p. o. Monast. Guestph.)

I. **E** centro O dato ducantur tres coordinatarum axes Ox, Oy, Oz rectangulares, quarum directiones sint eaedem ac axium 2α, 2β, 2γ ellipsoïdis datae; ex eodem centro O describantur tres sphaerae, quarum radii sint α, β, γ, et ducatur radius arbitrarius Os, quo superficies sphaericae secentur in punctis a, b, c, e quibus tres lineae ap, bq, cr perpendiculariter demittantur in axes Ox, Oy, Oz. Lineae $Op = x$, $Oq = y$, $Or = z$ erunt tres lineae coordinatae puncti cuiusdam M in superficie ellipsoïdis siti; tria nempe plana per puncta p, q, r ita posita, ut tribus planis zOy, zOx, yOx sint parallela, per idem punctum M transibunt. Ad quemlibet ergo radium Os pertinet tale punctum M eiusdem superficiei ellipsoïdicae, quae simul tres sphaerarum superficies tangit in sex verticibus, in iis scilicet punctis, in quibus hae superficies ab axibus Ox, Oy, Oz continuatis secantur.

II. Ut planum ducas, quo superficies ellipsoïdica tangatur in puncto modo descripto M, praeter tres sphaeras et radium Os adhibeas tria plana parallela, quibus tres sphaerae tangantur in punctis a, b, c et quibus tres axes Ox, Oy, Oz secentur in punctis A, B, C; planum ABC erit quaesitum.

Demonstrationes facillimae supprimantur harum solutionum, quas novas esse censebis.

30.

Über das Integral $\int_0^1 \frac{1}{(a-xz)^{r+1}} \cdot \frac{\partial z}{(1-z)^{1-n} z^n}$.

(Von Herrn Dr. *Dienger*, Prof. der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.)

Bekanntlich ist für $m > 0$ und $n > 0$:

$$\int_0^1 z^{m-1}(1-z)^{n-1}\partial z = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)},$$

also auch

$$\int_0^1 \frac{a_r}{x^r} z^{m-1}(1-z)^{n-1}\partial z = \frac{\Gamma(m).\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \cdot \frac{a_r}{x^r},$$

wo a_r eine beliebige Gröfse ist. Man setze $m = r - n$ und mache $n > 0$ und < 1, $r \overline{\overline{>}} 1$, so ist

$$(1.)\quad \begin{cases} \int_0^1 \frac{a_r}{x^r} z^{r-n-1}(1-z)^{n-1}\partial z = \frac{\Gamma(r-n).\Gamma(n)}{\Gamma(r)} \cdot \frac{a_r}{x^r}, \\ \frac{a_r}{x^{r-n}} = \frac{\Gamma(r).x^n}{\Gamma(n).\Gamma(r-n)} \int_0^1 \frac{a_r}{\left(\frac{x}{z}\right)^r} \cdot \frac{(1-z)^{n-1}\partial z}{z^{n+1}}, \end{cases}$$

und

$$\frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r)} \cdot \frac{a_r}{x^{r-n}} = \frac{x^n}{\Gamma(n)} \int_0^1 \frac{a_r}{\left(\frac{x}{z}\right)^r} \cdot \frac{(1-z)^{n-1}\partial z}{z^{n+1}}.$$

Es sei nun

$$\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \cdots = \frac{1}{x-b},$$

also

$$a_1 = 1, \quad a_2 = b, \quad a_3 = b^2, \quad \ldots.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{(x-b)^{1-n}} = (x-b)^{-(1-n)} = \frac{1}{x^{1-n}} + \frac{1-n}{1} \cdot \frac{b}{x^{2-n}} + \frac{(1-n)(2-n)}{1.2} \cdot \frac{b^2}{x^{3-n}} + \cdots$$

$$= \frac{a_1}{a^{1-n}} + \frac{1-n}{1} \cdot \frac{a_2}{x^{2-n}} + \frac{(1-n)(2-n)}{1.2} \cdot \frac{a_3}{x^{3-n}} + \cdots$$

Bekanntlich ist

$$1-n = \frac{\Gamma(2-n)}{\Gamma(1-n)}, \quad 2-n = \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma(2-n)}, \quad 3-n = \frac{\Gamma(4-n)}{\Gamma(3-n)}, \quad \ldots,$$

also

$$1-n = \frac{\Gamma(2-n)}{\Gamma(1-n)}, \quad (1-n)(2-n) = \frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma(1-n)},$$
$$(1-n)(2-n)(3-n) = \frac{\Gamma(4-n)}{\Gamma(1-n)}, \quad \ldots,$$

folglich

$$(2.) \quad \frac{1}{(x-b)^{1-n}} = \frac{1}{\Gamma(1-n)}\left[\frac{a_1}{x}\cdot\frac{\Gamma(1-n)}{\Gamma(1)} + \frac{a_2}{x^2}\cdot\frac{\Gamma(2-n)}{\Gamma(2)} + \frac{a_3}{x^3}\cdot\frac{\Gamma(3-n)}{\Gamma(3)} + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{\Gamma(1-n)}\Sigma\frac{a_r}{x^r}\cdot\frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r)}.$$

Aus (1.) aber folgt:

$$(3.) \quad \frac{1}{\Gamma(1-n)}\Sigma\frac{a_r}{x^r}\cdot\frac{\Gamma(r-n)}{\Gamma(r)} = \frac{x^n}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}\int_0^1 \Sigma\frac{a_r}{\left(\frac{x}{z}\right)^r}\cdot\frac{(1-z)^{n-1}}{z^{n+1}}\partial z.$$

Da jedoch $\Sigma\frac{a_r}{x^r} = \frac{1}{x-b}$, so ist $\Sigma\frac{a_r}{\left(\frac{x}{z}\right)^r} = \frac{1}{\frac{x}{z}-b}$, also nach (2. und 3.)

$$\frac{1}{(x-b)^{1-n}} = \frac{x^n}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)}\int_0^1 \frac{1}{x-bz}\cdot\frac{(1-z)^{n-1}}{z^n}\partial z,$$

und wenn man erwägt, dafs $\Gamma(n).\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$:

$$\frac{1}{(a-b)^{1-n}} = \frac{x^n \sin n\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{x-bz}\cdot\frac{(1-z)^{n-1}}{z^n}\partial z,$$

oder, wenn man x statt b und a statt x setzt:

$$(4.) \quad \frac{1}{(a-x)^{1-n}} = \frac{a^n \sin n\pi}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{a-xz}\cdot\frac{\partial z}{(1-z)^{1-n}z^n},$$

woraus

$$(5.) \quad \int_0^1 \frac{1}{a-xz}\cdot\frac{\partial z}{(1-z)^{1-n}z^n} = \frac{\pi}{(a-x)^{1-n}a^n \sin n\pi}$$

folgt, in welcher Formel aber nicht $x=a$, oder $a=0$ zu setzen, und $n \gtrless {0 \atop 1}$ ist. Für $n=\frac{1}{2}$ findet sich

$$(6.) \quad \int_0^1 \frac{1}{a-xz}\cdot\frac{\partial z}{\sqrt{(z-z^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(a^2-ax)}},$$

woraus z. B. für $x=0$:

$$\int_0^1 \frac{\partial z}{\sqrt{(z-z^2)}} = \pi$$

folgt, wie bekannt ist.

Aus der Formel (5.) läfst sich leicht ein weit allgemeinerer Ausdruck ableiten, indem man beide Seiten $r$mal nach a differentiirt. Es ist:

$$\frac{\partial^s}{\partial a^s}\left(\frac{1}{a-xz}\right) = (-1)^s \cdot \frac{1.2\ldots s}{(a-xz)^{s+1}},$$

$$\frac{\partial^s}{\partial a^s}\left(\frac{1}{(a-x)^{1-n}}\right) = (-1)^s \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(s-n)}{(a-x)^{s+1-n}},$$

$$\frac{\partial^s}{\partial a^s}\left(\frac{1}{a^n}\right) = \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{a^{n+r}},$$

demnach

$$\frac{\partial^r}{\partial a^r}\left(\frac{1}{(a-x)^{1-n}} \cdot \frac{1}{a^n}\right)$$

$$= (-1)^r \Big[\frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-n)}{(a-x)^{r+1-n}a^n} + \frac{r}{1} \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-1-n)}{(a-x)^{r-n}} \cdot \frac{n}{a^{n+1}}$$

$$+ \frac{n.(r-1)}{1.2} \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-2-n)}{(a-x)^{r-n-1}} \cdot \frac{n(n+1)}{a^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{(a-x)^{n-1}} \cdot \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{a^{n+r}}\Big].$$

Demnach erhält man aus (5.):

$$(7.) \quad \int_0^1 \frac{1}{(a-xz)^{r+1}} \cdot \frac{\partial z}{(1-z)^{1-n} z^n}$$

$$= \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{1.2\ldots r} \cdot \frac{1}{a^n(a-x)^{r+1-n}} \Big[\frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-n)}{n(n+1)\ldots(n+r-1)} + \frac{r}{1} \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-1-n)}{(1+n)(2+n)\ldots(r-1+n)} \cdot \frac{a-x}{a}$$

$$+ \frac{r.(r-1)}{1.2} \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-2-n)}{(2+n)(3+n)\ldots(r-1+n)} \cdot \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a-x}{a}\right)^r\Big] \frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

So z. B. erhält man für $n = \frac{1}{2}$:

$$(8.) \quad \int_0^1 \frac{1}{(a-xz)^{r+1}} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(z-z^2)}}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots 2r} \cdot \frac{1}{(a-x)^r \sqrt{(a^2-ax)}} \Big[1 + \frac{r}{1} \cdot \frac{1}{(2r-1)} \cdot \frac{a-x}{a}$$

$$+ \frac{r.(r-1)}{1.2} \cdot \frac{1.3}{(2r-1)(2r-3)} \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a-x}{a}\right)^r\Big] \cdot \pi.$$

Setzt man $x = 0$, so ergiebt sich hieraus

$$(9.) \quad 1 + \frac{r}{1} \cdot \frac{1}{2r-1} + \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot \frac{1.3}{(2r-1)(2r-3)} + \cdots + 1 = \frac{2.4.6\ldots 2r}{1.3.5\ldots(2r-1)}.$$

Setzt man allgemeiner in (7.) $x = 0$, so folgt:

$$\frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-n)}{n(1+n)\ldots(r-1+n)} + \frac{r}{1} \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-1-n)}{(1+n)(2+n)\ldots(r-1+n)}$$

$$+ \frac{r(r-1)}{1.2} \cdot \frac{(1-n)(2-n)\ldots(r-2-n)}{(2+n)(3+n)\ldots(r-1+n)} + \cdots + 1$$

$$= \frac{1.2\ldots r}{n(n+1)\ldots(n+r-1)},$$

woraus, nach einer leichten Umformung,

$$(10.)\quad \Gamma(r+1-n)\Gamma(n)+\frac{r}{1}\cdot\Gamma(r-n)\Gamma(n+1)+\frac{r.(r-1)}{1.2}\Gamma(r-1-n)\Gamma(n+2)+\cdots$$
$$\cdots+\Gamma(1-n)\Gamma(n+r) = \Gamma(r+1)\cdot\frac{\pi}{\sin n\pi}$$

folgt.. Hier, wie in allem Vorstehenden, ist r eine positive ganze Zahl $\geqq 0$, $n \gtrless {0 \atop 1}$. Für $n=\frac{1}{2}$ erhält man aus (10):

$$\Gamma(r+\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{1}{2})+\frac{r}{1}\Gamma(r-\tfrac{1}{2})\Gamma(\tfrac{3}{2})+\frac{r.(r-1)}{1.2}\Gamma(r-\tfrac{3}{2})\Gamma(\tfrac{5}{2})+\cdots$$
$$\cdots+\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(r+\tfrac{1}{2}) = \pi\Gamma(r+1).$$

Rücksichtlich Dessen, dafs oben unendliche Reihen angewendet wurden, die nur insofern gelten, als sie convergent sind, wäre zu bemerken, dafs die gefundenen Resultate, also namentlich die Gleichung (5.), auch nur gelten, insofern die angewandten Reihen convergent sind. Jedoch ist klar, dafs die Gleichung (5.) und also auch (7.) gelten, *so* lange *alle* Elemente der betreffenden Integrale endlich sind; *was sich nach* bekannten Sätzen rechtfertigen läfst.

Sinsheim, Ende Januar 1847.

31.

Die *Lagrange*sche Umkehrungsformel. Directer Beweis des *Taylor*schen Satzes.

(Von Herrn Dr. *Dienger*, Prof. der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Carlsruhe.)

Die bekannte *Lagrange*sche Formel, welche y aus der Gleichung

$$y = a + xf(y)$$

nach steigenden ganzen Potenzen von x giebt, ja selbst eine beliebige Function $F(y)$ von y, ist namentlich von *Cauchy*, dem die Wissenschaft so viel verdankt, strenge abgeleitet worden. Im Folgenden werden wir den Grundgedanken *Cauchy's* im Allgemeinen folgen, um die höchst wichtige Formel zu beweisen. Zugleich haben wir dabei die Absicht, die *Taylor*sche und *Maclaurin*sche Formel durch directe Summirung der unendlichen Reihe zu suchen. Nach unserer Meinung sind nämlich Entwicklungen *in unendliche Reihen* unzuläfslich, wenn ein *geschlossener* Ausdruck, wie es jede bestimmte Function einer Gröfse im Allgemeinen ist, nicht einer unendlichen Reihe *gleich* sein kann, sondern blofs einer endlichen, also geschlossenen Reihe. Dagegen aber kann er die *Grenze* (und dies Wort in dem Sinne genommen, welchen ihm *Dirksen* in dem „Organon der gesammten transcendenten Analysis" beilegt) einer unendlich fortscheitenden Reihe sein. Aber eben deshalb mufs die Aufgabe so gestellt werden, die Grenze dieser Reihe zu finden, wenn sie eine solche hat, d. h. *convergent* ist. Die allgemeine Aufgabe bezüglich des *Maclaurin*schen Satzes ist also: nicht aus $f(x)$ die Reihe

$$(a.) \quad f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \cdots$$

zu finden, sondern vielmehr nachzuweisen, dafs die Grenze der Reihe, deren allgemeines Glied

$$f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{1 \ldots n}f^{(n)}(0)$$

ist, $f(x)$ sei, oder, in gewöhnlicher Weise gesprochen, dafs die *Summe* der Reihe $(a.)$ gleich $f(x)$ ist.

I.

Es sei die unendlich fortlaufende Reihe

$$(1.)\qquad \varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+\cdots$$

gegeben, von der man wisse, dafs sie convergent ist innerhalb gewisser Grenzen von x. Man stelle nun die Aufgabe, die Summe dieser Reihe innerhalb derselben Grenzen von x zu finden. Dafs $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ..., welche die bekannte Bedeutung haben, endlich und unzweideutig bestimmt sind, folgt schon daraus, dafs man weifs, die Reihe sei convergent.

Betrachtet man den endlichen Ausdruck

$$\varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+\cdots+\frac{x^n}{1\ldots n}\varphi^{(n)}(0)=X_n,$$

so kommt die Aufgabe darauf hinaus, die Grenze zu finden, welcher sich X_n mit unendlich wachsendem n nähert.

Es sei ε eine unendlich kleine Gröfse, so ist bekanntlich

$$(2.)\quad \begin{cases} \varphi'(0)=\dfrac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}, \\ \varphi''(0)=\dfrac{\varphi'(\varepsilon)-\varphi'(0)}{\varepsilon}=\dfrac{\dfrac{\varphi(2\varepsilon)-\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon}-\dfrac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}}{\varepsilon}=\dfrac{\varphi(2\varepsilon)-2\varphi(\varepsilon)+\varphi(0)}{\varepsilon^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^{(r)}(0)=\dfrac{\varphi(r\varepsilon)-r\varphi((r-1)\varepsilon)+\dfrac{r.(r-1)}{1.2}\varphi((r-2)\varepsilon)-\cdots\cdots(-1)^r\varphi(0)}{\varepsilon^r}, \end{cases}$$

wie es, auf die angegebene Art fortschliefsend, unmittelbar folgt. Heifst nun X die Summe der Reihe (1.) und bezeichnet man durch

$$\overset{n=\infty}{\mathfrak{G}}\psi(n)$$

den Werth, dem sich die Function $\psi(n)$ für unendlich zu nehmende n nähert, so ist

$$X=\overset{n=\infty}{\mathfrak{G}}(X_n),$$

also

$$X=\overset{n=\infty}{\mathfrak{G}}\Big[\varphi(0)+\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{1}+\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)^2\frac{\varphi(2\varepsilon)-2\varphi(\varepsilon)+\varphi(0)}{1.2}+\cdots$$
$$\cdots+\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)^r\frac{\varphi(r\varepsilon)-r\varphi(r-1)\varepsilon+\cdots(-1)^r\varphi(0)}{1.2\ldots r}+\cdots+\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)^n\frac{\varphi(n\varepsilon)-n\varphi(n-1)\varepsilon+\cdots(-1)^n\varphi(0)}{1.2\ldots n}\Big]$$

Offenbar aber kommt diese Gleichung auf Folgendes zurück:

$$X = \overset{n=\infty}{\mathfrak{S}}\Big[\varphi(0) - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\varphi(0)}{1} + \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varphi(0)}{1.2} - \cdots (-1)^n\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^n\frac{\varphi(0)}{1\ldots n}$$

$$+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\varphi(\varepsilon)}{1} - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varphi(\varepsilon)}{1} + \cdots (-1)^{n-1}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^n\frac{\varphi(\varepsilon)}{1\ldots(n-1)}$$

$$+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varphi(2\varepsilon)}{1.2} - \cdots (-1)^{n-2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^n\frac{\varphi(2\varepsilon)}{1\ldots(n-2).1.2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

$$= \overset{n=\infty}{\mathfrak{S}}\Big[\varphi(0)e^{-\frac{x}{\varepsilon}} + \frac{x}{\varepsilon}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(\varepsilon) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(2\varepsilon) + \cdots + \frac{1}{1\ldots r}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^r e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(r\varepsilon) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{1}{1\ldots n}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^n e^{-\frac{x}{n}}\varphi(n\varepsilon)\Big],$$

wenn man erwägt, dafs

$$e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = \overset{n=\infty}{\mathfrak{S}}\left[1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 - \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3 + \cdots\right]$$

ist. Die Gröfse X ist also auf die Summe der unendlich fortschreitenden Reihe

$$(3.)\quad e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(0) + e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\varphi(\varepsilon) + \frac{1}{1.2}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(2\varepsilon) + \frac{1}{1.2.3}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^3 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\varphi(3\varepsilon) + \cdots$$

reducirt. Der Bedingung für ε wird Genüge geleistet, wenn man $\varepsilon = \frac{x}{n}$ setzt, wobei, wie überall, n unendlich grofs angenommen wird. Man darf also X als die Summe der unendlich fortschreitenden Reihe

$$e^{-n}\varphi(0) + ne^{-n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n^2}{1.2}e^{-n}\varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \frac{n^3e^{-n}}{1.2.3}\varphi\left(\frac{3x}{n}\right) + \cdots + \frac{n^re^{-n}}{1\ldots r}\varphi\left(\frac{rx}{n}\right) + \cdots$$

ansehen, d. h. es ist

$$\overset{n=\infty}{\mathfrak{S}}\Big[e^{-n}\varphi(0) + ne^{-n}\varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{n^2e^{-n}}{1.2}\varphi\left(\frac{2x}{n}\right) + \cdots + \frac{n^re^{-n}}{1\ldots r}\varphi\left(\frac{rx}{n}\right) + \cdots$$

$$\cdots + \frac{n^ne^{-n}}{1\ldots n}\varphi\left(\frac{nx}{n}\right)\Big].$$

Bekanntlich aber ist die Gröfse $\frac{n^re^{-n}}{1\ldots r}$ für $n = \infty$ Null, wenn $r < n$, denn es ist $\frac{n^re^{-n}}{1\ldots r} = \frac{n^r}{1\ldots re^n} = \frac{n^r}{1.2\ldots r}\cdot\frac{1}{1+n+\frac{n^2}{1.2}+\cdots+\frac{n^r}{1\ldots r}+\cdots}$, was offenbar für

$n=\infty$ Null sein wird. Von dem Ausdruck für X bleibt also blofs das Glied

$$(4.)\quad \overset{n=\infty}{\mathfrak{S}}\frac{n^n e^{-n}}{1\ldots n}\varphi\left(\frac{nx}{n}\right)=\varphi(x)\overset{n=\infty}{\mathfrak{S}}\left(\frac{n^n e^{-n}}{1\ldots n}\right)$$

übrig, wenn man annimmt, dafs $\varphi(0)$, $\varphi(\varepsilon)$, $\varphi(2\varepsilon)$, ... $\varphi(x)$ endlich seien, d. h. *dafs* $\varphi(x)$ *von* $x=0$ *bis* $x=x$ *endlich sei.*

Die vorgelegte Aufgabe ist also jetzt auf Berechnung des Ausdrucks (4.) zurückgeführt. Nun ist:

$$\frac{n^n}{1\ldots n}=\frac{n}{1}\cdot\frac{n}{2}\cdots\frac{n}{n}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{e^{l\left(1-\frac{1}{n}\right)}.e^{l\left(1-\frac{2}{n}\right)}.e^{l\left(1-\frac{3}{n}\right)}\cdots e^{l\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}},$$

$$\frac{n^n e^{-n}}{1\ldots n}=\frac{1}{e^n e^{l\left(1-\frac{1}{n}\right)}.e^{l\left(1-\frac{2}{n}\right)}\cdots e^{l\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}}=\frac{1}{e^n.e^{l\left(1-\frac{1}{n}\right)+l\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+l\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}},$$

Es ist aber für $r<n$:

$$l\left(1-\frac{r}{n}\right)=-\left(\frac{r}{n}+\frac{1}{2}\frac{r^2}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{r^3}{n^3}+\cdots\right),$$

also

$$l\left(1-\frac{1}{n}\right)+l\left(1-\frac{2}{n}\right)+l\left(1-\frac{3}{n}\right)+\cdots+l\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=-\left[\frac{1}{n}\sum_1^{n-1}r+\frac{1}{2n^2}\sum_1^{n-1}r^2+\frac{1}{3n^3}\sum_1^{n-1}r^3+\cdots\right].$$

Da hier n unendlich grofs ist, so ist

$$\sum_1^{n-1}r^p=\frac{(n-1)^{p+1}}{p+1}$$

zu setzen, d. h.

$$l\left(1-\frac{1}{n}\right)+l\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+l\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=-n\left[\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\right].$$

Um den Ausdruck

$$(5.)\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$$

zu summiren, bemerken wir, dafs

$$-l(1-x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$$

also wenn man integrirt:

$$x+(1-x)l(1-x) = \frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{3.4}+\cdots$$

ist. Da sich die Seite rechts dieser Gleichung für $x=1$ auf den Ausdruck (5.) reducirt und dieser convergent ist, indem es der gröfsere Ausdruck

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

ist, die Seite links aber für $x=1$ auch $=1$ wird, weil bekanntlich

$$(1-x)l(1-x)$$

Null ist für $x=1$: so erhält man

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots = 1$$

und also

$$e^{l\left(1-\frac{1}{n}\right)+l\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+l\left(1-\frac{n-1}{n}\right)} = e^{-n}$$

für $n=\infty$, demnach

$$\frac{n e^{-n}}{1\ldots n} = \frac{1}{e^n . e^{-n}} = 1$$

für $n=\infty$, und somit

$$X = \varphi(x),$$

d. h.

$$(6.)\quad \varphi(0)+\frac{x}{1}\varphi'(0)+\frac{x^2}{1.2}\varphi''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}\varphi'''(0)+\cdots = \varphi(x);$$

vorausgesetzt, dafs die Reihe convergent sei, wobei also natürlich die Gröfsen $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, ... als endlich angenommen werden müssen, und dafs $\varphi(z)$ endlich sei für *alle* Werthe von z, von $z=0$ bis $z=x$, diese Grenzen eingeschlossen.

Diese Formel (6.) ist die bekannte *Maclaurin*sche Formel.

Man setze hier

$$\varphi(z) = f(z+x),$$

so ergiebt sich unmittelbar:

$$(7.)\quad f(x)+zf'(x)+\frac{z^2}{1.2}f''(x)+\cdots = f(z+x),$$

wenn die Reihe convergent ist, wobei also $f(x)$, $f'(x)$, ... endlich angenommen sind, und wenn $f(y+x)$ endlich ist für *alle* Werthe von y, von $y=0$ bis $y=z$, diese Grenzen mit eingeschlossen.

Nach diesem, wie es scheint, völlig strengen Beweise des wichtigen *Taylor*schen Theorems, bei welchem zugleich *alle* Bedingungen seiner Existenz zum Vorschein kommen *mufsten*, was eben die Folge dieser Art die Reihen zu betrachten ist, wenden wir uns zu dem andern der beiden Theoreme.

II.

Es sei $f(u)$ eine Function von u, die so beschaffen ist, dafs $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... alle endlich sind; dafs ferner $f(u)$ endlich ist von $u=0$ bis $u=z$, und $f(0)$ nicht Null. Nun sei die Gleichung

$$(8.)\quad z-xf(z)=0$$

gegeben, so ist für $x=0$ offenbar $z=0$, und umgekehrt, für $z=0$ auch $x=0$; d. h. die Gleichung (8.) hat eine Wurzel $z=y$, die so beschaffen ist, dafs sie für $z=0$ sich auf Null reducirt. Zugleich wollen wir annehmen, dafs diese Wurzel nicht auch zugleich die Gleichung

$$1-xf'(z)=0$$

befriedige, oder dafs nicht zu gleicher Zeit

$$(9.)\quad y-xf(y)=0 \quad \text{und} \quad 1-xf'(y)=0$$

sei; was darauf hinausläuft, anzunehmen, die Wurzel sei eine *einfache* Wurzel der Gleichung (8.). Da x eine willkürliche Gröfse ist, so werden wir uns also x von 0 bis zu einem Werthe k gehend vorstellen, der so angenommen ist, dafs von $x=0$ bis $x=k$ die Gleichungen (9.) nicht zu gleicher Zeit Statt haben können. Zugleich ist nach den gemachten Voraussetzungen klar, dafs innerhalb gewisser Grenzen von z, nach dem Theoreme (6.):

$$(10.)\quad f(z)=f(0)+\frac{z}{1}f'(0)+\frac{z^2}{1.2}f''(0)+\cdots$$

ist, d. h. dafs, wenigstens für numerisch kleine Werthe von z, $f(z)$ sich in eine nach steigenden positiven Potenzen von z fortgehende Reihe entwickeln lasse, oder genauer, dafs es der Grenze einer solchen Reihe gleich sei.

Ganz eben so folgt (nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch ausgedrückt), dafs

$$z-xf(z)$$

sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortgehende Reihe entwickeln lasse, und da

$$y-xf(y)=0$$

ist, so folgt nach einem bekannten Theoreme:

$$(11.)\qquad z-xf(z) = (z-y)\psi(z),$$

wo $\psi(z)$ die nämliche Eigenschaft zukommt. Die Gleichung (11.) aber ist eine *identische;* woraus sich ergiebt, dafs sie auch Statt hat, wenn man nach z allein differentiirt, d. h. es ist auch:

$$(12.)\qquad 1-xf'(z) = \psi(z)+(z-y)\psi'(z).$$

Aus (11. und 12.) folgt:

$$(13.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1-xf'(z)}{z-xf(z)} = \dfrac{1}{z-y}+\dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)} \text{ oder} \\ \dfrac{\psi'(z)}{\psi(z)} = \dfrac{1-xf'(z)}{z-xf(z)}-\dfrac{1}{z-y}. \end{cases}$$

Auch die Gleichung (13.) ist eine *identische* Gleichung. Läfst also eine Seite derselben sich in eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln, so *mufs* auch die andere sich eben so entwickeln lassen. Ist $F(z)$ eine Function von z, von der Art, dafs $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, ... alle endlich sind, und ist $F(u)$ *endlich,* von $u=0$ bis $u=z$, so läfst sich auch $\frac{F(z)-F(0)}{z}$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von z fortschreitende Reihe entwickeln; wenigstens innerhalb gewisser Grenzen von z. Aus (13.) folgt nun, dafs *identisch*

$$(14.)\qquad \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\cdot\frac{F(z)-F(0)}{z} = \frac{1-xf'(z)}{z-xf(z)}\cdot\frac{F(z)-F(0)}{z}-\frac{1}{z-y}\cdot\frac{F(z)-F(0)}{z}$$

sei. Offenbar hat die Seite links dieser Gleichung die Eigenschaft, sich nach ganzen positiven Potenzen von z entwickeln zu lassen. Denn da $\psi(0)$ nicht Null ist, wie sich aus (11.) ergiebt, so sind $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ... endlich, wenn $\varphi(z)=\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ ist. Ferner ist dann auch $\varphi(u)$ endlich von $u=0$ bis $u=z$. Die Seite rechts der Gleichung (14.) mufs sich also ebenfalls in eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende Reihe entwickeln lassen.

Nun ist

$$\frac{1-xf'(z)}{z-xf(z)} = \frac{\partial}{\partial z}l(z-xf(z)) = \frac{\partial}{\partial z}\Big[l(z)+l\Big(1-\frac{x}{z}f(z)\Big)\Big]$$
$$= \frac{1}{z}+\frac{\partial}{\partial z}l\Big(1-\frac{x}{z}f(z)\Big).$$

Da x beliebig ist, so kann man sich x auch so klein vorstellen, dafs, was auch z sei, der Modulus von $\frac{x}{z}f(z) < 1$ ist. In diesem Falle ist aber

$$l\left(1-\frac{x}{z}f(z)\right) = -\frac{x}{z}f(z) - \frac{1}{2}x^2\left(\frac{f(z)}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}x^3\left(\frac{f(z)}{z}\right)^3 - \cdots,$$

$$\frac{\partial l}{\partial z}\left[1-\frac{x}{z}f(z)\right] = -x\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f(z)}{z}\right) - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{fz}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}x^3\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{f(z)}{z}\right)^3 - \cdots,$$

also

$$(15.)\quad \frac{1-xf'(z)}{z-xf(z)} = \frac{1}{z} - x\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{f(z)}{z}\right) - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{fz}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}x^3\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{f(z)}{z}\right)^3 - \cdots.$$

Ferner ist

$$(16.)\quad \frac{1}{z-y} = (z-y)^{-1} = z^{-1}\left(1-\frac{y}{z}\right)^{-1} = \frac{1}{z}+\frac{y}{z^2}+\frac{y^2}{z^3}+\cdots,$$

indem, wenn x klein ist, auch y klein ist, weil y mit x verschwindet, so dafs man x immer so klein annehmen kann, dafs der Modulus von $\frac{y}{z} < 1$ ist.

Setzt man zur Abkürzung $f(z) = Z$ und bezeichnet durch

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}\cdot Z_0^m$$

den Werth von $\frac{\partial^n}{\partial z^n}(Z^m) = \frac{\partial^n}{\partial z^n}((fz)^m)$ für $z=0$, so ist nach (6.):

$$Z^r = Z_0^r + \frac{z}{1}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^r + \frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0^r + \cdots.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{f(z)}{z}\right)^r = -\frac{r(f(z))^r}{z^{r+1}} + \frac{\frac{\partial}{\partial z}\cdot(fz)^r}{z^r} = -\frac{rZ^r}{z^{r+1}} + \frac{\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z^r}{z^r}$$

$$= -\frac{r}{z^{r+1}}\left[Z_0^r + \frac{z}{1}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^r + \frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0^r + \cdots\right]$$

$$+\frac{1}{z^r}\left[\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^r + \frac{z}{1}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0^r + \frac{z^2}{1.2}\cdot\frac{\partial^3}{\partial z^3}\cdot Z_0^r + \cdots\right]$$

$$= -\frac{r}{z^{r+1}}\cdot Z_0^r - \frac{(r-1)}{z^r}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^r - \frac{r-2}{1.2.z^{r-1}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0^r - \cdots$$

Betrachtet man dieses, so erhält man aus (15. und 16.)

$$\frac{1-xf'(z)}{z-xf(z)}-\frac{1}{z-y}$$

$$= \frac{1}{z} - x\left[-\frac{Z_0}{z^2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0+\frac{2z}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3}{\partial z^3}\cdot Z_0+\frac{3.z^2}{1.2.3.4}\cdot\frac{\partial^4}{\partial z^4}\cdot Z_0+\cdots\right]$$

$$-\frac{x^2}{2}\left[-\frac{2Z_0^2}{z^3}-\frac{1}{z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^2+\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^3}{\partial z^3}\cdot Z_0^2+\frac{2z}{1\,.\,.\,4}\cdot\frac{\partial^4}{\partial z^4}\cdot Z_0^2+\cdots\right]$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$-\frac{x^r}{r}\left[-\frac{rZ_0^r}{z^{r+1}}-\frac{(r-1)}{z^r}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^r-\cdots-\frac{1}{1\ldots(r-1)}\cdot\frac{\partial^{r-1}Z_0^r}{z^2\partial z^{r-1}}+\frac{1}{1\ldots(r+1)}\cdot\frac{\partial^{r+1}Z_0^r}{\partial z^{r+1}}+\cdots\right]$$

$$\cdot\quad\cdot$$

$$-\left[\frac{1}{z}+\frac{y}{z^2}+\frac{y^2}{z^3}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{z^2}\left[-y+xZ_0+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^2+\frac{x^3}{1\ldots3}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0^3+\cdots+\frac{x^r}{1\ldots r}\cdot\frac{\partial^{r-1}}{\partial z^{r-1}}\cdot Z_0^r+\cdots\right]$$

$$\cdot\quad\cdot$$

$$+\frac{1}{z^{r+1}}\left[-y^r+r\left\{\frac{x^r}{r}\cdot Z_0^r+\frac{x^{r+1}}{r+1}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^{r+1}+\frac{x^{r+2}}{r+2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot Z_0^{r+2}+\cdots\right]\right.$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Man multiplicire diesen Ausdruck mit

$$\frac{F(z)-F(0)}{z}=F'(0)+\frac{z}{1.2}F''(0)+\frac{z^2}{1.2.3}F'''(0)+\cdots,$$

so erhält man als Coëfficienten von $\frac{1}{z^2}$ in der Entwicklung:

$$-\frac{y}{1}F'(0)-\frac{y^2}{1.2}F''(0)-\frac{y^3}{1.2.3}F'''(0)-\cdots-\frac{y^r}{1.2\ldots r}F^{(r)}(0)-\cdots$$

$$+x.Z_0F'(0)+x^2\left[\frac{F'(0)}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot Z_0^2+Z_0^2F''(0)\right]+\cdots$$

$$+x^{n+1}\left[\frac{F'(0)}{n+1}\cdot\frac{\partial^n}{\partial z^n}\cdot\frac{Z_0^{n+1}}{1\ldots n}+\frac{2}{n+1}\cdot\frac{F''(0)}{1.2}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\cdot\frac{z^{n+1}}{1\ldots(n-1)}\right.$$

$$\left.+\frac{3}{n+1}\cdot\frac{F'''(0)}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^{n-2}}{\partial z^{n-2}}\cdot\frac{Z_0^{n+1}}{1\ldots(n-2)}+\cdots\right]$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Da aber

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n}[Z^{n+1}F'(z)]=\frac{\partial^n}{\partial z^n}(Z^{n+1}).F'(z)+\frac{n}{1}F''(z)\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}\cdot Z^{n+1}+\cdots,$$

so ist offenbar der Coëfficient von $\frac{1}{z^2}$:

$$(17.) \quad -\left[\frac{y}{1}F'(0)+y^2\frac{F''(0)}{1.2}+y^3\frac{F'''(0)}{1.2.3}+\cdots\right]$$
$$+\frac{x}{1}(ZF'(z))_0+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(Z^2F'(z))_0+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}(Z^3F'(z))_0+\cdots$$
$$\cdots+\frac{x^n}{1\ldots n}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial z^{n-1}}(Z^nF'(z))_0+\cdots,$$

wenn man durch $\frac{\partial^r}{\partial z^r}\cdot(Z^mF'(z))_0$ den Werth bezeichnet, den $\frac{\partial^r}{\partial z^r}\cdot(Z^mF'(z))$ für $z=0$ annimmt.

Da sich aber die Seite rechts der Gleichung (14.), was auch x sei, für Werthe von z innerhalb gewisser Grenzen nach ganzen positiven Potenzen von z mufs entwickeln lassen, so folgt, dafs der Ausdruck (17.) identisch Null sein mufs.

Ist daher die Reihe

$$\frac{y}{1}F'(0)+\frac{y^2}{1.2}F''(0)+\frac{y^3}{1.2.3}F'''(0)+\cdots\cdot$$

convergent, in welchem Falle sie nach (6.) gleich $F(y)-F(0)$ ist, so ist es auch

$$\frac{x}{1}(ZF'(z))_0+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(Z^2F'(z))_0+\cdots\cdot;$$

und umgekehrt. Unter dieser Voraussetzung erhält man demnach

$$(18.) \quad F(y) = F(0)+\frac{x}{1}(f(z).F'(z))_0+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(f(z)^2.F'(z))_0$$
$$+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}(f(z)^3F'(z))_0+\cdots\cdot;$$

welche Formel die verlangte *Umkehrungsformel* ist. Wiederholen wir also das Obige, so gilt sie unter folgenden (gleichzeitigen) Bedingungen:

1. Wenn $f(z)$ so beschaffen ist, dafs $f(u)$ endlich ist von $u=0$ bis $u=y$, $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... alle endlich sind und $f(0)$ nicht Null ist;
2. Wenn $F(z)$ die gleichen Eigenschaften hat, wie $f(z)$, nur dafs $F(0)$ auch Null sein darf;
3) Wenn die Reihe (18.) convergent ist.

Alsdann ist

y der Werth von z, welcher der Gleichung

$$z-xf(z) = 0$$

genügt, vorausgesetzt, dafs nicht zugleich

$$1-xf'(y) = 0,$$

ist, und welcher die Eigenschaft hat, mit x zu verschwinden. x darf nur dann den Werth k annehmen, wenn von $x=0$ bis $x=k$ die letztere Gleichung nicht Statt haben kann.

Dafs diese letztere Bedingung durchaus nothwendig sei, ersieht man auch daraus, dafs bei der vorausgesetzten Convergenz von

$$\frac{y}{1}F'(0)+\frac{y^2}{1.2}F''(0)+\cdots$$

die Gröfse $F(u)$ einen endlichen Werth bekommt, für *alle* Werthe von $u=0$ bis $u=y$, also auch die Gleichung (18.) gelten mufs für *alle* Werthe von $x=0$ an bis $x=x$ (resp. k).

Setzt man $F(y)=y$, so ist

$$(19.)\quad y = \frac{x}{1}f(0)+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(f(z))_0^2+\frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}(f(z))_0^3+\cdots,$$

unter den so eben ausgesprochenen Bedingungen.

Man setze in der Formel (18.), $f(a+z)$, $F(a+z)$ statt $f(z)$, $F(z)$ und $y-a$ statt y, so erhält man:

$$F(y) = F(a)+\frac{x}{1}(f(z).F'(z))_a+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(f(z)^2F'(z))_a+\cdots$$

oder auch

$$(20.)\quad F(y) = F(a)+\frac{x}{1}(f(a).F'(a))+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial a}(f(a)^2F'(a))+\cdots:$$

wenn $f(u)$ endlich ist, von $u=a$ bis $u=y$; wenn $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$, ... alle endlich sind und $f(a)$ nicht Null ist; wenn $F(u)$ die nämlichen Eigenschaften hat, nur dafs $F(a)$ auch Null sein darf; und wenn die Reihe convergent ist.

Alsdann ist $y-a$ der Werth von z, welcher der Gleichung $z=xf(a+z)$ genügt, d. h. es ist $y-a=xf(y)$, oder y ist der Werth von z, der der Gleichung

$$z = a+xf(z)$$

genügt, wenn für keinen Werth von x, von 0 bis x,

$$1 = xf'(y)$$

ist, und welcher Werth die Eigenschaft hat, dafs er gleich a wird für $x=0$.

Ist

$$(21.)\quad \varphi(z) = x$$

und soll y nach den aufsteigenden Potenzen von x entwickelt werden, so sei

$$\frac{z}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

eine Function von z, welche die Bedingungen der Function $f(z)$ in (18.) erfüllt, also so, dafs $\psi(0)$, $\psi'(0)$, ... endlich sind, $\psi(0)$ nicht Null und $\psi(u)$ von $u = 0$ bis $u = z$ endlich sei: so ist

$$z = x\psi(z),$$

und wenn y der Werth von z ist, welcher der Gleichung (21.) genügt und mit x verschwindet, welcher Werth als einfache Wurzel der Gleichung (21.) auftreten soll, so ist:

$$(22.) \qquad y = \frac{x}{1}\psi(0) + \frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\cdot(\psi(z))_0^2 + \frac{x^3}{1.2.3}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot(\psi(z))_0^3 + \cdots;$$

vorausgesetzt, dafs diese Reihe convergent und $\psi(u)$ *endlich* sei, von $u = 0$ bis $u = y$; $\psi(z)$ ist $= \frac{z}{\varphi(z)}$.

Diese Reihe eignet sich zur Auflösung der Gleichung

$$\varphi(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z = x,$$

wo x eine beliebige Gröfse ist. y ist alsdann die Wurzel, welche mit x zugleich verschwindet. Es ist hier

$$\psi(z) = \frac{1}{a_{n-1} + a_{n-2} z + \cdots + z^{n-1}},$$

und a_{n-1} darf also nicht Null sein.

Specielle Anwendungen übergehen wir.

Sinsheim, im Februar 1847.

32.

Tafel der kleinsten positiven Werthe von x_1 und x_2 in der ganzzahligen Gleichung $a_1 x_2 = a_2 x_1 + 1$.

(Vom Herausgeber.)

(Der Akademie der Wissenschaften zu Berlin in einer ihrer Classensitzungen vorgelegt.)

Der Herausgeber dieses Journals hat gelegentlich vor mehreren Jahren eine Tafel der kleinsten positiven Werthe von x_1 und x_2 für die Gleichung

$$(1.) \quad a_1 x_2 = a_2 x_1 + 1,$$

in welcher a_1, a_2, x_1, x_2 *ganze* Zahlen sein sollen und $a_1 > a_2$ ist, bis zu $a_1 = 120$ berechnet.

Bekanntlich ist bei Untersuchungen in der Theorie der Zahlen häufig die Auflösung ganzzahliger Gleichungen ersten Grades wie (1.) nöthig, und es ist unbequem, die Rechnung *in jedem vorkommenden Falle* machen zu müssen. Es ist offenbar besser, wenn diese Rechnung *ein für allemal* gemacht wird, damit nicht Jeder, dem sie vorkommt, von Neuem sie ausführen dürfe. Und auch aufserdem kommt die Auflösung von Gleichungen wie (1.) in mancherlei Fällen vor; nemlich überall, wo zu irgend einem in gröfseren Zahlen gegebenen *Verhältnifs* ein demselben möglichst nahe kommendes Verhältnifs in kleineren Zahlen gesucht wird; z. B. bei der Vergleichung von Maafsen, Gewichten, Münzen u. s. w.

Da auf solche Weise die oben bezeichnete Tafel auch Andern von Nutzen sein kann, so theilt der Herausgeber sie hier mit.

Der Tafel vorausgehend, möge aber berichtet werden, auf welche Weise sie berechnet worden ist, damit die verschiedenen Erleichterungen, deren man sich dabei bediente und welche die ganze Arbeit bis auf sehr Weniges verminderten, von Denen, die etwa geneigt sein möchten, die Tafel, wie es zu wünschen ist, weiter fortzusetzen, ohne Weiteres benutzt werden können.

Hätte man nämlich die Werthe von x_1 und x_2 für alle die verschiedenen Werthe von a_1 und für alle zu jedem a_1 *theilerfremden* a_2, deren zusammen hier bis zu $a_1 = 120$ schon über 4000 Paare sind, nach irgend einer der bekannten Auflösungs-Arten der Gleichung (1.) berechnen wollen, z. B. nach

der *Bachet*schen Art, mittels Verwandlung von $\frac{a_1}{a_2}$ in einen Kettenbruch, welches Verfahren für einzelne Fälle immer noch das bequemste ist, so würde die Rechnung ungemein viel Zeit und Mühe erfordert haben und, eben dadurch, auch mehr oder weniger unsicher geworden sein. Es kam also auf *Erleichterungsmittel* der Rechnung an, und deren giebt es mehrere. Zum Beispiel folgende. Mittels derselben ist die Tafel aufgestellt worden.

I. Man nehme, da vermöge der Gleichung (1.) a_2 und x_1 alle die *Factorenpaare* von $a_1x_2 - 1$ sind, von a_1 die Vielfachen, etwa bis zum 10fachen, so geben die Factorenpaare dieser Vielfachen weniger 1, unmittelbar die zu a_1 und x_2 gehörigen Werthe von a_2 und x_1. Da x_2, bis zu $a_1 = 17$, nicht 10 übersteigt, so läfst sich die Tafel auf diese Weise bis zu $a_1 = 17$ mit geringer Mühe *vollständig* aufstellen. Auch für gröfsere a_1 kann man, wenn man will, das Verfahren anwenden und gelangt dadurch unmittelbar zu mehreren Werthen von a_2 und x_1.

II. Da die Gleichung (1.) nichts anderes ist als

$$(2.) \quad a_1(a_2 - x_2) + 1 = a_2(a_1 - x_1),$$

so kann man, wenn $a_2 - x_2$ durch p und $a_1 - x_1$ durch q bezeichnet wird, willkürlich $p = 1, 2, 3, \ldots 10$ setzen; dann giebt jedes Factorenpaar von $a_1p + 1$ zusammengehörige Werthe von a_2 und q, also a_2 unmittelbar und darauf $x_1 = a_1 - q$ und $x_2 = a_2 - p$. So kann man wieder mehrere, besonders *gröfsere* Werthe von a_2, x_1 und x_2, unmittelbar und mit geringer Mühe finden. Z. B. für $a_1 = 31$, $a_2 - x_2 = p = 4$ gesetzt, giebt $a_1p + 1 = 125 = 5.25$, also $a_2 = 25$ und $q = a_1 - x_1 = 5$; also $x_1 = 31 - 5 = 26$ und $x_2 = a_2 - p = 25 - 4 = 21$.

III. Die Gleichung (1.) ist auch nichts anderes als

$$(3) \quad (a_1 + nx_1)x_2 = (a_2 + nx_2)x_1 + 1;$$

wo n jede beliebige ganze Zahl sein kann. Also *dieselben* Werthe von x_1 und x_2, welche man für *kleinere* a_1 und a_2 gefunden hat, gehören auch zu allen den *gröfseren* Werthen $a_1 + nx_1$ und $a_2 + nx_2$ von a_1 und a_2, und man braucht sie blofs in die fortgesetzte Tafel hineinzuschreiben. Z. B. für $a_1 = 7$ und $a_2 = 5$ ist $x_1 = 4$ und $x_2 = 3$; also ist auch für $a_1 = 11, 15, 19, 23, \ldots$ und $a_2 = 5, 8, 11, 14, \ldots$, $x_1 = 4$ und $x_2 = 3$.

IV. Da die Gleichung (1.) auch so viel ist als

$$(4.) \quad (na_1 - x_1)a_2 = (na_2 - x_2)a_1 + 1,$$

wo n wieder jede beliebige ganze Zahl sein kann, so sind a_1 und a_2 gleich-

mäfsig die zu allen Werthen $na_1 - x_1$ und $na_2 - x_2$ von a_1 und a_2 in (1.) gehörigen Werthe von x_1 und x_2, und man darf sie daher nur wieder in die fortgesetzte Tafel hineinschreiben. Z. B. für $a_1 = 7$ und $a_2 = 5$ ist $x_1 = 4$ und $x_2 = 3$; also sind 7 und 5 gleichmäfsig die Werthe von x_1 und x_2 für die Werthe $na_1 - x_1 = 10, 17, 24, 31, \ldots$ und $na_2 - x_2 = 7, 12, 17, 22, \ldots$ von a_1 und a_2.

V. Da in der Gleichung (1.) a_2 und x_1 *verwechselt* werden können, so füllt jedes für x_1 und x_2 gefundene Werthenpaar, für das *gleiche* a_1, *zwei* Stellen in der Tafel aus; die wenigen Fälle ausgenommen, wo $a_2 = x_1$ ist. Z. B. für $a_1 = 31$ und $a_2 = 9$ ist $x_1 = 24$ und $x_2 = 7$; also ist auch für $a_1 = 31$ und $a_2 = 24$, $x_1 = 9$ und $x_2 = 7$. Dieses Umstandes wegen sind schon überhaupt fast nur *die Hälfte* der Werthe von x_1 und x_2 zu suchen nöthig. Desgleichen folgt hieraus, dafs x_1 für das gleiche a_1 *alle* Werthe von a_2 durchlaufen mufs; was zur *Probe* der Rechnung dient.

VI. Wenn in der Gleichung (1.) a_2 oder x_1 mit irgend einer ganzen Zahl *m aufgeht*, so gehören zu *demselben* a_1 und x_2 auch die Werthe $\frac{a_2}{m}$ und mx_1, oder ma_2 und $\frac{x_1}{m}$, von a_2 und x_1. Z. B. für $a_1 = 37$ und $a_2 = 22$ ist $x_1 = 5$ und $x_2 = 3$; also ist auch für $a_2 = 11$, $x_1 = 10$ und $x_2 = 3$.

VII. Eben so: wenn x_2 durch *m theilbar* ist, gehören zu ma_1 und $\frac{x_2}{m}$ *dieselben* Werthe von a_2 und x_1, wie zu a_1 und x_2. Z. B. für $a_1 = 52$ und $x_2 = 24$, ist $a_2 = 43$ und $x_1 = 29$; also ist auch für $a_1 = 104$ und $x_2 = 12$, $a_2 = 43$ und $x_1 = 29$.

VIII. Für diejenigen a_2, welche in $a_1 + 1$ *aufgehen*, so dafs z. B. $a_2 = \frac{a_1 + 1}{n}$ ist, sind die zugehörigen $x_1 = a_1 - n$ und $x_2 = a_2 - 1$; denn, diese Werthe von a_2, x_1 und x_2 in (1.) gesetzt, giebt $a_1(a_2 - 1) = a_2(a_1 - n) + 1$ oder $-a_1 = -na_2 + 1$ oder $-a_1 = -a_1 - 1 + 1$; wie gehörig. Z. B. für $a_1 = 87$ und $a_2 = 22$ ist $n = 4$, also $x_1 = 87 - 4 = 83$ und $x_2 = 22 - 1 = 21$.

IX. Da die Gleichung (1.) nichts anderes ist als

$$(5.) \quad (a_1 + na_2)x_2 = a_2(x_1 + nx_2) + 1,$$

so gehören zu den Werthen $a_1 + na_2$ und a_2 von a_1 und a_2 die Werthe $x_1 + nx_2$ und x_2 von x_1 und x_2. Z. B. zu $a_1 = 17$ und $a_2 = 5$ gehören $x_1 = 10$ und $x_2 = 3$; also gehören zu $a_1 = 22, 27, 32, 37, \ldots$ und $a_2 = 5$ die Werthe 13, 16, 19, 22, ... von x_1 und 3 von x_2.

40*

X. Ist die Tafel bis zu irgend einem Werthe von a_1 *vollständig* aufgestellt, z. B. durch das Hülfsmittel (I.) bis zu $a_1 = 17$, so lassen sich weiter, je für ein *um 1 gröfseres* a_1, die Werthe von x_1 und x_2 zu *allen* verschiedenen a_2, die *kleiner als* $\frac{1}{2}a$ sind, aus der vollständigen Tafel wie folgt *sämmtlich* unmittelbar finden; also auch diejenigen x_1 und x_2, zu den Werthen von $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ gehörig, welche die andern Hülfsmittel noch nicht geliefert haben. Bezeichnet man nemlich durch u_1 und u_2 die zu $a_1 - a_2$ und zu $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2, wo nun $a_1 > 17$ sein kann, so dafs

$$(6.)\quad (a_1 - a_2)u_2 = a_2 u_1 + 1$$

ist, so findet man u_1 und u_2 in der vorhandenen vollständigen Tafel für alle $a_2 < \frac{1}{2}a_1$; jedoch *nur* für diese, weil in (6.), gemäfs (1.), $a_1 - a_2 > a_2$, also $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ sein mufs. Hierauf giebt (6.)

$$(7.)\quad a_1 u_2 = a_2(u_1 + u_2) + 1,$$

und folglich sind die zu $a_1 > 17$ und $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2 gleich $u_1 + u_2$ und u_2. Z. B. für $a_1 = 18$ und $a_2 = 7$ ist $a_1 - a_2 = 11$ und für 11 und 7 giebt die bis $a_1 = 17$ reichende Tafel $u_1 = 3$ und $u_2 = 2$; also sind die zu $a_1 = 18$ und $a_2 = 7$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2 gleich $u_1 + u_2 = 5$ und $u_2 = 2$.

XI. Da das Mittel (X.) nur die zu $a_1 > 17$ und $a_2 < \frac{1}{2}a_1$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2 giebt, so fehlen noch die zu $a_2 > \frac{1}{2}a_1$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2. Diese finden sich, wie folgt, *ohne weitere Hülfe* der vorhergehenden Tafel unmittelbar aus den Werthen von x_1 und x_2 für $a_2 < \frac{1}{2}a$ *alle;* also auch diejenigen, welche nicht etwa die andern Hülfsmittel schon gegeben haben. Bezeichnet man nemlich durch v_1 und v_2 die zu a_1 und $a_1 - a_2$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2, so dafs

$$(8.)\quad a_1 v_2 = (a_1 - a_2)v_1 + 1$$

ist, wo nun v_1 und v_2 gerade diejenigen Werthe von x_1 und x_2 sind, die durch das Hülfsmittel (X.) gefunden wurden, so sind die zu a_1 und a_2 gehörigen Werthe von x_1 und x_2 folgende:

$$(9.)\quad x_1 = a_1 - v_1 \quad\text{und}\quad x_2 = a_2 + v_2 - v_1.$$

Denn, diese Werthe von x_1 und x_2 in (1.) gesetzt, geben $a_1(a_2 + v_2 - v_1) = a_2(a_1 - v_1) + 1$ oder $a_1 v_2 = (a_1 - a_2)v_1 + 1$, und dies ist die Gleichung (8.). Z. B. für $a_1 = 18$ und $a_1 - a_2 = 7$ (also $a_2 = 11 > \frac{1}{2}a_1$) gab das Hülfsmittel (X.) $v_1 = 5$ und $v_2 = 2$; also ist für $a_1 = 18$ und $a_2 = 11$, $x_1 = 18 - 5 = 13$ und $x_2 = 11 + 2 - 5 = 8$.

XII. Statt durch das Hülfsmittel (XI.) kann man auch noch wie folgt die zu a_1 und $a_2 > \frac{1}{2} a_1$ gehörigen x_1 und x_2 finden. Bezeichnet man nemlich die zu b_1 und b_2 gehörigen Werthe x_1 und x_2 durch w_1 und w_2, so dafs

$$(10.) \qquad b_1 w_2 = b_2 w_1 + 1$$

ist, so ist auch

$$(11.) \qquad (b_1 + n w_1) w_2 = (b_2 + n w_2) w_1 + 1,$$

wo n jede beliebige ganze Zahl sein kann. Sucht man nun ein $b_1 = a_1 + n w_1$ aus, zu dessen w_2 ein *grofses* b_2 gehört, so dafs $b_2 + w_2 > \frac{1}{2} a$ ist, so geben w_1 und w_2 die zu $b_1 + n w_1 = a_1$ und $b_2 + n w_2 = a_2 > \frac{1}{2} a$ gehörigen Werthe von x_1 und x_2. Z. B. für $a_1 = 106$ giebt $b_1 = 95$ mit $w_1 = 11$, $b_2 = 69$ und $w_2 = 8$; also ist für $a_1 = 95 + 11 = 106$ und $a_2 = 69 + 8 = 77$, $x_1 = 11$ und $x_2 = 8$.

Diese verschiedenen Hülfsmittel haben die Aufstellung der Tafel in dem Maafse erleichtert, dafs dazu zusammen nur etwa 16 Arbeitsstunden nöthig waren.

Es wäre zu wünschen, dafs Jemand, der Zeit und Beruf dazu hat, die Tafel wenigstens bis $a_1 = 1000$ fortsetzen möchte.

Berlin 1851.

Umstehend folgt die Tafel.

$a_1 = 1$

a_2	x_1	x_2
0	1	1

$a_1 = 2$

a_2	x_1	x_2
1	1	1

$a_1 = 3$

a_2	x_1	x_2
1	2	1
2	1	1

$a_1 = 4$

a_2	x_1	x_2
1	3	1
3	1	1

$a_1 = 5$

a_2	x_1	x_2
1	4	1
2	2	1
3	3	2
4	1	1

$a_1 = 6$

a_2	x_1	x_2
1	5	1
5	1	1

$a_1 = 7$

a_2	x_1	x_2
1	6	1
2	3	1
3	2	1
4	5	3
5	4	3
6	1	1

$a_1 = 8$

a_2	x_1	x_2
1	7	1
3	5	2
5	3	2
7	1	1

$a_1 = 9$

a_2	x_1	x_2
1	8	1
2	4	1
4	2	1
5	7	4
7	5	4
8	1	1

$a_1 = 10$

a_2	x_1	x_2
1	9	1
3	3	1
7	7	5
9	1	1

$a_1 = 11$

a_2	x_1	x_2
1	10	1
2	5	1
3	7	2
4	8	3
5	2	1
6	9	5
7	3	2
8	4	3
9	6	5
10	1	1

$a_1 = 12$

a_2	x_1	x_2
1	11	1
5	7	3
7	5	3
11	1	1

$a_1 = 13$

a_2	x_1	x_2
1	12	1
2	6	1
3	4	1
4	3	1
5	5	2
6	2	1
7	11	6
8	8	5
9	10	7
10	9	7
11	7	6
12	1	1

$a_1 = 14$

a_2	x_1	x_2
1	13	1
3	9	2
5	11	4
9	3	2
11	5	4
13	1	1

$a_1 = 15$

a_2	x_1	x_2
1	14	1
2	7	1
4	11	3
7	2	1
8	13	7
11	4	3
13	8	7
14	1	1

$a_1 = 16$

a_2	x_1	x_2
1	15	1
3	5	1
5	3	1
7	9	4
9	7	4
11	13	9
13	11	9
15	1	1

$a_1 = 17$

a_2	x_1	x_2
1	16	1
2	8	1
3	11	2
4	4	1
5	10	3
6	14	5
7	12	5
8	2	1
9	15	8
10	5	3
11	3	2
12	7	5
13	13	10
14	6	5
15	9	8
16	1	1

$a_1 = 18$

a_2	x_1	x
1	17	1
5	7	2
7	5	2
11	13	8
13	11	8
17	1	1

$a_1 = 19$

a_2	x_1	x_2
1	18	1
2	9	1
3	6	1
4	14	3
5	15	4
6	3	1
7	8	3
8	7	3
9	2	1
10	17	9
11	12	7
12	11	7
13	16	11
14	4	3
15	5	4
16	13	11
17	10	9
18	1	1

$a_1 = 20$

a_2	x_1	x_2
1	19	1
3	13	2
7	17	6
9	11	5
11	9	5
13	3	2
17	7	6
19	1	1

$a_1 = 21$

a_2	x_1	x_2
1	20	1
2	10	1
4	5	1
5	4	1
8	13	5
10	2	1
11	19	10
13	8	5
16	17	13
17	16	13
19	11	10
20	1	1

$a_1 = 22$

a_2	x_1	x_2
1	21	1
3	7	1
5	13	3
7	3	1
9	17	7
13	5	3
15	19	12
17	9	7
19	15	13
21	1	1

$a_1 = 23$

a_2	x_1	x_2
1	22	1
2	11	1
3	15	2
4	17	3
5	9	2
6	19	5
7	13	4
8	20	7
9	5	2
10	16	7
11	2	1
12	21	11
13	7	4
14	18	17
15	3	2
16	10	7
17	4	3
18	14	11
19	6	5
20	8	7
21	12	11
22	1	1

$a_1 = 24$

a_2	x_1	x_2
1	23	1
5	19	4
7	17	5
11	13	6
13	11	6
17	7	5
19	5	4
23	1	1

$a_1 = 25$

a_2	x_1	x_2
1	24	1
2	12	1
3	8	1
4	6	1
6	4	1
7	7	2
8	3	1
9	11	4
11	9	4
12	2	1
13	23	12
14	16	9
16	14	9
17	22	15
18	18	13
19	21	16
21	19	16
22	17	15
23	13	12
24	1	1

$a_1 = 26$

a_2	x_1	x_2
1	25	1
3	17	2
5	5	1
7	11	3
9	23	8
11	7	3
15	19	11
17	3	2
19	15	11
21	21	17
23	9	8
25	1	1

$a_1 = 27$

a_2	x_1	x_2
1	26	1
2	13	1
4	20	3
5	16	3
7	23	6
8	10	3
10	8	3
11	22	9
13	2	1
14	25	13
16	5	3
17	19	12
19	17	12
20	4	3
22	11	9
23	7	6
25	14	13
26	1	1

$a_1 = 28$

a_2	x_1	x_2
1	27	1
3	9	1
5	11	2
9	3	1
11	5	2
13	15	7
15	13	7
17	23	14
19	25	17
23	17	14
25	19	17
27	1	1

$a_1 = 29$

a_2	x_1	x_2
1	28	1
2	14	2
3	19	2
4	7	1
5	23	4
6	24	5
7	4	1
8	18	5
9	16	5
10	26	9
11	21	8
12	12	5
13	20	9
14	2	1
15	27	14
16	9	5
17	17	10
18	8	5
19	3	2
20	13	9
21	11	8
22	25	19
23	5	4
24	6	5
25	22	19
26	10	9
27	15	14
28	1	1

$a_1 = 30$

a_2	x_1	x_2
1	29	1
7	17	4
11	19	7
13	23	10
17	7	4
19	11	7
23	13	10
29	1	1

$a_1 = 31$

a_2	x_1	x_2
1	30	1
2	15	1
3	10	1
4	23	3
5	6	1
6	5	1
7	22	5
8	27	7
9	24	7
10	3	1
11	14	5
12	18	7
13	19	8
14	11	5
15	2	1
16	29	15
17	20	11
18	12	7
19	13	8
20	17	11
21	28	19
22	7	5
23	4	3
24	9	7
25	26	21
26	25	21
27	8	7
28	21	19
29	16	15
30	1	1

$a_1 = 32$

a_2	x_1	x_2
1	31	1
3	21	2
5	19	3
7	9	2
9	7	2
11	29	10
13	27	11
15	17	8
17	15	8
19	5	3
21	3	2
23	25	18
25	23	18
27	13	11
29	11	10
31	1	1

$a_1 = 33$

a_2	x_1	x_2
1	32	1
2	16	1
4	8	1
5	13	2
7	14	3
8	4	1
10	23	7
13	5	2
14	7	3
16	2	1
17	31	16
19	26	15
20	28	17
23	10	7
25	29	22
26	19	15
28	20	17
29	25	22
31	17	16
32	1	1

$a_1 = 34$

a_2	x_1	x_2
1	33	1
3	11	1
5	27	4
7	29	6
9	15	4
11	3	1
13	13	5
15	9	4
19	25	14
21	21	13
23	31	21
25	19	14
27	5	4
29	7	6
31	23	21
33	1	1

$a_1 = 35$

a_2	x_1	x_2
1	34	1
2	17	1
3	23	2
4	26	3
6	29	5
8	13	3
9	31	8
11	19	6
12	32	11
13	8	3
16	24	11
17	2	1
18	33	17
19	11	6
22	27	17
23	3	2
24	16	11
26	4	3
27	22	17
29	6	5
31	9	8
32	12	11
33	18	17
34	1	1

$a_1 = 36$

a_2	x_1	x_2
1	35	1
5	7	1
7	5	1
11	13	4
13	11	4
17	19	9
19	17	9
23	25	16
25	23	16
29	31	25
31	29	25
35	1	1

$a_1 = 37$

a_2	x_1	x_2
1	36	1
2	18	1
3	12	1
4	9	1
5	22	3
6	6	1
7	21	4
8	23	5
9	4	1
10	11	3
11	10	3
12	3	1
13	17	6
14	29	11
15	32	13
16	30	13
17	13	6
18	2	1
19	35	18
20	24	13
21	7	4
22	5	3
23	8	5
24	20	13
25	34	23
26	27	19
27	26	19
28	33	25
29	14	11
30	16	13
31	31	26
32	15	13
33	28	25
34	25	23
35	19	18
36	1	1

$a_1 = 38$

a_2	x_1	x_2
1	37	1
3	25	2
5	15	2
7	27	5
9	21	5
11	31	9
13	35	12
15	5	2
17	29	13
21	9	5
23	33	20
25	3	2
27	7	5
29	17	13
31	11	9
33	23	20
35	13	12
37	1	1

$a_1 = 39$

a_2	x_1	x_2
1	38	1
2	19	1
4	29	3
5	31	4
7	11	2
8	34	7
10	35	9
11	7	2
14	25	9
16	17	7
17	16	7
19	2	1
20	37	19
22	23	13
23	22	13
25	14	9
28	32	23
29	4	3
31	5	4
32	28	23
34	8	7
35	10	9
37	20	19
38	1	1

$a_1 = 40$

a_2	x_1	x_2
1	39	1
3	13	1
7	17	3
9	31	7
11	29	8
13	3	1
17	7	3
19	21	10
21	19	10
23	33	19
27	37	25
29	11	8
31	9	7
33	23	19
37	27	25
39	1	1

$a_1 = 41$

a_2	x_1	x_2
1	40	1
2	20	1
3	27	2
4	10	1
5	8	1
6	34	5
7	35	6
8	5	1
9	9	2
10	4	1
11	26	7
12	17	5
13	22	7
14	38	13

$a_1 = 41$

a_2	x_1	x_2
15	30	11
16	23	9
17	12	5
18	25	11
19	28	13
20	2	1
21	39	20
22	13	7
23	16	9
24	29	17
25	18	11
26	11	7
27	3	2
28	19	13
29	24	17
30	15	11
31	37	28
32	32	25
33	36	29
34	6	5
35	7	6
36	33	29
37	31	28
38	14	13
39	21	20
40	1	1

$a_1 = 42$

a_2	x_1	x_2
1	41	1
5	25	3
11	19	5
13	29	9
17	37	15
19	11	5
23	31	17
25	5	3
29	13	9
31	23	17
37	17	15
41	1	1

$a_1 = 43$

a_2	x_1	x_2
1	42	1
2	21	1
3	14	1
4	32	3
5	17	2
6	7	1
7	6	1
8	16	3
9	19	4
10	30	7
11	39	10
12	25	7
13	33	10
14	3	1
15	20	7
16	8	3

$a_1 = 43$

a_2	x_1	x_2
17	5	2
18	31	13
19	9	4
20	15	7
21	2	1
22	41	21
23	28	15
24	34	19
25	12	7
26	38	23
27	35	22
28	23	15
29	40	27
30	10	7
31	18	13
42	4	3
33	13	10
34	24	19
35	27	22
36	37	31
37	36	31
38	26	23
39	11	10
40	29	27
41	22	21
42	1	1

$a_1 = 44$

a_2	x_1	x_2
1	43	1
3	29	2
5	35	4
7	25	4
9	39	8
13	27	8
15	41	14
17	31	12
19	37	16
21	23	11
23	21	11
25	7	4
27	13	8
29	3	2
31	17	12
35	5	4
37	19	16
39	9	8
41	15	14
43	1	1

$a_1 = 45$

a_2	x_1	x_2
1	44	1
2	22	1
4	11	1
7	32	5
8	28	5
11	4	1
13	38	11
14	16	5

$a_1 = 45$

a_2	x_1	x_2
16	14	5
17	37	14
19	26	11
22	2	1
23	43	22
26	19	11
28	8	5
29	31	20
31	29	20
32	7	5
34	41	31
37	17	14
38	13	11
41	34	31
43	23	22
44	1	1

$a_1 = 46$

a_2	x_1	x_2
1	45	1
3	15	1
5	9	1
7	13	2
9	5	1
11	25	6
13	7	2
15	3	1
17	27	10
19	29	12
21	35	16
25	11	6
27	17	10
29	19	12
31	43	29
33	39	28
35	21	16
37	41	33
39	33	28
41	37	33
43	31	29
45	1	1

$a_1 = 47$

a_2	x_1	x_2
1	46	1
2	23	1
3	31	2
4	35	3
5	28	3
6	39	5
7	20	3
8	41	7
9	26	5
10	14	3
11	17	4
12	43	11
13	18	5
14	10	3
15	25	8
16	14	15

$a_1 = 47$

a_2	x_1	x_2
17	11	4
18	13	5
19	42	17
20	7	3
21	38	17
22	32	15
23	2	1
24	45	23
25	15	8
26	9	5
27	40	23
28	5	3
29	34	21
30	36	23
31	3	2
32	22	15
33	37	26
34	29	21
35	4	3
36	30	23
37	33	26
38	21	17
39	6	5
40	27	23
41	8	7
42	19	17
43	12	11
44	16	15
45	24	23
46	1	1

$a_1 = 48$

a_2	x_1	x_2
1	47	1
5	19	2
7	41	6
11	13	3
13	11	3
17	31	11
19	5	2
23	25	12
25	23	12
29	43	26
31	17	11
35	37	27
37	35	27
41	7	6
43	29	26
47	1	1

$a_1 = 49$

a_2	x_1	x_2
1	48	1
2	24	1
3	16	1
4	12	1
5	39	4
6	8	1
8	6	1
9	38	7

$a_1 = 49$

a_2	x_1	x_2
10	44	9
11	40	9
12	4	1
13	15	4
15	13	4
16	3	1
17	23	8
18	19	7
19	18	7
20	22	9
22	20	9
23	17	8
24	2	1
25	47	24
26	32	17
27	29	16
29	27	16
30	31	19
31	30	19
32	26	17
33	46	31
34	36	25
36	34	25
37	45	34
38	9	7
39	5	4
40	11	9
41	43	36
43	41	36
44	10	9
45	37	34
46	33	31
47	25	24
48	1	1

$a_1 = 50$

a_2	x_1	x_2
1	49	1
3	33	2
7	7	1
9	11	2
11	9	2
13	23	6
17	47	16
19	21	8
21	19	8
23	13	6
27	37	20
29	31	18
31	29	18
33	3	2
37	27	20
39	41	32
41	39	32
43	43	37
47	17	16
49	1	1

$a_1 = 51$

a_2	x_1	x_2
1	50	1
2	25	1
4	38	3
5	10	1
7	29	4
8	19	3
10	5	1
11	37	8
13	47	12
14	40	11
16	35	11
17	8	3
20	28	11
22	44	19
23	31	14
25	2	1
26	49	25
28	20	11
29	7	4
31	23	14
32	43	27
35	16	11
37	11	8
38	4	3
40	14	11
41	46	37
43	32	27
44	22	19
46	41	37
47	13	12
49	26	25
50	1	1

$a_1 = 52$

a_2	x_1	x_2
1	51	1
3	17	1
5	31	3
7	37	5
9	23	4
11	33	7
15	45	13
17	3	1
19	41	15
21	47	19
23	9	4
25	27	13
27	25	13
29	43	24
31	5	3
33	11	7
35	49	33
37	7	5
41	19	15
43	29	24
45	15	13
47	21	19
49	35	33
51	1	1

$a_1 = 53$

a_2	x_1	x_2
1	52	1
2	26	1
3	35	2
4	13	1
5	21	2
6	44	5
7	15	2
8	33	5
9	47	8
10	37	7
11	24	5
12	22	5
13	4	1
14	34	9
15	7	2
16	43	13
17	28	9
18	50	17
19	39	14
20	45	17
21	5	2
22	12	5
23	23	10
24	11	5
25	36	17
26	2	1
27	51	26
28	17	9
29	42	23
30	30	17
31	41	24
32	48	29
33	8	5
34	14	9
35	3	2
36	25	17
37	10	7
38	46	33
39	19	14
40	49	37
41	31	24
42	29	23
43	16	13
44	6	5
45	20	17
46	38	33
47	9	8
48	32	29
49	40	37
50	18	17
51	27	26
52	1	1

$a_1 = 54$

a_2	x_1	x_2
1	53	1
5	43	4
7	23	3
11	49	10
13	29	7
17	19	6
19	17	6
23	7	3
25	41	19
29	13	7
31	47	27
35	37	24
37	35	24
41	25	19
43	5	4
47	31	27
49	11	10
53	1	1

$a_1 = 55$

a_2	x_1	x_2
1	54	1
2	27	1
3	18	1
4	41	3
6	9	1
7	47	6
8	48	7
9	6	1
12	32	7
13	38	9
14	51	13
16	24	7
17	42	13
18	3	1
19	26	9
21	34	13
23	43	18
24	16	7
26	19	9
27	2	1
28	53	27
29	36	19
31	39	22
32	12	7
34	21	13
36	29	19
37	52	35
38	13	9
39	31	22
41	4	3
42	17	13
43	23	18
46	49	41
47	7	6
48	8	7
49	46	41
51	14	13
52	37	35
53	28	27
54	1	1

$a_1 = 56$

a_2	x_1	x_2
1	55	1
3	37	2
5	11	1
9	31	5
11	5	1
13	43	10
15	41	11
17	23	7
19	53	18
23	17	7
25	47	21
27	29	14
29	27	14
31	9	5
33	39	23
37	3	2
39	33	23
41	15	11
43	13	10
45	51	41
47	25	21
51	45	41
53	19	18
55	1	1

$a_1 = 57$

a_2	x_1	x_2
1	56	1
2	28	1
4	14	1
5	34	3
7	8	1
8	7	1
10	17	3
11	31	6
13	35	8
14	4	1
16	32	9
17	10	3
20	37	13
22	44	17
23	52	21
25	41	18
26	46	21
28	2	1
29	55	28
31	11	6
32	16	9
34	5	3
35	13	8
37	20	13
40	47	33
41	25	18
43	53	40
44	22	17
46	26	21
47	40	33
49	50	43
50	49	43
52	23	21
53	43	40
55	29	28
56	1	1

$a_1 = 58$

a_2	x_1	x_2
1	57	1
3	19	1
5	23	2
7	33	4
9	45	7
11	21	4
13	49	11
15	27	7
17	17	5
19	3	1
21	11	4
23	5	2
25	51	22
27	15	7
31	43	23
33	7	4
35	53	32
37	47	30
39	55	37
41	41	29
43	31	23
45	9	7
47	37	30
49	13	11
51	25	22
53	35	32
55	39	37
57	1	1

$a_1 = 59$

a_2	x_1	x_2
1	58	1
2	29	1
3	39	2
4	44	3
5	47	4
6	49	5
7	42	5
8	22	3
9	13	2
10	53	9
11	16	3
12	54	11
13	9	2
14	21	5
15	55	14
16	11	3
17	52	15
18	36	11
19	31	10
20	56	19
21	14	5
22	8	3
23	41	16
24	27	11
25	33	14
26	34	15
27	24	11
28	40	19
29	2	1
30	57	29
31	19	10
32	35	19
33	25	14
34	26	15
35	32	19
36	18	11
37	51	32
38	45	29
39	3	2
40	28	19
41	23	16
42	7	5
43	48	35
44	4	3
45	38	29
46	50	39
47	5	4
48	43	35
49	6	5
50	46	39
51	37	32
52	17	15
53	10	9
54	12	11
55	15	14
56	20	19
57	30	29
58	1	1

$a_1 = 60$

a_2	x_1	x_2
1	59	1
7	17	2
11	49	9
13	23	5
17	7	2
19	41	13
23	13	5
29	31	15
31	29	15
37	47	29
41	19	13
43	53	38
47	37	29
49	11	9
53	43	38
59	1	1

$a_1 = 61$

a_2	x_1	x_2
1	60	1
2	30	1
3	20	1
4	15	1
5	12	1
6	10	1
7	26	3
8	38	5
9	27	4
10	6	1
11	11	2
12	5	1
13	14	3
14	13	3
15	4	1
16	19	5
17	43	12
18	44	13
19	16	5
20	3	1
21	29	10
22	36	13
23	53	20
24	33	13
25	39	16
26	7	3
27	9	4
28	37	17
29	21	10
30	2	1
31	59	30
32	40	21
33	24	13
34	52	29
35	54	31
36	22	13
37	28	17
38	8	5
39	25	16
40	32	21
41	58	39
42	45	31
43	17	12
44	18	13
45	42	31
46	57	43
47	48	37
48	47	37
49	56	45
50	50	41
51	55	46
52	34	29
53	23	20
54	35	31
55	51	46
56	49	45
57	46	43
58	41	39
59	31	30
60	1	1

$a_1 = 62$

a_2	x_1	x_2
1	61	1
3	41	2
5	37	3
7	53	6
9	55	8
11	45	8
13	19	4
15	33	8
17	51	14
19	13	11
21	59	20
23	35	13
25	57	23
27	39	17
29	47	22
33	15	8
35	23	13
37	5	3
39	27	17
41	3	2
43	49	34
45	11	8
47	29	22
49	43	34
51	17	14
53	7	6
55	9	8
57	25	23
59	21	20
61	1	1

$a_1 = 63$

a_2	x_1	x_2
1	62	1
2	31	1
4	47	3
5	25	2
8	55	7
10	44	7
11	40	7
13	29	6
16	59	15
17	37	10
19	53	16
20	22	7
22	20	7
23	52	19
25	5	2
26	46	19
29	13	6
31	2	1
32	61	31
34	50	27
37	17	10
38	58	35
40	11	7
41	43	28
43	41	28
44	10	7
46	26	19
47	4	3

$a_1 = 63$

a_2	x_1	x_2
50	34	27
52	23	19
53	19	16
55	8	7
58	38	35
59	16	15
61	32	31
62	1	1

$a_1 = 64$

a_2	x_1	x_2
1	63	1
3	21	1
5	51	4
7	9	1
9	7	1
11	29	5
13	59	12
15	17	4
17	15	4
19	37	11
21	3	1
23	25	9
25	23	9
27	45	19
29	11	5
31	33	16
33	31	16
35	53	29
37	19	11
39	41	25
41	39	25
43	61	41
45	27	19
47	49	36
49	47	36
51	5	4
53	35	29
55	57	49
57	55	49
59	13	12
61	43	41
63	1	1

$a_1 = 65$

a_2	x_1	x_2
1	64	1
2	32	1
3	43	2
4	16	1
6	54	5
7	37	4
8	8	1
9	36	5
11	59	10
12	27	5
14	51	11
16	4	1
17	42	11
18	18	5

$a_1 = 65$

a_2	x_1	x_2
19	41	12
21	34	11
22	62	21
23	48	17
24	46	17
27	12	5
28	58	25
29	56	25
31	44	21
32	2	1
33	63	32
34	21	11
36	9	5
37	7	4
38	53	31
41	19	12
42	17	11
43	3	2
44	31	21
46	24	17
47	47	34
48	23	17
49	61	46
51	14	11
53	38	31
54	6	5
56	29	25
57	57	50
58	28	25
59	11	10
61	49	46
62	22	21
63	33	32
64	1	1

$a_1 = 66$

a_2	x_1	x_2
1	65	1
5	13	1
7	47	5
13	5	1
17	31	8
19	59	17
23	43	15
25	29	11
29	25	11
31	17	8
35	49	26
37	41	23
41	37	23
43	23	15
47	7	5
49	35	26
53	61	49
59	19	17
61	53	49
65	1	1

$a_1 = 67$

a_2	x_1	x_2
1	66	1
2	33	1
3	22	1
4	50	3
5	40	3
6	11	1
7	19	2
8	25	3
9	52	7
10	20	3
11	6	1
12	39	7
13	36	7
14	43	9
15	58	13
16	46	11
17	63	16
18	26	7
19	7	2
20	10	3
21	51	16
22	3	1
23	32	11
24	53	19
25	8	3
26	18	7
27	62	25
28	55	23
29	30	13
30	29	13
31	54	25
32	23	11
33	2	1
34	65	33
35	44	23
36	13	7
37	38	21
38	37	21
39	12	7
40	5	3
41	49	30
42	59	37
43	14	9
44	35	23
45	64	43
46	16	11
47	57	40
48	60	43
49	41	30
50	4	3
51	21	16
52	9	7
53	24	19
54	31	25
55	28	23
56	61	51
57	47	40
58	15	13
59	42	37
60	48	43
61	56	51
62	27	25

$a_1 = 67$

a_2	x_1	x_2
63	17	16
64	45	43
65	34	33
66	1	1

$a_1 = 68$

a_2	x_1	x_2
1	67	1
3	45	2
5	27	2
7	29	3
9	15	2
11	37	6
13	47	9
15	9	2
19	25	7
21	55	17
23	65	22
25	19	7
27	5	2
29	7	3
31	57	26
33	35	17
35	33	17
37	11	6
39	61	35
41	63	38
43	49	31
45	3	2
47	13	9
49	43	31
53	59	46
55	21	17
57	31	26
59	53	46
61	39	35
63	41	38
65	23	22
67	1	1

$a_1 = 69$

a_2	x_1	x_2
1	68	1
2	34	1
4	17	1
5	55	4
7	59	6
8	43	5
10	62	9
11	25	4
13	53	10
14	64	13
16	56	13
17	4	1
19	29	8
20	31	9
22	47	15
25	11	4

$a_1 = 69$

a_2	x_1	x_2
26	61	23
28	32	13
29	19	8
31	20	9
32	28	13
34	2	1
35	67	34
37	41	22
38	49	27
40	50	29
41	37	22
43	8	5
44	58	37
47	22	15
49	38	27
50	40	29
52	65	49
53	13	10
55	5	4
56	16	13
58	44	37
59	7	6
61	26	23
62	10	9
64	14	13
65	52	49
67	35	34
68	1	1

$a_1 = 70$

a_2	x_1	x_2
1	69	1
3	23	1
9	31	4
11	19	3
13	43	8
17	37	9
19	11	3
23	3	1
27	57	22
29	41	17
31	9	4
33	53	25
37	17	9
39	61	34
41	29	17
43	13	8
47	67	45
51	59	43
53	33	25
57	27	22
59	51	43
61	39	34
67	47	45
69	1	1

$a_1 = 71$

a_2	x_1	x_2
1	70	1
2	35	1
3	47	2
4	53	3
5	14	1
6	59	5
7	10	1
8	62	7
9	63	8
10	7	1
11	58	9
12	65	11
13	60	11
14	5	1
15	52	11
16	31	7
17	25	6
18	67	17
19	56	15
20	39	11
21	27	8
22	29	9
23	37	12
24	68	23
25	17	6
26	30	11
27	21	8
28	38	15
29	22	9
30	26	11
31	16	7
32	51	23
33	43	20
34	48	23
35	2	1
36	69	35
37	23	12
38	28	15
39	20	11
40	55	31
41	45	26
42	49	29
43	33	20
44	50	31
45	41	26
46	54	35
47	3	2
48	34	23
49	42	29
50	44	31
51	32	23
52	15	11
53	4	3
54	46	35
55	40	31
56	19	15
57	66	53
58	11	9
59	6	5
60	13	11
61	64	55
62	8	7

$a_1 = 71$

a_2	x_1	x_2
63	9	8
64	61	55
65	12	11
66	57	53
67	18	17
68	24	23
69	36	35
70	1	1

$a_1 = 72$

a_2	x_1	x_2
1	71	1
5	43	3
7	41	4
11	13	2
13	11	2
17	55	13
19	53	14
23	25	8
25	23	8
29	67	27
31	65	28
35	37	18
37	35	18
41	7	4
43	5	3
47	49	32
49	47	32
53	19	14
55	17	13
59	61	50
61	59	50
65	31	28
67	29	27
71	1	1

$a_1 = 73$

a_2	x_1	x_2
1	72	1
2	36	1
3	24	1
4	18	1
5	29	2
6	12	1
7	52	5
8	9	1
9	8	1
10	51	7
11	53	8
12	6	1
13	28	5
14	26	5
15	34	7
16	41	9
17	30	7
18	4	1
19	23	6
20	62	17
21	66	19
22	63	19

$a_1 = 73$

a_2	x_1	x_2
23	19	6
24	3	1
25	35	12
26	14	5
27	27	10
28	13	5
29	5	2
30	17	7
31	40	17
32	57	25
33	42	19
34	15	7
35	25	12
36	2	1
37	71	36
38	48	25
39	58	31
40	31	17
41	16	9
42	33	19
43	56	33
44	68	41
45	60	37
46	46	29
47	59	38
48	38	25
49	70	47
50	54	37
51	10	7
52	7	5
53	11	8
54	50	37
55	69	52
56	43	33
57	32	25
58	39	31
59	47	38
60	45	37
61	67	56
62	20	17
63	22	19
64	65	57
65	64	57
66	21	19
67	61	56
68	44	41
69	55	52
70	49	47
71	37	36
72	1	1

$a_1 = 74$

a_2	x_1	x_2
1	73	1
3	49	2
5	59	4
7	21	2
9	41	5
11	47	7
13	17	3
15	69	14

$a_1 = 74$

a_2	x_1	x_2
17	13	3
19	35	9
21	7	2
23	45	14
25	71	24
27	63	23
29	51	20
31	31	13
33	65	29
35	19	9
39	55	29
41	9	5
43	43	25
45	23	14
47	11	7
49	3	2
51	29	20
53	67	48
55	39	29
57	61	47
59	5	4
61	57	47
63	27	23
65	33	29
67	53	48
69	15	14
71	25	24
73	1	1

$a_1 = 75$

a_2	x_1	x_2
1	74	1
2	36	1
4	56	3
7	32	3
8	28	3
11	34	5
13	23	4
14	16	3
16	14	3
17	22	5
19	71	18
22	17	5
23	13	4
26	49	17
28	8	3
29	31	12
31	29	12
32	7	3
34	11	5
37	2	1
38	73	37
41	64	35
43	68	39
44	46	27
46	44	27
47	67	42
49	26	17
52	62	43
53	58	41
56	4	3
58	53	41
59	61	48
61	59	48
62	52	43
64	41	35
67	47	42
68	43	39
71	19	18
73	38	37
74	1	1

$a_1 = 76$

a_2	x_1	x_2
1	75	1
3	25	1
5	15	1
7	65	6
9	59	7
11	69	10
13	35	6
15	5	1
17	67	15
21	47	13
23	33	10
25	3	1
27	45	16
29	55	21
31	49	20
33	23	10
35	13	6
37	39	19
39	37	19
41	63	34
43	53	30
45	27	16
47	21	13
49	31	20
51	73	49
53	43	30
55	29	21
59	9	7
61	71	57
63	41	34
65	7	6
67	17	15
69	11	10
71	61	57
73	51	49
75	1	1

$a_1 = 77$

a_2	x_1	x_2
1	76	1
2	38	1
3	51	2
4	19	1
5	46	3
6	64	5
8	48	5
9	17	2
10	23	3
12	32	5
13	71	12
15	41	8
16	24	5
17	9	2
18	47	11
19	4	1
20	50	13
23	10	3
24	16	5
25	40	13
26	74	25
27	57	20
29	69	26
30	59	23
31	72	29
32	12	5
34	43	19
36	62	29
37	52	25
38	2	1
39	75	38
40	25	13
41	15	8
43	34	19
45	65	38
46	5	3
47	18	11
48	8	5
50	20	13
51	3	2
52	37	25
53	61	42
54	67	47
57	27	20
58	73	55
59	30	23
60	68	53
61	53	42
62	36	29
64	6	5
65	45	38
67	54	47
68	60	53
69	29	26
71	13	12
72	31	29
73	58	55
74	26	25
75	39	38
76	1	1

$a_1 = 78$

a_2	x_1	x_2
1	77	1
5	31	2
7	11	1
11	7	1
17	55	12
19	41	10
23	61	18
25	53	17
29	43	16
31	5	2
35	49	22
37	59	28
41	19	10
43	29	16
47	73	44
49	35	22
53	25	17
55	17	12
59	37	28
61	23	18
67	71	61
71	67	61
73	47	44
77	1	1

$a_1 = 79$

a_2	x_1	x_2
1	78	1
2	39	1
3	26	1
4	59	3
5	63	4
6	13	1
7	45	4
8	69	7
9	35	4
10	71	9
11	43	6
12	46	7
13	6	1
14	62	11
15	21	4
16	74	15
17	65	14
18	57	13
19	54	13
20	75	19
21	15	4
22	61	17
23	24	7
24	23	7
25	60	19
26	3	1
27	38	13
28	31	11
29	49	18
30	50	19
31	28	11
32	37	15
33	67	28
34	72	31
35	9	4
36	68	31
37	32	15
38	27	13
39	2	1
40	77	39
41	52	27
42	47	25
43	11	6
44	70	39
45	7	4
46	12	7
47	42	25
48	51	31
49	29	18
50	30	19
51	48	31
52	41	27
53	76	51
54	19	13
55	56	39
56	55	39
57	18	13
58	64	47
59	4	3
60	25	19
61	22	17
62	14	1
63	5	4
64	58	47
65	17	14
66	73	61
67	33	28
68	36	31
69	8	7
70	44	39
71	10	9
72	34	31
73	66	61
74	16	15
75	20	19
76	53	51
77	40	39
78	1	1

$a_1 = 80$

a_2	x_1	x_2
1	79	1
3	53	2
7	57	5
9	71	8
11	29	4
13	43	7
17	47	10
19	21	5
21	19	5
23	73	21
27	77	26
29	11	4
31	49	19
33	63	26
37	67	31
39	41	20
41	39	20
43	13	7
47	17	10
49	31	19
51	69	44
53	3	2
57	7	2
59	61	45
61	59	45
63	33	26
67	37	31
69	51	44
71	9	8
73	23	21
77	27	26
79	1	1

$a_1 = 81$

a_2	x_1	x_2
1	80	1
2	40	1
4	20	1
5	16	1
7	23	2
8	10	1
10	8	1
11	22	3
13	56	9
14	52	9
16	5	1
17	19	4
19	17	4
20	4	1
22	11	3
23	7	2
25	68	21
26	28	9
28	26	9
29	67	24
31	47	18
32	43	17
34	50	21
35	37	16
37	35	16
38	49	23
40	2	1
41	79	40
43	32	17
44	46	25
46	44	25
47	31	18
49	38	23
50	34	21
52	14	9
53	55	36
55	53	36
56	13	9
58	74	53
59	70	51
61	77	58
62	64	49
64	62	49
65	76	61
67	29	24
68	25	21
70	59	51
71	73	64
73	71	64
74	58	53
76	65	61
77	61	58
79	41	40
80	1	1

$a_1 = 82$

a_2	x_1	x_2
1	81	1
3	27	1
5	49	3
7	35	3
9	9	1
11	67	9
13	63	10
15	71	13
17	53	11
19	69	16
21	39	10
23	57	16
25	59	18
27	3	1
29	65	23
31	37	14
33	77	31
35	7	3
37	31	14
39	21	10
43	61	32
45	51	28
47	75	43
49	5	3
51	45	28
53	17	11
55	79	53
57	23	16
59	25	18
61	43	32
63	13	10
65	29	23
67	11	9
69	19	16
71	15	13
73	73	65
75	47	43
77	33	31
79	55	53
81	1	1

$a_1 = 83$

a_2	x_1	x_2
1	82	1
2	41	1
3	55	2
4	62	3
5	33	2
6	69	5
7	71	6
8	31	3
9	46	5
10	58	7
11	15	2
12	76	11
13	51	8
14	77	13
15	11	2
16	57	11
17	39	8
18	23	5
19	48	11
20	29	7
21	79	20
22	49	13
23	18	5
24	38	11
25	73	22
26	67	21
27	43	14
28	80	27
29	20	7
30	47	17
31	8	3
32	70	27
33	5	2
34	61	25
35	64	27
36	53	23
37	74	33
38	24	11
39	17	8
40	56	27
41	2	1
42	81	41
43	27	14
44	66	35
45	59	32
46	9	5
47	30	17
48	19	11
49	22	13
50	78	47
51	13	8
52	75	47
53	36	23
54	63	41
55	3	2
56	40	27
57	16	11
58	10	7
59	45	32
60	65	47
61	34	25
62	4	3
63	54	41
64	35	27
65	60	47
66	44	35
67	26	21
68	72	59

$a_1 = 83$

a_2	x_1	x_2
69	6	5
70	32	27
71	7	6
72	68	59
73	25	22
74	37	33
75	52	47
76	12	11
77	14	13
78	50	47
79	21	20
80	28	27
81	42	41
82	1	1

$a_1 = 84$

a_2	x_1	x_2
1	83	1
5	67	4
11	61	8
13	71	11
17	79	16
19	53	12
23	73	20
25	47	14
29	55	19
31	65	24
37	59	26
41	43	21
43	41	21
47	25	14
53	19	12
55	29	19
59	37	26
61	11	8
65	31	24
67	5	4
71	13	11
73	23	20
79	17	16
83	1	1

$a_1 = 85$

a_2	x_1	x_2
1	86	1
2	42	1
3	28	1
4	21	1
6	14	1
7	12	1
8	53	5
9	66	7
11	54	7
12	7	1
13	13	2
14	6	1
16	69	13
18	33	7
19	76	17
21	4	1
22	27	7
23	48	13
24	46	13
26	49	15
27	22	7
28	3	1
29	41	14
31	74	27
32	77	29
33	78	7
36	59	25
37	62	27
38	38	17
39	61	28
41	29	14
42	2	1
43	83	42
44	56	29
46	24	13
47	47	26
48	23	13
49	26	15
52	67	41
53	8	5
54	11	7
56	44	29
57	82	55
58	63	43
59	36	25
61	39	28
62	37	27
63	58	43
64	81	61
66	9	7
67	52	41
69	16	13
71	79	66
72	72	61
73	78	67
74	31	27
76	19	17
77	32	29
78	73	67
79	71	66
81	64	61
82	57	55
83	43	42
84	1	1

$a_1 = 86$

a_2	x_1	x_2
1	85	1
3	57	2
5	17	1
7	49	4
9	19	2
11	39	5
13	33	5
15	63	11
17	5	1
19	9	2
21	45	11
23	71	19
25	55	16
27	35	11
29	83	28
31	61	22
33	13	5
35	27	11
37	79	34
39	11	5
41	65	31
45	21	11
47	75	41
49	7	4
51	59	35
53	73	45
55	25	16
57	3	2
59	51	35
61	31	22
63	15	11
65	41	31
67	77	60
69	81	65
71	23	19
73	53	45
75	47	41
77	67	60
79	37	34
81	69	65
83	29	28
85	1	1

$a_1 = 87$

a_2	x_1	x_2
1	86	1
2	43	1
4	65	3
5	52	3
7	62	5
8	76	7
10	26	3
11	79	10
13	20	3
14	31	5
16	38	7
17	46	9
19	32	7
20	13	3
22	83	21
23	34	9
25	80	23
26	10	3
28	59	19
31	14	5
32	19	7
34	23	9
35	82	33
37	47	20
38	16	7
40	50	23
41	70	33
43	2	1
44	85	43
46	17	9
47	37	20
49	71	40
50	40	23
52	5	3
53	64	39
55	68	43
56	73	47
59	28	19
61	77	54
62	7	5
64	53	39
65	4	3
67	74	57
68	55	43
70	41	33
71	49	40
73	56	47
74	67	57
76	8	7
77	61	54
79	11	10
80	25	23
82	35	33
83	22	21
85	44	43
86	1	1

$a_1 = 88$

a_2	x_1	x_2
1	87	1
3	29	1
5	35	2
7	25	2
9	39	4
13	27	4
15	41	7
17	31	6
19	37	8
21	67	16
23	65	17
25	7	2
27	13	4
29	3	1
31	17	6
35	5	2
37	19	8
39	9	4
41	15	7
43	45	22
45	43	22
47	73	39
49	79	44
51	69	40
53	83	50
57	71	46
59	85	57
61	75	52
63	81	58
65	23	17
67	21	16
69	51	40
71	57	46
73	47	39
75	61	52
79	49	44
81	63	58
83	53	50
85	59	57
87	1	1

$a_1 = 89$

a_2	x_1	x_2
1	88	1
2	44	1
3	59	2
4	22	1
5	71	4
6	74	5
7	38	3
8	11	1
9	79	8
10	80	9
11	8	1
12	37	5
13	41	6
14	19	3
15	83	14
16	50	9
17	68	13
18	84	17
19	14	3
20	40	9
21	72	17
22	4	1
23	58	15
24	63	17
25	32	9
26	65	19
27	56	17
28	54	17
29	46	15
30	86	29
31	66	23
32	25	9
33	62	23
34	34	13
35	61	24
36	42	17
37	12	5
38	7	3
39	73	32
40	20	9
41	13	6
42	36	17
43	60	29
44	2	1
45	87	44
46	29	15
47	53	28
48	76	41
49	69	38
50	16	9
51	82	47
52	77	45
53	47	28
54	28	17
55	55	34
56	27	17
57	64	41
58	23	15
59	3	2
60	43	29
61	35	24
62	32	23
63	24	17
64	57	41
65	26	19
66	31	23
67	85	64
68	17	13
69	49	38
70	75	59
71	5	4
72	21	17
73	39	32
74	6	5
75	70	59
76	48	41
77	52	45
78	81	71
79	9	8
80	10	9
81	78	71
82	51	47
83	15	14
84	18	17
85	67	64
86	30	29
87	45	44
88	1	1

$a_1 = 90$

a_2	x_1	x_2
1	89	1
7	77	6
11	49	6
13	83	12
17	37	7
19	71	15
23	43	11
29	31	10
31	29	10
37	17	7
41	79	36
43	23	11
47	67	35
49	11	6
53	73	43
59	61	40
61	59	40
67	47	35
71	19	15
73	53	43
77	7	6
79	41	36
83	13	12
89	1	1

$a_1 = 91$

a_2	x_1	x_2
1	90	1
2	45	1
3	30	1
4	68	3
5	18	1
6	15	1
8	34	3
9	10	2
10	9	1
11	33	4
12	53	7
15	6	1
16	17	3
17	16	3
18	5	1
19	67	14
20	50	11
22	62	15
23	87	22
24	72	19
25	40	11
27	64	19
29	69	22
30	3	1
31	44	15
32	54	19
33	11	4
34	8	3
36	48	19
37	59	24
38	79	33
40	25	11
41	71	32
43	55	26
44	31	15
45	2	1
46	89	45
47	60	31
48	36	19
50	20	11
51	66	37
53	12	7
54	32	19
55	43	26
57	83	52
58	80	51
59	37	24
60	47	31
61	88	59
62	22	15
64	27	19
66	51	37
67	19	14
68	4	3
69	29	22
71	41	32
72	24	19
73	86	69
74	75	61
75	74	61
76	85	71
79	38	33
80	58	51
81	82	73
82	81	73
83	57	52
85	76	71
86	73	69
87	23	22
88	61	59
89	46	45
90	1	1

$a_1 = 92$

a_2	x_1	x_2
1	91	1
3	61	2
5	55	3
7	13	1
9	51	5
11	25	3
13	7	1
15	49	8
17	27	5
19	29	6
21	35	8
25	11	3
27	17	5
29	19	6
31	89	30
33	39	14
35	21	8
37	87	35
39	33	14
41	83	37
43	77	36
45	47	23
47	45	23
49	15	8
51	9	5
53	59	34
55	5	3
57	71	44
59	53	34
61	3	2
63	73	50
65	75	53
67	81	59
71	57	44
73	63	50
75	65	53

$a_1 = 92$

a_2	x_1	x_2
77	43	36
79	85	73
81	67	59
83	41	37
85	79	73
87	37	35
89	31	30
91	1	1

$a_1 = 93$

a_2	x_1	x_2
1	92	1
2	46	1
4	23	1
5	37	2
7	53	4
8	58	5
10	65	7
11	76	9
13	50	7
14	73	11
16	29	5
17	82	15
19	44	9
20	79	17
22	38	9
23	4	1
25	26	7
26	25	7
28	83	25
29	16	5
32	61	21
34	41	15
35	85	32
37	5	2
38	22	9
40	86	37
41	34	15
43	80	37
44	19	9
46	2	1
47	91	46
49	74	37
50	13	7
52	59	33
53	7	4
55	71	42
56	88	53
58	8	5
59	52	33
61	32	21
64	77	53
65	10	7
67	68	49
68	67	49
70	89	67
71	55	42
73	14	11
74	49	37
76	11	9
77	64	53

$a_1 = 93$

a_2	x_1	x_2
79	20	17
80	43	37
82	17	15
83	28	25
85	35	32
86	40	37
88	56	53
89	70	67
91	47	46
92	1	1

$a_1 = 94$

a_2	x_1	x_2
1	93	1
3	31	1
5	75	4
7	67	5
9	73	7
11	17	2
13	65	9
15	25	4
17	11	2
19	89	18
21	85	19
23	49	12
25	15	4
27	87	25
29	81	25
31	3	1
33	37	13
35	51	19
37	33	13
39	53	22
41	55	24
43	59	27
45	71	34
49	23	12
51	35	19
53	39	22
55	41	24
57	61	37
59	43	27
61	57	37
63	91	61
65	13	9
67	7	5
69	79	58
71	45	34
73	9	7
75	5	4
77	83	68
79	69	58
81	29	25
83	77	68
85	21	19
87	27	25
89	19	18
91	63	61
93	1	1

$a_1 = 95$

a_2	x_1	x_2
1	94	1
2	47	1
3	63	2
4	71	3
6	79	5
7	27	2
8	83	7
9	21	2
11	69	8
12	87	11
13	73	10
14	61	9
16	89	15
17	67	12
18	58	11
21	9	2
22	82	19
23	33	8
24	91	23
26	84	23
27	7	2
28	78	23
29	36	11
31	49	16
32	92	31
33	23	8
34	81	29
36	29	11
37	77	30
39	56	23
41	44	19
42	52	23
43	53	24
44	41	19
46	64	31
47	2	1
48	93	47
49	31	16
51	54	29
52	42	23
53	43	24
54	51	29
56	39	23
58	18	11
59	66	41
61	14	9
62	72	47
63	3	2
64	46	31
66	59	41
67	17	12
68	88	63
69	11	8
71	4	3
72	62	47
73	13	10
74	86	67
77	37	30
78	28	23
79	6	5
81	34	29
82	22	19

$a_1 = 95$

a_2	x_1	x_2
83	8	7
84	26	23
86	74	67
87	12	11
88	68	63
89	16	15
91	24	23
92	32	31
93	48	47
94	1	1

$a_1 = 96$

a_2	x_1	x_2
1	95	1
5	19	1
7	41	3
11	61	7
13	59	8
17	79	14
19	5	1
23	25	6
25	23	6
29	43	13
31	65	21
35	85	31
37	83	32
41	7	3
43	29	13
47	49	24
49	47	24
53	67	37
55	89	51
59	13	8
61	11	7
65	31	21
67	53	37
71	73	54
73	71	54
77	91	73
79	17	14
83	37	32
85	35	31
89	55	51
91	77	73
95	1	1

$a_1 = 97$

a_2	x_1	x_2
1	96	1
2	48	1
3	32	1
4	24	1
5	58	3
6	16	1
7	83	6
8	12	1
9	43	4
10	29	3
11	44	5
12	8	1

$a_1 = 97$

a_2	x_1	x_2
13	82	11
14	90	13
15	84	13
16	6	1
17	57	10
18	70	13
19	51	10
20	63	13
21	60	13
22	22	5
23	59	14
24	4	1
25	31	8
26	41	11
27	79	22
28	45	13
29	10	3
30	42	13
31	25	8
32	3	1
33	47	16
34	77	27
35	36	13
36	35	13
37	76	29
38	74	29
39	92	37
40	80	33
41	26	11
42	30	13
43	9	4
44	11	5
45	28	13
46	78	37
47	33	16
48	2	1
49	95	48
50	64	33
51	19	10
52	69	37
53	86	47
54	88	49
55	67	38
56	71	41
57	17	10
58	5	3
59	23	14
60	21	13
61	62	39
62	61	39
63	20	13
64	50	33
65	94	63
66	72	49
67	55	38
68	87	61
69	52	37
70	18	13
71	56	41
72	66	49
73	93	70
74	38	29

$a_1 = 97$

a_2	x_1	x_2
75	75	58
76	37	29
77	34	27
78	46	37
79	27	22
80	40	33
81	91	76
82	13	11
83	7	6
84	15	13
85	89	78
86	53	47
87	68	61
88	54	49
89	85	78
90	14	13
91	81	76
92	39	37
93	73	70
94	65	63
95	49	48
96	1	1

$a_1 = 98$

a_2	x_1	x_2
1	97	1
3	65	2
5	39	2
9	87	8
11	89	10
13	15	2
15	13	2
17	23	4
19	67	13
23	17	4
25	47	12
27	29	8
29	27	8
31	79	25
33	95	32
37	45	17
39	5	2
41	43	18
43	41	18
45	37	17
47	25	12
51	73	38
53	61	33
55	57	32
57	55	32
59	93	56
61	53	33
65	3	2
67	19	13
69	71	50
71	69	50
73	51	38
75	81	62
79	31	25

$a_1 = 98$

a_2	x_1	x_2
81	75	62
83	85	72
85	83	72
87	9	8
89	11	10
93	59	56
95	33	32
97	1	1

$a_1 = 99$

a_2	x_1	x_2
1	98	1
2	49	1
4	74	3
5	79	4
7	14	1
8	37	3
10	89	9
13	38	5
14	7	1
16	68	11
17	64	11
19	26	5
20	94	19
23	43	10
25	95	24
26	19	5
28	53	15
29	58	17
31	83	26
32	34	11
34	32	11
35	82	19
37	8	3
38	13	5
40	47	19
41	70	29
43	23	10
46	71	33
47	40	19
49	2	1
50	97	49
52	59	31
53	28	15
56	76	43
58	29	17
59	52	31
61	86	53
62	91	57
64	17	11
65	67	44
67	65	44
68	16	11
70	41	29
71	46	33
73	80	59
74	4	3
76	56	43
79	5	4

$a_1 = 99$

a_2	x_1	x_2
80	73	59
82	35	19
83	31	26
85	92	79
86	61	53
89	10	9
91	62	57
92	85	79
94	20	19
95	25	24
97	50	49
98	1	1

$a_1 = 100$

a_2	x_1	x_2
1	99	1
3	33	1
7	57	4
9	11	1
11	9	1
13	23	3
17	47	8
19	21	4
21	19	4
23	13	3
27	37	10
29	31	9
31	29	9
33	3	1
37	27	10
39	41	16
41	39	16
43	93	40
47	17	8
49	51	25
51	49	25
53	83	44
57	7	4
59	61	36
61	59	36
63	73	46
67	97	65
69	71	49
71	69	49
73	63	46
77	87	67
79	81	64
81	79	64
83	53	44
87	77	67
89	91	81
91	89	81
93	43	40
97	67	65
99	1	1

$a_1 = 101$

a_2	x_1	x_2
1	100	1
2	50	1
3	67	2
4	25	1
5	20	1
6	84	5
7	72	5
8	63	5
9	56	5
10	10	1
11	55	6
12	42	5
13	31	4
14	36	5
15	74	11
16	82	13
17	95	16
18	28	5
19	85	16
20	5	1
21	24	5
22	78	17
23	79	18
24	21	5
25	4	1
26	66	17
27	86	23
28	18	5
29	94	27
30	37	11
31	13	4
32	41	13
33	52	17
34	98	33
35	75	26
36	14	5
37	30	11
38	93	35
39	44	17
40	53	21
41	32	13
42	12	5
43	54	23
44	39	17
45	92	41
46	90	41
47	58	27
48	61	29
49	68	33
50	2	1
51	99	50
52	33	17
53	40	21
54	43	23
55	11	6
56	9	5
57	62	35
58	47	27
59	89	52
60	69	41
61	48	29
62	57	35

$a_1 = 101$

a_2	x_1	x_2
63	8	5
64	71	45
65	87	56
66	26	17
67	3	2
68	49	33
69	60	41
70	88	61
71	64	41
72	7	5
73	83	60
74	15	11
75	35	26
76	97	73
77	80	61
78	22	17
79	23	18
80	77	61
81	96	77
82	16	13
83	73	60
84	6	5
85	19	16
86	27	23
87	65	56
88	70	61
89	59	52
90	46	41
91	91	82
92	45	41
93	38	35
94	29	27
95	17	16
96	81	77
97	76	73
98	34	33
99	51	50
100	1	1

$a_1 = 102$

a_2	x_1	x_2
1	101	1
5	61	3
7	29	2
11	37	4
13	47	6
19	59	11
23	31	7
25	53	13
29	7	2
31	23	7
35	67	23
37	11	4
41	97	39
43	83	35
47	13	6
49	77	37
53	25	13
55	89	48
59	19	11
61	5	3

$a_1 = 102$

a_2	x_1	x_2
65	91	58
67	35	23
71	79	55
73	95	68
77	49	37
79	71	55
83	43	35
89	55	48
91	65	58
95	73	68
97	41	39
101	1	1

$a_1 = 103$

a_2	x_1	x_2
1	102	1
2	51	1
3	34	1
4	77	3
5	41	2
6	17	1
7	44	3
8	90	7
9	80	7
10	72	7
11	28	3
12	60	7
13	95	12
14	22	3
15	48	7
16	45	7
17	6	1
18	40	7
19	65	12
20	36	7
21	49	10
22	14	3
23	94	21
24	30	7
25	70	17
26	99	25
27	61	16
28	11	3
29	71	20
30	24	7
31	93	28
32	74	23
33	78	25
34	3	1
35	50	17
36	20	7
37	64	23
38	84	31
39	66	25
40	18	7
41	5	2
42	76	31
43	91	38
44	7	3
45	16	7
46	47	21

$a_1 = 103$

a_2	x_1	x_2
47	46	21
48	15	7
49	21	10
50	35	17
51	2	1
52	101	51
53	68	35
54	82	43
55	88	47
56	57	31
57	56	31
58	87	49
59	96	55
60	12	7
61	27	16
62	98	59
63	85	52
64	37	23
65	19	12
66	39	25
67	83	54
68	53	35
69	100	67
70	25	17
71	29	20
72	10	7
73	79	56
74	32	23
75	92	67
76	42	31
77	4	3
78	33	25
79	73	56
80	9	7
81	89	70
82	54	43
83	67	54
84	38	31
85	63	52
86	97	81
87	58	49
88	55	47
89	81	70
90	8	7
91	43	38
92	75	67
93	31	28
94	23	21
95	13	12
96	59	55
97	86	81
98	62	59
99	26	25
100	69	67
101	52	51
102	1	1

$a_1 = 104$

a_2	x_1	x_2
1	103	1
3	69	2
5	83	4
7	89	6
9	23	2
11	85	9
15	97	14
17	55	9
19	93	17
21	99	20
23	9	2
25	79	19
27	77	20
29	43	12
31	57	17
33	63	20
35	101	34
37	59	21
41	71	28
43	29	12
45	67	29
47	73	33
49	87	41
51	53	26
53	51	26
55	17	9
57	31	17
59	37	21
61	75	44
63	33	20
67	45	29
69	3	2
71	41	28
73	47	33
75	61	44
77	27	20
79	25	19
81	95	74
83	5	4
85	11	9
87	49	41
89	7	6
93	19	17
95	81	74
97	15	14
99	21	20
101	35	34
103	1	1

$a_1 = 105$

a_2	x_1	x_2
1	104	1
2	52	1
4	26	1
8	13	1
11	19	2
13	8	1
16	59	9
17	37	6
19	11	2
22	62	13

$a_1 = 105$

a_2	x_1	x_2
23	73	16
26	4	1
29	76	21
31	44	13
32	82	25
34	71	23
37	17	6
38	58	21
41	64	25
43	83	34
44	31	13
46	89	39
47	67	30
52	2	1
53	103	52
58	38	21
59	16	9
61	74	43
62	22	13
64	41	25
67	47	30
68	88	57
71	34	23
73	23	16
74	61	43
76	29	21
79	101	76
82	32	25
83	43	34
86	94	78
88	66	57
89	46	39
92	97	85
94	86	77
97	92	85
101	79	76
103	53	52
104	1	1

$a_1 = 106$

a_2	x_1	x_2
1	105	1
3	35	1
5	21	1
7	15	1
9	47	4
11	77	8
13	57	7
15	7	1
17	81	13
19	39	7
21	5	1
23	23	5
25	89	21
27	51	13
29	95	26
31	41	12
33	61	19
35	3	1
37	63	22
39	19	7

$a_1 = 106$

a_2	x_1	x_2
41	31	12
43	69	28
45	73	31
47	9	4
49	93	43
51	27	13
55	79	41
57	13	7
59	97	54
61	33	19
63	37	22
65	75	46
67	87	55
69	43	28
71	103	69
73	45	31
75	65	46
77	11	8
79	55	41
81	17	13
83	83	65
85	101	81
87	67	55
89	25	21
91	99	85
93	49	43
95	29	26
97	59	54
99	91	85
101	85	81
103	71	69
105	1	1

$a_1 = 107$

a_2	x_1	x_2
1	106	1
2	53	1
3	71	2
4	80	3
5	64	3
6	89	5
7	61	4
8	40	3
9	95	8
10	32	3
11	68	7
12	98	11
13	74	9
14	84	11
15	57	8
16	20	3
17	44	7
18	101	17
19	45	8
20	16	3
21	56	11
22	34	7
23	93	20
24	49	11
25	77	18
26	37	9

$a_1 = 107$

a_2	x_1	x_2
27	103	26
28	42	11
29	59	16
30	82	23
31	69	20
32	10	3
33	94	29
34	22	7
35	55	18
36	104	35
37	26	9
38	76	27
39	96	35
40	8	3
41	60	23
42	28	11
43	102	41
44	17	7
45	19	8
46	100	43
47	66	29
48	78	35
49	24	11
50	92	43
51	86	41
52	72	35
53	2	1
54	105	53
55	35	18
56	21	11
57	15	8
58	83	45
59	29	16
60	41	23
61	7	4
62	88	51
63	90	53
64	5	3
65	79	48
66	47	29
67	99	62
68	11	7
69	31	20
70	81	53
71	3	2
72	52	35
73	85	58
74	13	9
75	97	68
76	38	27
77	25	18
78	48	35
79	65	48
80	4	3
81	70	53
82	30	23
83	58	45
84	14	11
85	73	58
86	51	41
87	91	74
88	62	51

$a_1 = 107$

a_2	x_1	x_2
89	6	5
90	63	53
91	87	74
92	50	43
93	23	20
94	33	29
95	9	8
96	39	35
97	75	68
98	12	11
99	67	62
100	46	43
101	18	17
102	43	41
103	27	26
104	36	35
105	54	53
106	1	1

$a_1 = 108$

a_2	x_1	x_2
1	107	1
5	43	2
7	77	5
11	49	5
13	83	10
17	19	3
19	17	3
23	61	13
25	95	22
29	67	18
31	101	29
35	37	12
37	35	12
41	79	30
43	5	2
47	85	37
49	11	5
53	55	27
55	53	27
59	97	53
61	23	13
65	103	62
67	29	18
71	73	48
73	71	48
77	7	5
79	41	30
83	13	10
85	47	37
89	91	75
91	89	75
95	25	22
97	59	53
101	31	29
103	65	62
107	1	1

$a_1 = 109$

a_2	x_1	x_2
1	108	1
2	54	1
3	36	1
4	27	1
5	87	4
6	18	1
7	31	2
8	68	5
9	12	1
10	98	9
11	99	10
12	9	1
13	67	8
14	70	9
15	29	4
16	34	5
17	32	5
18	6	1
19	86	15
20	49	9
21	83	16
22	104	21
23	90	19
24	59	13
25	61	14
26	88	21
27	4	1
28	35	9
29	15	4
30	69	19
31	7	2
32	17	5
33	33	10
34	16	15
35	28	9
36	3	1
37	58	18
38	43	15
39	95	34
40	79	29
41	101	38
42	96	37
43	38	15
44	52	21
45	46	19
46	45	19
47	51	22
48	84	37
49	20	9
50	85	39
51	47	22
52	44	21
53	37	18
54	2	1
55	107	54
56	72	37
57	65	34
58	62	33
59	24	13
60	89	49
61	25	14
62	58	33

$a_1 = 109$

a_2	x_1	x_2
63	64	37
64	63	73
65	57	34
66	71	43
67	13	8
68	8	5
69	30	19
70	14	9
71	66	43
72	56	37
73	106	71
74	81	55
75	93	64
76	76	53
77	92	65
78	102	73
79	40	29
80	94	69
81	74	55
82	105	79
83	21	16
84	48	37
85	50	39
86	19	15
87	5	4
88	26	21
89	60	49
90	23	19
91	103	86
92	77	65
93	75	64
94	80	69
95	39	34
96	42	37
97	100	89
98	10	9
99	11	10
100	97	89
101	41	38
102	78	73
103	91	86
104	22	21
105	82	79
106	73	71
107	55	54
108	1	1

$a_1 = 110$

a_2	x_1	x_2
1	109	1
3	73	2
7	47	3
9	61	5
13	93	11
17	97	15
19	81	14
21	89	17
23	43	9
27	57	14
29	91	24
31	39	11

$a_1 = 110$

a_2	x_1	x_2
37	107	36
39	31	11
41	59	22
43	23	9
47	7	3
49	101	45
51	69	32
53	83	40
57	27	14
59	41	22
61	9	5
63	103	59
67	87	53
69	51	32
71	79	51
73	3	2
79	71	51
81	19	14
83	53	40
87	67	53
89	21	17
91	29	24
93	13	11
97	17	15
101	49	45
103	63	59
107	37	36
109	1	1

$a_1 = 111$

a_2	x_1	x_2
1	110	1
2	55	2
4	83	3
5	22	1
7	95	6
8	97	7
10	11	1
11	10	1
13	17	2
14	103	13
16	104	15
17	13	2
19	35	6
20	61	11
22	5	1
23	82	17
25	71	16
26	64	15
28	107	27
29	88	23
31	68	19
32	52	15
34	62	19
35	19	6
38	73	25
40	86	31
41	46	17
43	80	31
44	58	23
46	41	17

$a_1 = 111$

a_2	x_1	x_2
47	85	36
49	77	34
50	91	41
52	32	15
53	67	32
55	2	1
56	109	55
58	44	23
59	79	42
61	20	11
62	34	19
64	26	15
65	70	41
67	53	32
68	31	19
70	65	41
71	25	16
73	38	25
76	92	63
77	49	34
79	59	42
80	43	31
82	23	17
83	4	3
85	47	36
86	40	31
88	29	23
89	106	85
91	50	41
92	76	63
94	98	83
95	7	6
97	7	7
98	94	83
100	101	91
101	100	91
103	14	13
104	16	15
106	89	85
107	28	27
109	56	55
110	1	1

$a_1 = 112$

a_2	x_1	x_2
1	111	1
3	37	1
5	67	3
9	87	7
11	61	6
13	43	5
15	97	13
17	79	12
19	53	9
23	73	15
25	103	23
27	29	7
29	27	7
31	65	18
33	95	28
37	3	1

$a_1 = 112$

a_2	x_1	x_2
39	89	31
41	71	26
43	13	5
45	107	43
47	81	34
51	101	46
53	19	9
55	57	28
57	55	28
59	93	49
61	11	6
63	31	18
67	5	3
69	99	61
71	41	26
73	23	15
75	109	73
79	17	12
81	47	34
83	85	63
85	83	63
87	9	7
89	39	31
93	59	49
95	33	28
97	15	13
99	69	61
101	51	46
103	25	23
107	45	43
109	75	73
111	1	1

$a_1 = 113$

a_2	x_1	x_2
1	112	1
2	56	1
3	75	2
4	28	1
5	45	2
6	94	5
7	16	1
8	14	1
9	25	2
10	79	7
11	41	4
12	47	5
13	26	3
14	8	1
15	15	2
16	7	1
17	93	14
18	69	11
19	107	18
20	96	17
21	43	8
22	77	15
23	54	11
24	80	17
25	9	2
26	13	3

$a_1 = 113$

a_2	x_1	x_2
27	46	11
28	4	1
29	74	19
30	64	17
31	51	14
32	60	17
33	89	26
34	103	31
35	71	22
36	91	29
37	58	19
38	110	37
39	84	29
40	48	17
41	11	4
42	78	29
43	21	8
44	95	37
45	5	2
46	27	11
47	12	5
48	40	17
49	83	36
50	61	27
51	31	14
52	63	29
53	81	38
54	23	11
55	76	37
56	2	1
57	111	56
58	37	19
59	90	47
60	32	17
61	50	27
62	82	45
63	52	29
64	30	17
65	73	42
66	101	59
67	86	51
68	108	65
69	18	11
70	92	57
71	35	22
72	102	65
73	65	42
74	29	19
75	3	2
76	55	37
77	22	15
78	42	29
79	10	7
80	24	17
81	53	38
82	62	45
83	49	36
84	39	29
85	109	82
86	67	51
87	100	77
88	104	81

$a_1 = 113$

a_2	x_1	x_2
89	33	26
90	59	47
91	36	27
92	70	57
93	17	14
94	6	5
95	44	37
96	20	17
97	106	91
98	98	85
99	105	92
100	87	77
101	65	59
102	72	65
103	34	31
104	88	81
105	99	92
106	97	91
107	19	18
108	68	65
109	85	82
110	38	37
111	57	56
112	1	1

$a_1 = 114$

a_2	x_1	x_2
1	113	1
5	91	4
7	65	4
11	31	3
13	35	4
17	67	10
23	109	22
25	41	9
29	55	14
31	11	3
35	13	4
37	77	25
41	25	9
43	53	20
47	97	40
49	107	46
53	43	20
55	29	14
59	85	44
61	71	38
65	7	4
67	17	10
71	61	38
73	89	57
77	37	25
79	101	70
83	103	75
85	59	44
89	73	57
91	5	4
97	47	40

$a_1 = 114$

a_2	x_1	x_2
101	79	70
103	83	75
107	49	46
109	23	22
113	1	1

$a_1 = 115$

a_2	x_1	x_2
1	114	1
2	57	1
3	38	1
4	86	3
6	19	1
7	82	5
8	43	3
9	51	4
11	94	9
12	67	7
13	53	6
14	41	5
16	79	11
17	27	4
18	83	13
19	6	1
21	104	19
22	47	9
24	91	19
26	84	19
27	17	4
28	78	19
29	111	28
31	89	24
32	97	27
33	108	31
34	71	21
36	99	31
37	87	28
38	3	1
39	56	19
41	14	5
42	52	19
43	8	3
44	81	31
47	22	9
48	103	43
49	61	26
51	9	4
52	42	19
53	13	6
54	66	31
56	39	19
57	2	1
58	113	57

$a_1 = 115$

a_2	x_1	x_2
59	76	39
61	49	26
62	102	55
63	73	40
64	106	59
66	54	31
67	12	7
68	93	55
71	34	21
72	107	67
73	63	40
74	101	65
76	59	39
77	112	75
78	28	19
79	16	11
81	44	31
82	7	5
83	18	13
84	26	19
86	4	3
87	37	28
88	98	75
89	31	24
91	24	19
93	68	55
94	11	9
96	109	91
97	32	27
98	88	75
99	36	31
101	74	65
102	62	55
103	48	43
104	21	19
106	64	59
107	72	67
108	33	31
109	96	91
111	29	28
112	77	75
113	58	57
114	1	1

$a_1 = 116$

a_2	x_1	x_2
1	115	1
3	77	2
5	23	1
7	33	2
9	103	8
11	21	2
13	107	12

$a_1 = 116$

a_2	x_1	x_2
15	85	11
17	75	11
19	61	10
21	11	2
23	5	1
25	51	11
27	73	17
31	101	27
33	7	2
35	53	16
37	47	15
39	113	38
41	99	35
43	89	33
45	67	26
47	37	15
49	71	30
51	25	11
53	35	16
55	97	46
57	59	29
59	57	29
61	19	10
63	81	44
65	91	51
67	45	26
69	79	47
71	49	10
73	27	17
75	17	11
77	3	2
79	69	47
81	63	44
83	109	78
85	15	11
89	43	33
91	65	51
93	111	89
95	105	86
97	55	46
99	41	35
101	31	27
103	9	8
105	95	86
107	13	12
109	83	78
111	93	89
113	39	38
115	1	1

$a_1 = 117$

a_2	x_1	x_2
1	116	1
2	58	1
4	29	1
5	70	3
7	50	3
8	73	5
10	35	3
11	85	8
14	25	3
16	95	13
17	55	8
19	80	13
20	76	8
22	101	19
23	61	12
25	14	3
28	71	17
29	4	1
31	83	22
32	106	29
34	86	25
35	10	3
37	98	31
38	40	13
40	38	13
41	97	34
43	68	25
44	109	41
46	89	35
47	112	45
49	74	31
50	7	3
53	64	29
55	17	8
56	94	45
58	2	1
59	115	58
61	23	12
62	100	53
64	53	29
67	110	63
68	43	25
70	5	3
71	28	17
73	8	5
74	49	31
76	20	8
77	79	52
79	77	52
80	19	13
82	107	75
83	31	22
85	11	8
86	34	25

$a_1 = 117$

a_2	x_1	x_2
88	113	85
89	46	35
92	103	81
94	56	45
95	16	13
97	41	34
98	37	31
100	62	53
101	22	19
103	92	81
106	32	29
107	82	75
109	44	41
110	67	63
112	47	45
113	88	85
115	59	58
116	1	1

$a_1 = 118$

a_2	x_1	x_2
1	117	1
3	39	1
5	47	2
7	101	6
9	13	1
11	75	7
13	9	1
15	55	7
17	111	16
19	31	5
21	73	13
23	41	8
25	33	7
27	83	19
29	61	15
31	19	5
33	25	7
35	91	27
37	51	16
39	3	1
41	23	8
43	107	39
45	97	37
47	5	2
49	65	27
51	37	16
53	69	31
55	15	7
57	89	48
61	29	15
63	103	55
65	49	27

$a_1 = 118$

a_2	x_1	x_2
67	81	46
69	53	31
71	113	68
73	21	13
75	11	7
77	95	62
79	115	77
81	67	46
83	27	19
85	93	67
87	99	73
89	57	43
91	35	27
93	85	67
95	77	62
97	45	37
99	87	73
101	7	6
103	63	55
105	109	97
107	43	39
109	105	97
111	17	16
113	71	68
115	79	77
117	1	1

$a_1 = 119$

a_2	x_1	x_2
1	118	1
2	59	1
3	79	2
4	89	3
5	95	4
6	99	5
8	104	7
9	66	5
10	107	9
11	54	5
12	109	11
13	64	7
15	111	14
16	52	7
18	33	5
19	25	4
20	113	19
22	27	5
23	31	6
24	114	23
25	19	4
26	32	7
27	22	5
29	41	10

$a_1 = 119$

a_2	x_1	x_2
30	115	29
31	23	6
32	26	7
33	18	5
36	76	23
37	45	14
38	72	23
39	61	20
40	116	39
41	29	10
43	83	30
44	73	27
45	37	14
46	75	29
47	81	32
48	57	23
50	69	29
52	16	7
53	110	49
54	11	5
55	106	49
57	48	23
58	80	39
59	2	1
60	117	59
61	39	20
62	71	37
64	13	7
65	108	59
66	9	5
67	103	58
69	50	29
71	62	37
72	38	23
73	44	27
74	82	51
75	46	29
76	36	23
78	90	59
79	3	2
80	58	39
81	47	32
82	74	51
83	43	30
86	101	73
87	93	68
88	96	71
89	4	3
90	78	59
92	97	75
93	87	68
94	100	79
95	5	4
96	88	71

$a_1 = 119$

a_2	x_1	x_2
97	92	75
99	6	5
100	94	79
101	86	73
103	67	58
104	8	7
106	55	49
107	10	9
108	65	59
109	12	11
110	53	49
111	15	14
113	20	19
114	24	23
115	30	29
116	40	39
117	60	59
118	1	1

$a_1 = 120$

a_2	x_1	x_2
1	119	1
7	17	1
11	109	10
13	83	9
17	7	1
19	101	16
23	73	14
29	91	22
31	89	23
37	107	33
41	79	27
43	53	19
47	97	38
49	71	29
53	43	19
59	61	30
61	59	30
67	77	43
71	49	29
73	23	14
77	67	43
79	41	27
83	13	9
89	31	23
91	29	22
97	47	38
101	19	16
103	113	97
107	37	33
109	11	10
113	103	97
119	1	1

33.

Neue geometrische und mechanische Eigenschaft der Niveauflächen.

(Von Herrn *Jacob Amsler* aus Halden in der Schweiz.)

Es sei $f(x, y, z)$ eine Function der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z, welche der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$$

genügt, so stellt die Gleichung

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

ein System von Oberflächen dar, welche man *Niveauflächen* nennt.

Es seien

$$(1.)\quad f(x, y, z) = \alpha_1,$$
$$(2.)\quad f(x, y, z) = \alpha_2$$

zwei dieser Flächen, p_1 und q_1 zwei Puncte der ersten. Man construire durch p_1 und q_1 zwei Trajectorien des Systems, welche die Oberfläche (2.) resp. in den Puncten p_2, q_2 treffen mögen. p_1 und p_2 sollen correspondirende Puncte heifsen, und eben so q_1 und q_2. Dann findet folgender Satz Statt:

Die Entfernung irgend zweier Puncte der beiden Oberflächen, wie p_1 und q_2, ist gleich der Entfernung ihrer correspondirenden Puncte p_2 und q_1.

Mit Hülfe dieser geometrischen Eigenschaft der Niveauflächen läfst sich folgender mechanische Satz beweisen:

Stellt man sich die beiden Niveauflächen (1. und 2.) *homogen mit Masse erfüllt vor, so läfst sich die Beziehung der durch* (1.) *begränzten Masse auf einen Punct p_2 der Oberfläche* (2.) *auf die Anziehung, welche der correspondirende Punct p_1 von der in* (2.) *eingeschlossenen Masse erfährt, zurückführen.*

Es sei nämlich V_1 das Potential der Wirkung auf den Punct p_1, V_2 das Potential der Wirkung auf den Punct p_2, so ist

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial x_1}\cdot f'x_1+\frac{\partial V_1}{\partial y_1}\cdot f'y_1+\frac{\partial V_1}{\partial z_1}\cdot f'z_1}{(f'x_1)^2+(f'y_1)^2+(f'z_1)^2}=\frac{\frac{\partial V_2}{\partial x_2}\cdot f'x_2+\frac{\partial V_2}{\partial y_2}\cdot f'y_2+\frac{\partial V_2}{\partial z_2}\cdot f'z_2}{(f'x_2)^2+(f\cdot y_2)^2+(f'z_2)^2},$$

oder, was Dasselbe ist:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial V_2}{\partial \alpha_2}.$$

Dieser Satz gilt für *jedes, nur von der Entfernung abhängige* Gesetz der Anziehung. Wie man sieht, ist er eine Verallgemeinerung des *Yvory*schen Theorems in der Theorie der Attraction der Ellipsoïden und der von *Poisson* gegebenen Erweiterung desselben.

Halden, den 30ten Mai 1848.

34.

Zur Theorie der Anziehung und der Wärme.

(Von Herrn *Jacob Amsler*, Privatdocenten an der Universität in Zürich.)

Man bezeichne durch dw das Element einer geschlossenen Oberfläche F, durch α, β, γ die Winkel, welche ihre (nach aufsen gerichtete) Normale mit den Coordinaten-Axen bildet. Ferner setze man zur Abkürzung:

$$\delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$[U', U] = \frac{\partial U'}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U'}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U'}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Alsdann findet folgende, leicht zu verificirende Gleichung Statt:

$$A. \quad \int U'\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right) dw = \iiint U'\,\delta U\, dx\, dy\, dz + \iiint [U', U]\, dx\, dy\, dz.$$

Die Integrationen erstrecken sich über die Oberfläche F und den davon eingeschlossenen Raum. Die Gröfsen U' und U sind ganz willkürlich; nur müssen sie und ihre ersten Differentialquotienten innerhalb der Grenzen der Integration stetige Functionen von x, y, z sein.

Unter denselben Bedingungen, und wenn aufserdem k_1, k_2, k_3 stetige Functionen von x, y, z sind, gilt die allgemeine Gleichung

$$(B.) \quad \int U'\left(k_1\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + k_2\frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + k_3\frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right) dw$$

$$= \iiint U'\left\{\frac{\partial\left(k_1\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3\frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz$$

$$+ \iiint\left\{k_1\frac{\partial U'}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + k_2\frac{\partial U'}{\partial y}\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + k_3\frac{\partial U'}{\partial z}\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz.$$

Die Grenzen der Integration sind dieselben, wie bei der Gleichung (*A.*).

Beide Gleichungen lassen sich leicht verallgemeinern, für den Fall, dafs statt einer einzigen geschlossenen und zusammenhangenden Oberfläche F, deren mehrere gegeben sind. Man darf nur jedes Integral durch eine Summe von ähnlichen Integralen ersetzen, welche sich respective über die verschie-

denen Oberflächen und die davon eingeschlossenen Räume erstrecken. Zu den bekannten zahlreichen, wichtigen Anwendungen der Gleichungen (*A.*) und (*B.*) wollen wir im Folgenden einige neue hinzufügen.

I.

Liouville (Additions aux connaissances des tems, pour l'an 1845) giebt einen sehr einfachen Beweis des Satzes, dafs die Gleichungen, welche die Bedingungen des *electrischen Gleichgewichts* ausdrücken, nur einer einzigen Lösung fähig sind. In der Theorie des inducirten *Magnetismus* giebt es einen ähnlichen Satz. Es seien $M_1, M_2, \dots M_m$ beliebige, der gegenseitigen Einwirkung ausgesetzte Körper, welche die Fähigkeit haben, unter dem Einflufs magnetischer Kräfte vorübergehend magnetisch zu werden. Es sei V das Potential der festen magnetischen Kräfte, Q als Potential des durch Induction erzeugten Magnetismus. Nach *Poisson (Mém. de l'Institut. T. VI et VII.)* findet sich Q aus folgender Gleichung:

$$(1.)\qquad Q = -\sum_1^m{}^\lambda \iiint k_\lambda \left[Q_\lambda + V_\lambda,\ \frac{1}{\varrho_\lambda}\right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda.$$

Die Integrationen im zweiten Gliede erstrecken sich über die von den Körpern $M_1, M_2, \dots M_m$ eingenommenen Räume. Zur Abkürzung wurde

$$\varrho_\lambda = \sqrt{((x-x_\lambda)^2+(y-y_\lambda)^2+(z-z_\lambda)^2)}$$

gesetzt; Q_λ, V_λ sind dieselben Functionen von x_λ, y_λ, z_λ wie Q und V von x, y, z. Der Coëfficient k hangt von dem gröfsern oder geringern Vermögen des Körpers M ab, magnetisch zu werden; man könnte ihn deshalb füglich den magnetischen *Inductionscoëfficienten* nennen. Die Gröfse k ändert sich im allgemeinen mit x, y, z, ist aber immer *endlich* und *positiv*. Überdies darf man sie als eine innerhalb jedes der gegebenen Körper stetige Function betrachten. Denn, würde bei einem Körper diese Bedingung nicht erfüllt und wäre k längs einer beliebigen Oberfläche f discontinuirlich, so könnte man den Körper als aus zwei oder mehreren Körpern bestehend betrachten, die sich längs der Oberfläche f berühren. Innerhalb jedes dieser Körper wäre nun k stetig.

Der angekündigte Satz lautet:

„Es giebt nur eine einzige Function Q, welche der Bedingungs-„gleichung des magnetischen Gleichgewichts (1.) *genügt."*

Beweis. Man setze, es gebe zwei Functionen Q und Q', welche der Gleichung (1.) genügen. Dann mufs

$$Q' = -\sum_1^m \lambda \iiint k_\lambda \left[Q'_\lambda + V_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda}\right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda$$

sein. Subtrahirt man diese Gleichung von der (1.) und setzt $W = Q - Q'$, so erhält man

$$(2.) \quad W = -\sum_1^m \lambda \iiint k_\lambda \left[W_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda}\right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda.$$

Der Satz ist bewiesen, wenn man zeigen kann, dafs $W = 0$ die einzige reelle Function ist, welche dieser Gleichung genügt.

Aus (2.) folgt

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\sum_1^m \lambda \iiint k_\lambda \left[W_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda}\right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda,$$

oder, was Dasselbe ist:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\sum_1^m \mu \iiint k_\mu \left[W_\mu, \frac{1}{\varrho_\mu}\right] dx_\mu dy_\mu dz_\mu.$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so erhält man $\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2$ durch eine Summe von sechsfachen Integralen ausgedrückt. Auf dieselbe Weise bilde man $\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2$ und setze die gefundenen Werthe in den Ausdruck

$$(3.) \quad P = \iiint [W, W] dx\, dy\, dz$$
$$= \iiint \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz.$$

Die Integration erstrecke sich über den Raum einer unendlich grofsen Kugel. Führt man die angedeuteten Multiplicationen unter den Integralzeichen aus, so nimmt P, wie leicht zu sehen, folgende Gestalt an:

$$(4.) \quad P = \sum_1^m \lambda \iiint k_\lambda [W_\lambda, g]\, dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda,$$

wenn zur Abkürzung

$$g = \sum_1^m \mu \iiint k_\mu [W_\mu, h]\, dx_\mu dy_\mu dz_\mu \quad \text{und}$$

$$h = \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda}, \frac{1}{\varrho_\mu}\right] dx\, dy\, dz$$

gesetzt wird.

Die Werthe von h und g lassen sich in endlicher Form angeben. Man setze in (*A.*) $U' = \frac{1}{\varrho_\lambda}$ und betrachte U als Potential einer unendlich kleinen

Kugel, deren Mittelpunct die Coordinaten x_μ, y_μ, z_μ hat. Ihre Dichtigkeit sei $=1$, ihr Volumen $=u$. Alsdann erhält man

$$\int \frac{1}{\varrho_\lambda}\frac{\partial U}{\partial n}dw = \iiint \frac{1}{\varrho_\lambda}\delta U\,dx\,dy\,dz + \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda},\ U\right]dx\,dy\,dz.$$

Nach einem bekannten Satze ist für alle Puncte *außerhalb* des kleinen Raums u, $\delta U=0$; dagegen für Puncte *innerhalb* desselben ist $\delta U=-4\pi$. Also ergiebt sich

$$\iiint \frac{1}{\varrho_\lambda}\delta U\,dx\,dy\,dz = -4\pi\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\varrho_\lambda} = -\frac{4\pi u}{\varrho_{\lambda,\mu}},$$

wenn $\varrho_{\lambda,\mu}=\sqrt{((x_\lambda-x_\mu)^2+(y_\lambda-y_\mu)^2+(z_\lambda-z_\mu)^2)}$ ist. In den beiden übrigen Integralen kann man $U=\frac{u}{\varrho_\mu}$ setzen, welches

$$\int \frac{1}{\varrho_\lambda}\frac{\partial \frac{1}{\varrho_\mu}}{\partial n}dw + \frac{4\Pi}{\varrho_{\lambda,\mu}} = \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda},\ \frac{1}{\varrho_\mu}\right]dx\,dy\,dz$$

giebt.

Erwägt man nun, daſs das erste Integral, über die Oberfläche einer unendlich groſsen Kugel ausgedehnt, verschwindet, so folgt

$$h = \iiint \left[\frac{1}{\varrho_\lambda},\ \frac{1}{\varrho_\mu}\right]dx\,dy\,dz = \frac{4\pi}{\varrho_{\lambda,\mu}}.$$

Hiemit geht der Werth von g in

$$g = 4\pi\sum_1^m{}^\mu \iiint k_\mu\left[W_\mu,\ \frac{1}{\varrho_{\lambda,\mu}}\right]dx_\mu\,dy_\mu\,dz_\mu$$

über. Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (2.), so zeigt sich, daſs

$$g = -4\pi W_\lambda,$$

also, wegen (4.),

$$P = -4\pi\sum_1^m{}^\lambda \iiint k_\lambda\left[W_\lambda,\ W_\lambda\right]dx_\lambda\,dy_\lambda\,dz_\lambda$$

ist. Diese Gleichung, verbunden mit (3.), giebt schlieſslich:

$$(5.)\quad 0 = \iiint \left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz$$
$$+4\pi\sum_1^m{}^\lambda \iiint k_\lambda\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial x_\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y_\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z_\lambda}\right)^2\right\}dx_\lambda\,dy_\lambda\,dz_\lambda.$$

Eine Summe von reellen Quadraten, multiplicirt mit reellen und positiven Gröſsen, kann aber nur verschwinden, wenn jeder Term für sich verschwindet. Also muſs nothwendig

$$\frac{\partial W}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial W}{\partial z}=0$$

für alle Puncte des Raums sein, und folglich, wegen (2.), auch $W=0$. Also hat man identisch $Q=Q'$; was zu beweisen war.

Übrigens sieht man leicht, dafs auch kein imaginärer, von 0 verschiedener Ausdruck für W der Gleichung (2.) genügt. Es sei nämlich $W=W'+iW''$, wo W' und W'' reell sind, so zieht man aus der Gleichung (2.):

$$W' = -\sum_1^m \lambda \iiint k_\lambda \left[W'_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda}\right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \quad \text{und}$$

$$W'' = -\sum_1^m \lambda \iiint k_\lambda \left[W''_\lambda, \frac{1}{\varrho_\lambda}\right] dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda,$$

woraus, wie vorher, $W'=0$, $W''=0$ folgt.

Diesen Beweis habe ich in nicht wesentlich anderer Gestalt schon früher veröffentlicht (Neue Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft von 1848). Er vereinfacht sich etwas, wenn man die Körper M_1, M_2, ... M_m als homogen betrachtet, da alsdann die Gleichung (1.) die Form

$$(6.) \qquad Q = -\sum_1^m \lambda\, k_\lambda \int \frac{\partial (V_\lambda + Q_\lambda)}{\partial n_\lambda} \frac{dw_\lambda}{\varrho_\lambda}$$

annimmt.

Herr *Kirchhoff* machte mich darauf aufmerksam, dafs sich in diesem Falle die Gleichung (5.) einfacher folgendermafsen herleiten läfst. Es ist

$$(7.) \qquad W = -\sum_1^m \lambda\, k_\lambda \int \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n}\right) \frac{dw_\lambda}{\varrho_k};$$

woraus, nach einer bekannten Eigenschaft der Oberflächenpotentiale,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)' - \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)'' = 4\pi k \frac{\partial W}{\partial n}$$

folgt, wenn die Werthe von $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)$ für Puncte unendlich nahe an der Oberfläche, aufserhalb und innerhalb, resp. durch $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)'$ und $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)''$ bezeichnet werden. Also ist auch

$$(8.) \qquad \sum_1^m \lambda \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n}\right)' dw_\lambda = \sum_1^m \lambda (1+4\pi k_\lambda) \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n}\right)'' dw_\lambda.$$

Mit Hülfe der Gleichung (*A*.) zeigt sich aber leicht, dafs

$$-\sum_1^m \lambda \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n}\right)' dw_\lambda = \iiint [W, W]\, dx\, dy\, dz,$$

$$\sum_1^m \lambda \int W_\lambda \left(\frac{\partial W_\lambda}{\partial n}\right)'' dw_\lambda = \sum_1^m \lambda \iiint [W_\lambda, W_\lambda]\, dx_\lambda dy_\lambda dz_\lambda \quad \text{ist.}$$



Die dreifachen Integrationen in diesen Gleichungen erstrecken sich in der ersten über den ganzen unendlichen Raum *aufserhalb* der Körper M_1, M_2, ..., in der letzten über den Raum *innerhalb*. Verbindet man sie mit der Gleichung (8.), so erhält man die Gleichung (5.), woraus man wie oben weiter schliefst.

Übrigens läfst sich dieses Verfahren auch, mit einiger Modification, auf die allgemeine Form der Gleichung (2.) ausdehnen.

II.

Einfacher noch läfst sich der analoge Satz in der Theorie der *Wärme* nachweisen.

Die Temperatur u eines beliebigen Puncts im Innern eines festen Körpers ist als Function der Zeit t vollkommen bestimmt, wenn folgende Data bekannt sind:

1) Die Temperatur des Körpers, zur Zeit $t=0$, als Function der Coordinaten, $u_{t=0}=f(x, y, z)$.
2) Die Temperatur der Umgebung, als Function
$$v = \varphi(x, y, z, t)$$
der Coordinaten der Oberfläche und der Zeit.
3) Die innere Leitungsfähigkeit des Körpers. Diese kann von einem Punct zum andern, und im selben Puncte, nach den verschiedenen Richtungen hin verschieden sein. Sie sei k_1 nach der Richtung der x Axe, k_2 und k_3 nach der Richtung der y und z Axe. k_1, k_2, k_3 sind als gegebene Functionen von x, y, z zu betrachten. Eben so
4) Die äufsere Leitungsfähigkeit h, und
5) Die specifische Wärme η. Zur Vereinfachung sei dieselbe auf die Einheit des Volumens bezogen, statt, wie gewöhnlich, auf die Einheit der Masse.

Die Temperatur u wird als Function der Coordinaten und der Zeit durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$(1.)\quad \eta\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z},$$

$$(2.)\quad k_1\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + k_2\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + k_3\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + h\psi(u, v) = 0,$$

$$(3.)\quad u_{t=0} = f(x, y, z).$$

Die erste dieser Gleichungen gilt für alle Puncte im *Innern* des Körpers, die zweite für die Puncte der *Oberfläche*. α, β, γ haben dieselbe Bedeutung wie oben Die Gröfsen η, k_1, k_2, k_3, h sind ihrer Natur nach *positiv;* aufserdem betrachten wir sie als unabhängig von u und, mit Ausnahme von h, als stetige Functionen von x, y, z. Die Function $\psi(u, v)$ ist so beschaffen, dafs für $u > u'$, $\psi(u, v) > \psi(u', v)$, also immer

$$(4.)\qquad (u-u')(\psi(u, v)-\psi(u', v)) \geqq 0$$

ist. In der Regel setzt man $\psi(u, v) = u - v$. Wir wollen nun folgenden Satz beweisen.

„*Es giebt nur eine Function u, welche die Bedingungen* (1, 2 und 3.) „*gleichzeitig erfüllt.*"

Beweis. Man setze wieder die Möglichkeit zweier Lösungen u und u' des Problems. Macht man $u - u' = w$, so erhält man, in Folge der vorstehenden Gleichungen:

$$(5.)\qquad \eta \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial w}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2 \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3 \frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial z},$$

$$(6.)\qquad k_1 \frac{\partial w}{\partial x} \cos\alpha + k_2 \frac{\partial w}{\partial y} \cos\beta + k_3 \frac{\partial w}{\partial z} \cos\gamma + h\varphi = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$\varphi = \psi(u, v) - \psi(u', v)$$

gesetzt ist. Die erste Gleichung gilt für alle Puncte im *Innern*, die zweite für Puncte der *Oberfläche*. Aufserdem hat man für alle Puncte im Innern:

$$(7.)\qquad w = 0 \quad \text{für} \quad t = 0.$$

Macht man in der Gleichung (*B.*), $U = U' = w$, und wendet die Gleichungen (5.) und (6.) an, so ergiebt sich

$$-\int h w \varphi \, d\omega$$

$$= \iiint \eta w \frac{\partial w}{\partial t} dx\, dy\, dz + \iiint \left\{k_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + k_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + k_3\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$

oder, wenn man η als von t unabhängig betrachtet:

$$(8.)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial t} = -\left\{\int h w \varphi \, d\omega + \iiint \left(k_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + k_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + k_3\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right) dx\, dy\, dz\right\},$$

wo $p = \iiint \eta w^2 dx\, dy\, dz$ ist.

Der in der Parenthese enthaltene Ausdruck ist positiv, wenn u und u', also auch w reell ist. Denn nach (4.) ist $hw\varphi$ eine positive Gröfse und das letzte Integral in (8.) besteht aus einer Summe reeller Quadrate, multiplicirt

mit positiven Coëfficienten. Die Seite rechts der Gleichung (8.), d. h. der Differentialquotient von p, nach t genommen, ist daher *negativ*, wenn er von 0 verschieden ist, welches im übrigen auch der Werth von w sein mag. Hieraus folgt, dafs wenn t wächst, die Function p immer abnehmen mufs, wenigstens nie zunehmen kann. Aber für $t=0$ ist $w=0$, für alle Werthe von x, y, z, über welche die Integrationen in der Gleichung (8.) ausgedehnt sind; also ist $p=0$. Da aber p mit wachsendem t nicht zunehmen und, als Summe von reellen Quadraten, multiplicirt mit positiven Coëfficienten, auch nicht negativ werden kann, so folgt, dafs für jeden Werth von t, $p=0$ sein mufs. Aber aus

$$p=\int \eta w^2 dx\,dy\,dz=0$$

folgt, dafs identisch $w=0$, also $u=u'$ ist. Das Problem läfst also *nur eine* Lösung zu.

Ganz wie in der vorigen Nr. läfst sich nun weiter zeigen, dafs auch kein von 0 verschiedener imaginärer Ausdruck von w den Gleichungen (5, 6, 7.) gleichzeitig genügt.

In der Theorie der Wärme wendet man zuweilen den Satz an, dafs, wenn v, wit wachsendem t, sich einer constanten Grenze v_0 nähert, v_0 ebenfalls die Grenze von u ist, für $t=\infty$. Ich glaube nicht, dafs bis jetzt ein Beweis dieses Satzes gegeben worden ist; man begnügte sich, einen Erfahrungssatz der Physik auf ein rein analytisches Problem zu übertragen. Der strenge Beweis ergiebt sich aber sehr leicht mit Hülfe der Gleichung (8.). Es sei z. B. von Anfang an $v=v_0=\text{Const.}$, so werden offenbar die Gleichungen (1 und 2.) erfüllt, wenn man $u=v_0$ setzt. Es sei ferner u' die Function, welche den Gleichungen (1, 2, 3.) gleichzeitig genügt. Offenbar werden die Gleichungen (5 und 6.), also auch die Gleichung (8.) erfüllt, wenn man $w=v_0-u'$ setzt. Da nun der Differentialquotient von $p=\frac{1}{2}\int\eta(v_0-u')^2 dx\,dy\,dz$, nach t genommen, beständig negativ ist, so lange w endlich ist, so folgt, dafs sich für $t=\infty$, $w=(v_0-u')$ der Grenze 0 für alle Werthe von x, y, z nähern mufs; d. h. es wird $u_{t=\infty}=v_0$.

Die hier angestellten Betrachtungen lassen sich leicht verallgemeinern. Man kann z. B. setzen, dafs k_1, k_2, k_3, h, η Functionen von t und selbst von u seien. Diese Functionen sind aber gewissen Bedingungen unterworfen, wenn der bewiesene Satz gelten soll. Man kann ferner annehmen, dafs statt eines einzigen Körpers ein System von Körpern gegeben ist, mit beliebigen Anfangstemperaturen, und dafs sie in einem diathermalen Mittel von beliebig

veränderlicher Temperatur, der gegenseitigen Einwirkung, theils durch Strahlung, theils in Folge von Berührung ausgesetzt sind. Sind die Gröfsen k oder η längs einer Fläche discontinuirlich, so findet für die Puncte derselben eine Gleichung von der Form (2.) Statt.

Dafs das Problem des Gleichgewichts der Temperaturen *nur eine* Lösung zuläfst, folgt als Corollar aus dem Vorigen. Der selbständige Beweis liefse sich auf die Gleichung

$$0 = \int h w \varphi\, d\omega + \iiint \left\{ k_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + k_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + k_3 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz$$

gründen; aus welcher folgt, dafs für alle Puncte im Innern:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

also $w = \text{Const.}$ ist. Aufserdem folgt $w = 0$ für alle Puncte der Oberfläche, also, da w eine stetige Function ist, $\text{Const.} = 0$, oder $u = u'$.

III.

Man setze, es sei in der Gleichung (2.) der vorigen Nr. $\psi(u, v) = u - v$. Bekanntlich kann die Bestimmung der Function u, welche den Gleichungen (1, 2, 3.) genügt, auf die Bestimmung einer andern Function U zurückgeführt werden, welche folgenden Gleichungen genügt:

$$(1.) \quad \eta \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2 \frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3 \frac{\partial U}{\partial z}\right)}{\partial z},$$

$$(2.) \quad k_1 \frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + k_2 \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + k_3 \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma + hU = 0.$$

$$(3.) \quad U_{t=0} = F(x, y, z).$$

Die erste Gleichung gilt für Puncte im *Innern;* die zweite für Puncte der *Oberfläche.* Beiden kann gleichzeitig durch einen Ausdruck von der Form

$$aPe^{-\mu t}$$

genügt werden. a ist eine willkürliche Constante, P findet sich aus der partiellen Differentialgleichung

$$(4.) \quad -\mu\eta P = \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2 \frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3 \frac{\partial P}{\partial z}\right)}{\partial z}.$$

Die Constante μ ist eine Wurzel der Gleichung

$$(5.) \quad k_1 \frac{\partial P}{\partial x} \cos\alpha + k_2 \frac{\partial P}{\partial y} \cos\beta + k_3 \frac{\partial P}{\partial z} \cos\gamma + hP = 0.$$

Diese Gleichung ist im allgemeinen transcendent und hat unendlich viele Wurzeln. Bezeichnet man dieselben durch $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m, \ldots$ und deutet die von ihnen abhängigen Gröfsen durch die nämlichen Indices an, so hat die allgemeinste Function, welche den Gleichungen (1 und 2.) genügt, die Form

$$(6). \quad U = \Sigma a_m P_m e^{-\mu_m t}.$$

Die Constanten a sind so zu bestimmen, dafs die Gleichung (3.) erfüllt wird, d. h. so, dafs für alle Puncte im Innern des Körpers,

$$(7.) \quad F(x, y, z) = \Sigma a_m P_m$$

ist. Die Möglichkeit, auf diesem Wege die Aufgabe zu lösen, hangt von folgenden Bedingungen ab.

1) Für $t = \infty$ darf U nicht unendlich und auch zu keiner periodischen Function von t werden. Denn nach der vorigen Nr. mufs sogar $U_{t=\infty} = 0$ sein. Es ist also nöthig, dafs die Gleichung (5.) reelle und positive Wurzeln habe. Falls es imaginäre oder negative Wurzeln giebt, müssen die davon abhängigen Glieder aus dem Ausdruck (6.) wegfallen.

2) Die Lösung der allgemeinen Aufgabe setzt voraus, dafs eine ganz willkürlich gegebene Function $F(x, y, z)$ sich innerhalb bestimmter Grenzen in eine Reihe von der Form (7.) entwickeln lasse. Hiezu ist nöthig, dafs die Reihe unendlich viele Glieder, also die Gleichung (5.) unendlich viele reelle und positive Wurzeln habe. Dafs Dieses auch *genügend* sei, mufs besonders nachgewiesen werden.

Poisson zeigt, dafs *alle* Wurzeln der Gleichung (5.) *reell* sind. (*Théor. math. de la chaleur, p. 178.*) Dafs sie auch *positiv* sind, weiset er nur in besonderen Fällen aus der Form der Gleichung nach. (*Ibid. p. 294.*) *Poisson* geht von der Gleichung

$$\iiint \eta \, P P_1 \, dx \, dy \, dz = 0$$

aus, in welcher P und P_1 den Wurzeln $\mu = \lambda^2$ und $\mu_1 = \lambda_1^2$ entsprechen. Diese Gleichung gilt aber nur, wenn λ^2 und $\eta\lambda_1^2$ verschieden sind. Nemlich es ist allgemein $(\lambda^2 - \lambda_1^2)\iiint \eta \, P P_1 \, dx \, dy \, dz = 0$. Setzt man nun $\lambda = g + g'\sqrt{-1}$, $\lambda_1 = g - g'\sqrt{-1}$, so folgt, dafs

$$2gg'\sqrt{-1}\iiint (G^2 + G'^2)\eta \, dx \, dy \, dz = 0$$

sein mufs. Hieraus folgt aber nur, dafs $gg' = 0$ sein, d. h., dafs λ^2 *reell* sein mufs: dafs $g' = 0$, folglich λ^2 *positiv* sein mufs, folgt auf diesem Wege nicht.

Indessen kann der Beweis auch allgemein gegeben werden.

Es seien nemlich μ und μ_1 zwei Wurzeln der Gleichung (5.), und P und P_1 die entsprechenden Integrale der Gleichung (4.). In der Gleichung (*B.*) setze man

$$U = e^{-\mu t} P, \quad U' = P,$$

so erhält man, wenn man den Factor $e^{-\mu t}$ wegläfst und die Gleichungen (4 und 5.) anwendet:

$$(8). \quad 0 = -\mu\int\int\int \eta P P_1 \, dx\, dy\, dz$$
$$+\int\int\int \left\{ k_1 \frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial x} + k_2 \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial y} + k_3 \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial P_1}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz + \int h P P_1 \, dw.$$

Nun nehme man an, die Gleichung (5.) habe eine Wurzel von der Form $\mu = \mu' + \mu''\sqrt{-1}$, wo μ' und μ'' reell sind, so müfste, da sich P als reelle Function von μ, x, y, z voraussetzen läfst, eine zweite Wurzel von der Form $\mu_1 = \mu' - \mu\sqrt{-1}$ vorkommen. Diese Werthe in P und P_1 substituirt, würden

$$P = G + G'\sqrt{-1}, \quad P_1 = G - G'\sqrt{-1}$$

geben, und dadurch geht die Gleichung (8.) in

$$0 = -(\mu' + \mu''\sqrt{-1})\int\int\int \eta (G^2 + G'^2)\, dx\, dy\, dz + \int (G^2 + G'^2) h\, dw$$
$$+\int\int\int \left\{ k_1\left(\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G'}{\partial x}\right)^2\right) + k_2\left(\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial G'}{\partial y}\right)^2\right)\right.$$
$$\left. + k_3\left(\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial G'}{\partial z}\right)^2\right)\right\} dx\, dy\, dz$$

über. In dieser Gleichung sind alle Glieder reell, aufser den in μ'' multiplicirten. Diese also müssen besonders verschwinden; d. h. es mufs

$$0 = \sqrt{-1}\,\mu'' \int\int\int \eta (G^2 + G'^2)\, dx\, dy\, dz,$$

also $\mu'' = 0$, $\mu = \mu_1$ und folglich $G' = 0$, $P = P_1 = G$ sein. Die obige Gleichung wird demnach zu

$$0 = -\mu\int\int\int \eta P^2\, dx\, dy\, dz + \int P^2 h\, dw$$
$$+\int\int\int \left\{ k_1\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + k_2\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + k_3\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz.$$

Diese Gleichung kann aber offenbar nur bestehen, wenn μ *positiv* ist. Denn wäre μ negativ, so bestände ihr zweites Glied aus einer Summe reeller und positiver Gröfsen, und könnte also nicht verschwinden. *Alle* Wurzeln der Gleichung (5.) müssen also *reell* und *positiv* sein.

Zürich, den 5ten Januar 1851.

35.

Über die Gesetze der Wärmeleitung im Innern fester Körper; unter Berücksichtigung der durch ungleichförmige Erwärmung erzeugten Spannung.

(Von Herrn *Jacob Amsler*, Privatdocenten an der Universität zu Zürich.)

(Aus den Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, vom Jahr 1850.)

Leitet man einem Körper freie Wärme zu, und sorgt durch irgend welche mechanische Mittel dafür, dafs er sich in Folge der Temperatur-Erhöhung nicht ausdehnen kann, so steigt seine Temperatur rascher, als wenn seiner Ausdehnung kein Hindernifs entgegengesetzt wird. Man kann diese Wahrnehmung so aussprechen:

„Die specifische Wärme der Körper unter *constantem Drucke* ist gröfser als bei *constantem Volumen*."

Dieses Gesetz ist ohne Zweifel allgemein. Für die *gasförmigen* Körper sind darüber zahlreiche Versuche angestellt worden (von *Delaroche* und *Bérard*, namentlich aber von *Dulong*). Für *feste* Körper sind mir nur von *W. Weber* (*Poggendorffs* Annalen, Bd. XX. S. 177) und *G. Wertheim* (Ann. de chim. et de phys. Ser. III. T. 12. p. 385) eigentliche Beobachtungsreihen bekannt; die indefs zur Genüge zeigen, dafs der Unterschied der beiden specifischen Wärmen sehr bedeutend ist.

Durch diesen Umstand müssen natürlich die Gesetze der Wärmeleitung im Innern der Körper wesentlich modificirt werden. Von den Geometern, welche sich mit der mathematischen Theorie der Wärme beschäftigten, hat bis jetzt, meines Wissens, keiner darauf Rücksicht genommen. Blofs *Poisson*, in einer Note zu seiner „Théorie mathématique de la chaleur", giebt eine Andeutung für den Fall, dafs der erwärmte Körper in flüssigem Zustande ist.

In gegenwärtiger Abhandlung beschränke ich mich darauf, die Principien der vervollständigten Theorie im Allgemeinen anzugeben und die wesentlichsten Momente ihrer Anwendung auf einige einfache Fälle zu entwickeln. ich hoffe, dieselben in der Folge weiter ausführen und mit Beobachtungen vergleichen zu können.

---

§. 1.

Ein homogener Körper habe das Volumen V, die gleichförmige Temperatur u, und stehe unter einem gleichförmigen äufsern Drucke p. Man theile ihm die freie Wärme $\varDelta\omega$ mit, und vermehre den Druck um $\varDelta p$, so werden auch die Temperatur und das Volumen des Körpers sich ändern, respective um $\varDelta u$ und $\varDelta V$. Die Gröfsen $\varDelta u$ und $\varDelta V$ sind durch $\varDelta\omega$ und $\varDelta p$ vollständig bestimmt. Überhaupt hangen die Gröfsen $\varDelta\omega, \varDelta p, \varDelta u, \varDelta V$ so von einander ab, dafs durch irgend zwei derselben die beiden andern gegeben sind. Das Gesetz dieser Abhängigkeit ist nicht strenge bekannt. Kennte man den analytischen Ausdruck dafür, so liefsen sich ohne Mühe die Differentialgleichungen aufstellen, welche die Gesetze der Wärmeleitung im Innern der Körper ausdrücken. Die Anwendung dieser Differentialgleichungen würde indefs ohne Zweifel, selbst in den einfachsten Fällen, auf unübersteigliche analytische Schwierigkeiten führen.

Wir müssen uns daher mit einer näherungsweisen Lösung der Aufgabe begnügen. Jenes Gesetz kann innerhalb gewisser, bei verschiedenen Körpern verschiedener Grenzen und für unsere Zwecke mit hinlänglicher Schärfe durch folgende Sätze ersetzt werden, die wir unsern Untersuchungen zum Grunde legen werden.

1. Wird einem Körper freie Wärme zugeleitet, so steigt seine Temperatur *proportional* mit der aufgenommenen Wärmemenge.

2. Zugleich strebt er, sich auszudehnen. Werden die auf seine Oberfläche wirkenden Kräfte constant erhalten, so ist die Zunahme des *Volumens* proportional mit der Zunahme der *Temperatur.*

3. Wirken auf einen Körper äufsere Druckkräfte, so nimmt sein Volumen ab. Bei *constanter* Temperatur ist die Abnahme des *Volumens* proportional mit der Zunahme des *Drucks.*

4. Wird, statt der Temperatur, die Wärmemenge des Körpers *constant* erhalten, so steigt seine *Temperatur* proportional mit der Zunahme des *Drucks.*

5. Die verschiedenen Coëfficienten, von welchen die angegebenen Modificationen abhangen (specifische Wärme, Ausdehnungscoëfficient, Elasticitätscoëfficienten), sind *unabhängig* von Temperatur und Druck der Körper.

6. Als Grenze, wo diese Sätze aufhören auch nur näherungsweise richtig zu sein, kann im Allgemeinen der Punct betrachtet werden, wo eine Änderung der *Cohäsionsverhältnisse* eintritt. Mäfsige Abweichungen haben auf die Wärmeleitung nur sehr geringen Einflufs.

§. 2.

Um die durch die Temperaturveränderung erzeugte Spannung in Rechnung ziehen zu können, müssen wir einige Sätze aus der Theorie der *Elasticität* benutzen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Puncts p im *Innern* eines Körpers, dessen Temperatur man als gleichförmig, oder doch als stationär betrachtet. Läfst man auf seine Oberfläche beliebige Druckkräfte wirken, so pflanzen sich dieselben in seinem Innern fort, und die Lage jedes Puncts ändert sich. Die Coordinaten von p werden in $x+a'$, $y+b'$, $z+c'$ übergehen; wo a', b', c' Functionen von x, y, z sind.

Bezeichnen $A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2$ gewisse Functionen von x, y, z, und setzt man

$$(A.)\quad \begin{cases} X_x = (A_1+A)\dfrac{da'}{dx}+(C_2-A)\dfrac{db'}{dy}+(B_2-A)\dfrac{dc'}{dz}, \\ Y_y = (C_2-B)\dfrac{da'}{dx}+(B_1+B)\dfrac{db'}{dy}+(A_2-B)\dfrac{dc'}{dz}, \\ Z_z = (B_2-C)\dfrac{da'}{dx}+(A_2-C)\dfrac{db'}{dy}+(C_1+C)\dfrac{dc'}{dz}, \end{cases}$$

$$(B.)\quad \begin{cases} Y_z = Z_y = (A_2+B)\dfrac{dc'}{dy}+(A_2+C)\dfrac{db'}{dz}, \\ Z_x = X_z = (B_2+C)\dfrac{da'}{dz}+(B_2+A)\dfrac{dc'}{dx}, \\ X_y = Y_x = (C_2+A)\dfrac{db'}{dx}+(C_2+B)\dfrac{da'}{dy}, \end{cases}$$

so sind, nach *Cauchy* (Exercices, T. III), die Componenten der Molecularwirkung auf den Punct p:

$$(C.)\quad \begin{cases} X = \dfrac{dX_x}{dx}+\dfrac{dX_y}{dy}+\dfrac{dX_z}{dz}, \\ Y = \dfrac{dY_x}{dx}+\dfrac{dY_y}{dy}+\dfrac{dY_z}{dz}, \\ Z = \dfrac{dZ_x}{dx}+\dfrac{dZ_y}{dy}+\dfrac{dZ_z}{dz}. \end{cases}$$

Für Puncte an der *Oberfläche* ist

$$(D.)\quad \begin{cases} \overline{X} = X_x\cos(x,s)+X_y\cos(y,s)+X_z\cos(z,s), \\ \overline{Y} = Y_x\cos(x,s)+Y_y\cos(y,s)+Y_z\cos(z,s), \\ \overline{Z} = Z_x\cos(x,s)+Z_y\cos(y,s)+Z_z\cos(z,s). \end{cases}$$

Hier bezeichnen (x, s), (y, s), (z, s) die Winkel, welche die Coordinaten-Axen mit einer Geraden s bilden, welche im Puncte x, y, z der Oberfläche normal zu dieser ist. Es seien ferner X', Y', Z' die Componenten der übrigen, auf einen Punct im *Innern* wirkenden Kräfte (z. B. der Schwerkraft), $\overline{X}'$, $\overline{Y}'$, $\overline{Z}'$ die Componenten der auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte, so sind die Bedingungen des Gleichgewichts:

$$(E.)\quad 0 = X + X',\quad 0 = Y + Y',\quad 0 = Z + Z',$$

$$(F.)\quad 0 = \overline{X} + \overline{X}',\quad 0 = \overline{Y} + \overline{Y}',\quad 0 = \overline{Z} + \overline{Z}'.$$

Befinden sich die Theilchen des Körpers nicht in Ruhe, sondern in vibrirendem Zustande, so sind die Gleichungen ($E.$) durch folgende zu ersetzen:

$$(G.)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{d^2 a}{dt^2} = X + X', \\ \varrho \dfrac{d^2 b}{dt^2} = Y + Y', \\ \varrho \dfrac{d^2 c}{dt^2} = Z + Z'. \end{cases}$$

Hier bezeichnet ϱ die Dichtigkeit im Puncte x, y, z; t die Zeit. Ist der Körper homogen und unkrystallinisch, so sind die Gröfsen A, A_1, A_2 etc. Constanten, und die Gleichungen ($A.$ und $B.$) nehmen folgende Form an:

$$(H.)\quad \begin{cases} X_x = k\left\{n\dfrac{da'}{dx} + \dfrac{db'}{dy} + \dfrac{dc'}{dz}\right\}, \\ Y_y = k\left\{\dfrac{da'}{dx} + n\dfrac{db'}{dy} + \dfrac{dc'}{dz}\right\}, \\ Z_z = k\left\{\dfrac{da'}{dx} + \dfrac{db'}{dy} + n\dfrac{dc'}{dz}\right\}, \end{cases}$$

$$(I.)\quad \begin{cases} Y_z = Z_y = \tfrac{1}{2}k(n-1)\left\{\dfrac{dc'}{dy} + \dfrac{db'}{dz}\right\}, \\ Z_x = X_z = \tfrac{1}{2}k(n-1)\left\{\dfrac{da'}{dz} + \dfrac{dc'}{dx}\right\}, \\ X_y = Y_x = \tfrac{1}{2}k(n-1)\left\{\dfrac{db'}{dx} + \dfrac{da'}{dy}\right\}. \end{cases}$$

Der Coëfficient n hangt von der Anordnung der kleinsten Theile des Körpers ab, so wie von dem Gesetze, nach welchem dieselben anziehend und abstofsend auf einander wirken, und ist daher durch Versuche zu ermitteln.

Man kann dazu gelangen, wenn man die Formveränderung eines prismatischen oder cylindrischen Stabes beobachtet, der durch eine Kraft L in der Richtung seiner Axe zusammengedrückt wird. Es sei l die Länge, V das

Volumen des Stabes, so giebt die Anwendung der angeschriebenen Formeln für die Veränderung seiner Länge und seines Volumens die Relationen

$$(K.)\quad \begin{cases} \frac{\Delta l}{l} = -\frac{(n+1)}{(n+2)(n-1)}\cdot\frac{L}{k}, \\ \frac{\Delta V}{V} = -\frac{L}{(n+2)k}, \\ \text{also} \\ \frac{\Delta l}{l} = \frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{\Delta v}{v}. \end{cases}$$

Poisson (Mém. de l'Acad. des sciences, T. VIII. p. 357) fand durch theoretische Betrachtungen $n = 3$; in Übereinstimmung mit den Beobachtungen von *Cagniard-Latour*. Dieses Resultat ist neulich von *Wertheim* (Ann. de chim. et de phys. Ser. III. T. 23. p. 52) angegriffen worden. Er fand nemlich aus sehr sorgfältig angestellten, zahlreichen Beobachtungen, für Messing und Krystallglas sehr nahe $n = 2$: eine Zahl, die auch mit den *Regnault*'schen Beobachtungen über die Zusammendrückbarkeit der Piezometer aus Messing und Kupfer genauer stimmt, als die von *Poisson*. *Wertheim* erhielt für Messing durchweg einen etwas gröfsern Werth, als für Krystallglas; es ist daher möglich, dafs für verschiedene Körper auch n verschieden ist. Jedenfalls ist sein Werth noch nicht aufser Zweifel gesetzt, und ich habe deshalb n im Folgenden unbestimmt gelassen, um die sich ergebenden Resultate für jeden Fall anwendbar zu machen.

§. 3.

Zufolge §. 1. (5.) gelten die Formeln des vorhergehenden Paragraphen für jede Temperatur, und offenbar auch dann, wenn der Körper ungleichförmig erwärmt ist. Allein es ist wohl zu merken, dafs in denselben a', b', c' die nur durch die Druckkräfte direct erzeugten Verrückungen bedeuten. Ändert sich mit dem Drucke auch die Temperatur des Körpers, so mufs den durch die Temperatur-Änderung allein hervorgebrachten Verrückungen besonders Rechnung getragen werden. Bezeichnet man dieselben durch a'', b'', c'', so sind die ganzen, durch Änderung des Drucks und der Temperatur erzeugten Verrückungen eines Theilchens p:

$$u = a' + a'', \quad b = b' + b'', \quad c = c' + c''.$$

Man nehme zunächst an, der Körper sei *homogen* und *unkrystallinisch*, α bezeichne den linearen Ausdehnungscoëfficienten, u die Temperaturzunahme,

x, y, z die Coordinaten des Theilchens p. Alsdann ist offenbar

$$\frac{da''}{dx} = \frac{db''}{dy} = \frac{dc''}{dz} = \alpha u,$$

und da die Temperatur-Änderung bei homogenen Körpern mit keiner Form-Änderung verbunden ist:

$$\frac{da''}{dy} = 0, \quad \frac{db''}{dz} = 0, \quad \frac{dc''}{dx} = 0,$$

$$\frac{da''}{dz} = 0, \quad \frac{db''}{dx} = 0, \quad \frac{dc''}{dy} = 0.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen ($H.$. $I.$), so gehen sie in folgende über:

$$(L.)\quad \begin{cases} X_x = k\left(n\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}\right) - k(n+2)\alpha u, \\ Y_y = k\left(\frac{da}{dx} + n\frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}\right) - k(n+2)\alpha u, \\ Z_z = k\left(\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + n\frac{dc}{dz}\right) - k(n+2)\alpha u, \end{cases}$$

$$(M.)\quad \begin{cases} Y_z = Z_y = \tfrac{1}{2}k(n-1)\left(\frac{db}{dz} + \frac{dc}{dy}\right), \\ Z_x = X_z = \tfrac{1}{2}k(n-1)\left(\frac{dc}{dx} + \frac{da}{dz}\right), \\ X_y = Y_x = \tfrac{1}{2}k(n-1)\left(\frac{da}{dy} + \frac{db}{dx}\right). \end{cases}$$

Ist der Körper *krystallinisch* und *nicht homogen,* so wird im Allgemeinen ein Element desselben sich nach jeder Richtung anders ausdehnen. Es lassen sich nun, wie leicht nachzuweisen, drei auf einander senkrechte Richtungen angeben, in Bezug auf welche die Ausdehnung ein Maximum oder ein Minimum ist. Man bezeichne durch ξ, η, ζ diese Richtungen für das Element p, und durch α, β, γ die Ausdehnungscoëfficienten nach denselben. Die Ausdehnungscoëfficienten nach den beliebigen Richtungen x, y, z sind alsdann:

$$(N.)\quad \begin{cases} \alpha' = \frac{da''}{dx} = \alpha\cos^2(x,\xi) + \beta\cos^2(x,\eta) + \gamma\cos^2(x,\zeta), \\ \beta' = \frac{db''}{dy} = \alpha\cos^2(y,\xi) + \beta\cos^2(y,\eta) + \gamma\cos^2(y,\zeta), \\ \gamma' = \frac{dc''}{dz} = \alpha\cos^2(z,\xi) + \beta\cos^2(z,\eta) + \gamma\cos^2(z,\zeta). \end{cases}$$

Aufserdem hat man

$$(O.)\quad\begin{cases}\alpha'' = \dfrac{db''}{dz} = \dfrac{dc''}{dy}\\ = \alpha\cos(y,\xi)\cos(z,\xi)+\beta\cos(y,\eta)\cos(z,\eta)+\gamma\cos(y,\zeta)\cos(z,\zeta),\\ \beta'' = \dfrac{dc''}{dx} = \dfrac{da''}{dz}\\ = \alpha\cos(z,\xi)\cos(x,\xi)+\beta\cos(z,\eta)\cos(x,\eta)+\gamma\cos(z,\zeta)\cos(x,\zeta),\\ \gamma'' = \dfrac{da''}{dy} = \dfrac{db''}{dx}\\ = \alpha\cos(x,\xi)\cos(y,\xi)+\beta\cos(x,\eta)\cos(y,\eta)+\gamma\cos(x,\zeta)\cos(y,\zeta).\end{cases}$$

Da wir im Folgenden keine Anwendung von diesen Formeln machen werden, übergehe ich ihren Beweis. Die in der Theorie der Wärme nöthigen allgemeinen Gleichungen erhält man mit Hülfe des Vorhergehenden aus den Gleichungen (*A.* und *B.*), wenn man darin

$$(P.)\quad\begin{cases}\dfrac{da'}{dx}=\dfrac{da}{dx}-\alpha' u, & \dfrac{db'}{dx}=\dfrac{db}{dx}-\gamma'' u, & \dfrac{dc'}{dx}=\dfrac{dc}{dx}-\beta'' u,\\ \dfrac{da'}{dy}=\dfrac{da}{dy}-\gamma'' u, & \dfrac{db'}{dy}=\dfrac{db}{dy}-\beta' u, & \dfrac{dc'}{dy}=\dfrac{dc}{dy}-\alpha'' u,\\ \dfrac{da'}{dz}=\dfrac{da}{dz}-\beta'' u, & \dfrac{db'}{dz}=\dfrac{db}{dz}-\alpha'' u, & \dfrac{dc'}{dz}=\dfrac{dc}{dz}-\gamma' u\end{cases}$$

setzt.

§. 4.

Wir haben im Vorhergehenden den Einflufs untersucht, welchen die Temperatur-Änderung eines Elements auf die in ihm wirkenden Kräfte ausübt. Es bleibt nun übrig, anzugeben, wie die Temperatur des Elements umgekehrt von dem Drucke, unter welchem es steht, und von der in ihm enthaltenen Wärmemenge abhangt.

Theilt man einem Elemente vom Volumen V die Portion freier Wärme $\Delta\omega$ mit, und läfst zugleich auf seine Oberfläche beliebige Drucke wirken, so werden sich Volumen und Temperatur ändern: respective um ΔV und Δu. Diese Änderungen hangen von den Elasticitätsverhältnissen des Elements und von den Coëfficienten der Ausdehnung durch die Wärme ab; ferner von der specifischen Wärme bei constantem Volumen η, und von der specifischen Wärme bei constantem Drucke ε. Alle die genannten Gröfsen betrachten wir, gemäfs der Annahmen in (§. 1.), als Constanten, d. h. als unabhängig von Temperatur und Druck. Hiernach leuchtet ein, dafs das Element den nämlichen Endzu-

stand annehmen wird, man mag ihm die Wärmemenge $\Delta\omega$ mittheilen, gleichzeitig wie die Druckkräfte wirksam werden, oder zum Theil vor- oder nachher. Bringt man zuerst die Druckkräfte an, so werden diese das Volumen des Elements zu vermindern streben. Diesem Bestreben kann das Gleichgewicht dadurch gehalten werden, dafs man dem Elemente zugleich eine entsprechende Wärmemenge mittheilt, indem diese sein Volumen zu vergröfsern trachtet. Es sei also $\Delta\omega'$ die Wärmemenge, welche nöthig ist, um die durch den äufsern Druck erzeugte Volumen-Änderung zu compensiren, und $\Delta u'$ die dadurch bewirkte Temperatur-Erhöhung. Da diese, der Bestimmung gemäfs, mit keiner Volumen-Änderung verbunden ist, so hangt sie von der specifischen Wärme η ab. Man hat also

$$\Delta\omega' = \varrho\eta V u'.$$

ϱ bezeichnet, wie früher, die Dichtigkeit.

Theilt man nun dem Elemente eine fernere Wärmequantität $\Delta\omega''$ mit, während man die Druckkräfte ungeändert läfst, so wird sich das Volumen um ΔV ändern. Es entspreche der Wärmezunahme $\Delta\omega''$ die Temperaturzunahme $\Delta u''$, so ist

$$\frac{\Delta V}{V} = (\alpha+\beta+\gamma)\Delta u''.$$

α, β, γ haben dieselbe Bedeutung, wie im vorigen Paragraphen. Nach der Voraussetzung ist die Temperatur-Änderung $\Delta u''$ von keiner Änderung der äufsern Drucke begleitet. Sie hangt also von der specifischen Wärme ε ab, so dafs

$$\Delta\omega'' = \varrho\varepsilon V \Delta u''$$

ist. Bezeichnet nun $\Delta\omega$ die ganze Wärmezunahme des Elements, Δu die ganze Temperatur-Erhöhung, so ergiebt sich

$$\Delta\omega = \Delta\omega' + \Delta\omega'',$$
$$\Delta u = \Delta u' + \Delta u''.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen $\Delta\omega'$, $\Delta\omega''$; $\Delta u'$ und $\Delta u''$, so erhält man

$$(Q.) \qquad \Delta u = \frac{\Delta\omega}{\varrho\eta V} - \frac{(\varepsilon-\eta)}{(\alpha+\beta+\gamma)\eta}\cdot\frac{\Delta V}{V}.$$

Die Temperatur jedes Elementes eines Körpers wird sich im Allgemeinen mit der Zeit t ändern; in jedem Augenblicke mufs aber diese Gleichung erfüllt werden. Man hat also auch

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\varrho\eta V}\cdot\frac{d\omega}{dt} - \frac{(\varepsilon-\eta)}{(\alpha+\beta+\gamma)\eta}\cdot\frac{d\left(\frac{\Delta V}{V}\right)}{dt}.$$

Bezeichnet man die innere Leitungsfähigkeit des Körpers durch K, so ist nach *Fourier:*

$$\frac{1}{V}\cdot\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(K\frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(K\frac{du}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(K\frac{du}{dz}\right)}{dz};$$

und allgemeiner, wenn man die Leitungsfähigkeit des Körpers nach verschiedenen Richtungen hin als verschieden betrachtet:

$$\frac{1}{V}\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\left(K_1\frac{du}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(K_2\frac{du}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(K_3\frac{du}{dz}\right)}{dz};$$

wo K_1, K_2, K_3 Functionen von x, y, z und u sein können. Wird der Körper homogen und unkrystallinisch und K von u unabhängig angenommen, so folgt

$$\frac{1}{V}\frac{d\omega}{dt} = K\delta u;$$

wo zur Abkürzung

$$\delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}$$

gesetzt wurde. Es sei aufserdem $\varphi = \frac{\Delta V}{V}$, also

$$\varphi = \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz},$$

so geht die Gleichung für $\frac{du}{dt}$ in

$$(R.) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{K}{\varrho\eta}\delta u - \frac{(\varepsilon-\eta)}{(\alpha+\beta+\gamma)\eta}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$$

über. Für Puncte der Oberfläche gilt die bekannte Gleichung

$$(S.) \qquad K\frac{du}{ds} + h(u-U) = 0;$$

wo U die äufsere Temperatur, h die äufsere Leitungsfähigkeit und $\frac{du}{ds}$ den Differentialquotienten von u nach der (nach aufsen gerichteten) Normalen der Oberfläche des Körpers bezeichnet.

§. 5.

Die in (§§. 2 bis 4.) entwickelten Formeln enthalten die vollständigen Bedingungen, welchen die Probleme der unendlich kleinen Schwingungen und der Fortleitung der Wärme im Innern der Körper unterworfen sind. Bevor wir sie auf die letztere Aufgabe anwenden, welche den Hauptgegenstand

dieser Abhandlung ausmacht, wollen wir zeigen, wie sich mit Hülfe derselben das Verhältnifs $\frac{\eta}{\varepsilon}$ für feste Körper aus Beobachtungen ableiten läfst.

Wirkt auf die Grundflächen eines prismatischen oder cylindrischen Stabes, von der Länge l und dem Volumen V, in der Richtung der Axe eine Kraft L (auf die Einheit der Fläche), so werden sich seine Länge, sein Volumen und seine Temperatur respective um Δl, ΔV, Δu ändern.

Wird die Temperatur-Änderung Δu aufgehoben, indem man dem Stabe Wärme zuführt, oder entzieht, so geht Δl in $\Delta l'$, ΔV in $\Delta V'$ über.

Offenbar ist

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l'}{l} + \alpha \Delta u$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta V'}{V} + 3\alpha \Delta n.$$

Nach (§. 2. *K.*) ist aber

$$\frac{\Delta l'}{l} = -\frac{(n+1)L}{(n+2)(n-1)k}$$

$$\frac{\Delta V'}{V} = -\frac{1}{(n+2)} \cdot \frac{L}{k},$$

folglich

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{n+1}{(n+2)(n-1)} \cdot \frac{k}{L} + \alpha \Delta u$$

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{n+2} \cdot \frac{L}{k} + 3\alpha \Delta u.$$

Δu findet sich mit Hülfe der Formel (*Q.*), wenn man darin $\omega = 0$ setzt, indem angenommen wurde, dafs die Temperaturveränderung blofs in Folge der Änderung des Volumens, nicht aber der Wärmemenge des Stabes, entstanden sei. Man hat also

$$\Delta u = -\frac{\varepsilon - \eta}{3\alpha\eta} \cdot \frac{\Delta V}{V}.$$

Die letzten drei Formeln geben

$$(T.) \quad \Delta u = \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon} \cdot \frac{L}{3\alpha k(n+2)}$$

$$L = \frac{3(n+2)(n-1)k}{\left\{3(n+1) - \frac{\varepsilon - \eta}{\varepsilon}(n-1)\right\}} \cdot \frac{\Delta l}{l},$$

oder, wenn man den Elasticitätscoëfficienten $q = \frac{k(n+2)(n-1)}{n+1}$ einführt:

$$(U.)\quad L = \frac{3q}{3 - \frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\,\frac{n-1}{n+1}} \cdot \frac{\varDelta l}{l}.$$

Hat man die Temperatur-Änderung beobachtet, welche in dem Momente erfolgt, wo die Kraft L in Wirksamkeit tritt, so erhält man mit Hülfe der Formel (*A.*) das Verhältnifs $\frac{\eta}{\varepsilon}$; nämlich

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = l - \frac{3\alpha k(n+2)\varDelta u}{L}.$$

Weber, welcher Beobachtungen in dieser Absicht anstellte, bediente sich in der oben angeführten Abhandlung einer unrichtigen Formel. Die so eben abgeleitete ist nach seiner Bezeichnung:

$$\frac{\beta'}{\beta} = l - \frac{6kk'\omega(n+2)\varDelta u}{Q-P}.$$

Für $\varDelta u$ ist hier zu setzen:

$$\varDelta u = \frac{th(T_1-T_0)}{e^{-hT_0} - e^{-hT_1}}.$$

t ist dieselbe Zahl, wie bei *Weber;* $h = \frac{2}{r}\,\frac{H}{\varrho\beta}$; H ist die äufsere Leitungsfähigkeit des beobachteten Drahtes in schwingendem Zustande, r sein Radius, ϱ seine Dichtigkeit; T_0 und T_1 sind die Zeiten, welche vom Momente der Spannungs-Änderung der Saite, respective bis zum Anfang der Beobachtung und bis zum Ende derselben verflossen sind (also bei den *Weber*'schen Experimenten $T_0 = \frac{1}{2}$, $T_1 = 5 + \frac{1}{2}$ Secunden circa). H ist an der schwingenden Saite selber zu beobachten. *Weber* zog t statt $\varDelta u$ in Rechnung, vernachläfsigte also den Einflufs der Abkühlung; was bei seiner Beobachtungsmethode nicht geschehen darf. (Man sehe die oben citirte Abhandlung von *Weber.*)

Eine andere Methode zur Bestimmung von $\frac{\eta}{\varepsilon}$ für feste Körper stützt sich auf die Beobachtung der Geschwindigkeit des *Schalles* in denselben.

Zu diesem Zwecke kann man prismatische Stäbe formen und dieselben in tönende Schwingungen versetzen; am besten in Longitudinalschwingungen. Für diese erhält man aus der Gleichung (*B.*), auf bekannte Weise, die Differentialgleichung

$$\varrho\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{3q}{3 - \frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\,\frac{n-1}{n+1}} \cdot \frac{d^2u}{dx^2}.$$

u bezeichnet hier die Verrückung eines Querschnitts in der Entfernung x von

der einen Basis. Die Bewegung pflanzt sich im Stabe mit der Geschwindigkeit

$$v' = \sqrt{\left(\frac{3q}{\varrho\left(3-\frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\,\frac{n-1}{n+1}\right)}\right)}$$

fort. v' kann aus der Länge des Stabes und der Tonhöhe leicht gefunden werden. Es sei v die unter der Hypothese $\varepsilon=\eta$ berechnete Schallgeschwindigkeit, also

$$v = \sqrt{\frac{q}{\varrho}},$$

so giebt vorstehende Formel:

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = 1-3\left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(1-\frac{v^2}{v'^2}\right).$$

Wertheim, in seiner ersten Abhandlung über Elasticität der Metalle, wendete diese Methode an. Allein die von ihm benutzte Formel ist gleichfalls unrichtig. Er setzt nämlich

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = 1{,}8\frac{v'^2}{v^2}-08,$$

während sich aus unserer Formel

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = 6\frac{v^2}{v'^2}-5 \quad \text{für } n=3$$

und

$$\frac{\eta}{\varepsilon} = 9\frac{v^2}{v'^2}-8 \quad \text{für } n=2$$

ergiebt.

Wertheim scheint zu seiner Formel durch Anwendung des *Poisson*-schen Satzes gelangt zu sein, daſs die Schallgeschwindigkeit in einem unbegrenzten Medium zu der in einem dünnen Stabe sich wie $\sqrt{6}$ zu $\sqrt{5}$ verhalte. Allein Dies ist nur dann richtig, wenn man $\varepsilon=\eta$ und $n=3$ setzt.

§. 6.

Sind die Kälte- und Wärmequellen, denen ein Körper ausgesetzt ist, nebst den äuſsern Druckkräften constant, so wird sich mit der Zeit ein vom anfänglichen Wärmezustand unabhängiges Gleichgewicht der Temperaturen einstellen. Zugleich werden sich die Verrückungen der Theilchen einer unveränderlichen Grenze nähern. Man wird also $\frac{du}{dt}=0$, $\frac{d\varphi}{dt}=0$ für $t=\infty$ finden.

Die Gleichung (*B.*, §. 4) wird demnach zu

$$\delta u = 0;$$

d. h. die Bedingung des ***Gleichgewichts der Temperaturen*** ist von ε und η unabhängig. Dagegen giebt es nur einen einzigen Fall, wo die ***veränderlichen Temperaturen*** von $(\varepsilon-\eta)$ unabhängig sind und wo die darauf bezüglichen Bedingungsgleichungen mit den von ***Fourier*** aufgestellten übereinstimmen; nämlich den, wenn der erwärmte Körper einen dünnen Stab oder geschlossenen Ring bildet, dessen Querdimensionen so klein sind, dafs die Temperatur eines jeden Querschnitts als gleichförmig betrachtet werden darf, und wenn zugleich die auf die Oberfläche wirkenden Drucke constant sind. Alsdann ist offenbar $\varphi = 3\alpha u$. Setzt man diesen Werth in Gleichung (*B*. §. 4.), so ergiebt sich

$$\frac{du}{dt} = \frac{K}{\varrho\eta}\delta u - \frac{\varepsilon-\eta}{\eta}\cdot\frac{du}{dt},$$

d. h.

$$\frac{du}{dt} = \frac{K}{\varrho\varepsilon}\delta u.$$

Dieses ist die bekannte Gleichung, welche bis jetzt alle Analysten ihren Untersuchungen über die Wärme zum Grunde gelegt haben, und die man aus (*B*. §. 4.) erhält, wenn man darin $\varepsilon=\eta$ setzt.

§. 7.

Am meisten Interesse hat die Untersuchung der Temperatur-Verhältnisse einer homogenen ***Kugel,*** oder einer ***Kugelschale,*** die von concentrischen Kugel-Oberflächen begrenzt ist. Die analytischen Entwicklungen lassen sich in diesen Fällen mit aller für die Anwendung auf Experimente wünschenswerthen Allgemeinheit und mit ziemlicher Einfachheit durchführen. Wir begnügen uns damit, hier die Hauptmomente nur für die ***volle Kugel*** zu entwickeln, und nehmen dabei die willkürlichen Bedingungen des Problems möglichst einfach an. Nämlich, wir setzen, zur Zeit $t=0$ sei die Kugel so erwärmt, dafs alle Puncte in gleicher Entfernung r vom Centrum die gleiche, aber willkürliche Temperatur u_0 haben. Es ist also

$$(1.)\qquad u_0 = f(r),$$

wo $f(r)$ eine willkürlich gegebene Function des Radius-vector ist. Die Temperatur der Umgebung sehen wir als constant an; eben so den normal gegen die Oberfläche der Kugel gerichteten Druck. Beide lassen sich $=0$ setzen, ohne dadurch die Aufgabe weiter zu beschränken. Es sei also

$$U=0,\quad \overline{X'}=0,\quad \overline{Y'}=0,\quad \overline{Z'}=0.$$

Übrigens wäre die Lösung noch möglich, wenn man für die äufsere Temperatur und den Druck *beliebige* Functionen der Zeit setzte.

Auf Puncte im Innern sollen, aufser den molecularen, keine andern Kräfte wirken; d. h. es sei

$$X' = 0, \quad Y' = 0, \quad Z' = 0.$$

Offenbar werden unter diesen Voraussetzungen die Temperatur und die Verrückungen irgend eines Puncts, zu einer beliebigen Zeit t, allein Functionen seiner Entfernung r vom Mittelpunct der Kugel und von t sein. Transformirt man δu, unter Berücksichtigung dieses Umstandes, in Polarcoordinaten, indem man den Mittelpunct der Kugel als Anfangspunct annimmt, so erhält man

$$\delta u = \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2(ru)}{dr^2}$$

und die Gleichung (*R.*) geht in

$$(2.) \quad \frac{du}{dt} = \frac{K}{\varrho \eta r} \cdot \frac{d^2(ru)}{dr^2} - \frac{\varepsilon - \eta}{3 a \eta} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

über. Schreibt man der Kürze wegen h statt $\frac{h}{K}$, so giebt die Bedingung an der Oberfläche (*S.*):

$$(3.) \quad \frac{du}{dr} + hu = 0.$$

Aus (*E.*) folgt, unter Anwendung der Gleichungen (*L.* und *M.*):

$$(4.) \quad 0 = n \frac{d\varphi}{dr} - (n+2) \alpha \frac{du}{dr},$$

wo

$$\varphi = \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz}$$

die Dilatation des Elements ist. Es sei $r(1+\vartheta)$ die Entfernung eines Puncts vom Mittelpuncte der Kugel zur Zeit $t = 0$, d. h., es sei $r\vartheta$ die Verrückung des Puncts in der Richtung des Radius, so erhält man

$$(5.) \quad \varphi = 3\vartheta + r \frac{d\vartheta}{dr}.$$

Die Gleichungen (*D.* und *F.*) geben

$$(6.) \quad 0 = \varphi + (n-1) \frac{d(r\vartheta)}{dr} - (n+2) au.$$

Diese Gleichung gilt nur für Puncte der Oberfläche, also nur für $r = r_0$, wenn r_0 der Radius der Kugel ist.

Unsre Aufgabe ist nun, eine Function u von r und t zu finden, welche den Bedingungen (1 bis 6.) genügt. Als siebente Bedingung kann man hinzufügen, dafs für $r=0$ die Verrückung $r\vartheta$ nicht unendlich werden darf.

§. 8.

Aus der Gleichung (4.) ziehen wir zunächst

$$\varphi = \frac{n+2}{n} au + F(t),$$

wo $F(t)$ eine willkürliche Function der Zeit ist. Aus (5.) folgt

$$\vartheta = \frac{1}{r^3}\int_0^r r^2\varphi\, dr.$$

Das Integral mufs für $r=0$ verschwinden, da sonst im Mittelpuncte der Kugel $r\vartheta$ unendlich würde. Setzt man hierin für φ seinen Werth, so wird

$$\vartheta = \frac{n+2}{n}\cdot\frac{a}{r^3}\int_0^r r^2 u\, dr + \tfrac{1}{3}F(t).$$

Dieser Ausdruck für ϑ in die Gleichung (6.) substituirt, giebt

$$F(t) = \frac{6(n-1)}{n}\cdot\frac{a}{r_0^3}\int_0^{r_0} r^2 u\, dr,$$

folglich

$$(7.)\qquad \varphi = \frac{(n+2)}{n} au + \frac{6(n-1)}{n}\cdot\frac{a}{r_0^3}\int_0^{r_0} r^2 u\, dr.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung kann man aus (2.) φ eliminiren und erhält

$$(8.)\qquad \left(1+\frac{n+2}{3n}\cdot\frac{\varepsilon-\eta}{\eta}\right)\frac{du}{dt} = \frac{K}{\varrho\eta r}\cdot\frac{d^2(ru)}{dr^2} - \frac{2(n-1)}{n}\cdot\frac{\varepsilon-\eta}{\eta}\cdot\frac{1}{r_0^3}\int_0^{r_0} r^2\frac{du}{dt}\, dr.$$

Diese Differentialgleichung ist linear und in Rücksicht auf die Variable t von der ersten Ordnung. Man kann also

$$(9.)\qquad ru = e^{-m^2 t} v$$

setzen; wo m eine Constante, die wir vor der Hand unbestimmt lassen, und v eine Function von r allein ist. Die Substitution in (8.) giebt

$$(10.)\qquad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{a^2}{r_0^2}\left(v+\frac{bsr}{r_0^3}\right) = 0,$$

wo zur Abkürzung

$$(11.)\qquad \begin{cases} a^2 = \dfrac{r_0^2 m^2 \varrho}{K}\cdot\dfrac{2(n-1)\eta+(n+2)\varepsilon}{3n} \\ b = \dfrac{6(n-1)(\varepsilon-\eta)}{2(n-1)\eta+(n+2)\varepsilon} \\ s = \displaystyle\int_0^{r_0} rv\, dr \end{cases}$$

gesetzt wurde. Das vollständige Integral der Gleichung (10.) ist

$$v = g' \sin\frac{ar}{r_0} + g'' \cos\frac{ar}{r_0} - \frac{bsr}{r_0^2}.$$

Da $\frac{V}{r}$ für $r = 0$ nicht unendlich sein kann, weil sonst u im Mittelpunct der Kugel beständig unendlich wäre, so mufs $g'' = 0$ sein. Der blofse Anblick der Gleichung (10.) lehrt, dafs wenn die Function v ihr genügt, auch gv ihr genügen mufs, wenn g eine willkürliche Constante ist. Wir können deshalb, zur Vereinfachung der Bezeichnung,

$$(12.) \qquad v = \sin\frac{ar}{r_0} - \frac{bsr}{r_0^2}$$

setzen; und dann ist gv das allgemeinste Integral, dessen wir bedürfen.

Multiplicirt man die Gleichung (12.) mit rdr und integrirt von 0 bis r_0, so erhält man, mit Berücksichtigung von (11.):

$$s = \frac{r_0^2}{a^2}(\sin a - a\cos a) - \tfrac{1}{3}sb,$$

woraus

$$(13.) \qquad s = \frac{r_0^2}{a^2}\,\frac{\sin a - a\cos a}{1+\frac{1}{3}b} = \frac{K}{\varrho e m^2}(\sin a - a\cos a)$$

folgt.

Wir haben nun für u den Ausdruck

$$(14.) \qquad u = g\cdot\frac{v}{r}e^{-m^2t} = g\left(\frac{\sin\frac{ar}{r_0}}{r} - \frac{bs}{r_0^2}\right)e^{-m^2t}$$

gefunden. Soll derselbe die Aufgabe lösen, so mufs er der Bedingung an der Oberfläche (3.), nämlich

$$\left(\frac{du}{dr} + hu\right)_{r=r_0} = 0$$

genügen. Die Substitution von u aus (14.) giebt, nach einer einfachen Umformung,

$$\frac{\operatorname{tang} a}{a} = \frac{1+\frac{r_0 hb}{a^2(1+\frac{1}{3}b)}}{1-r_0h+\frac{r_0 hb}{a^2(1+\frac{1}{3}b)}},$$

oder, wenn man für b seinen Werth setzt,

$$(15.) \qquad \frac{\operatorname{tang} a}{a} = \frac{1+2\frac{(n-1)}{n}\frac{(\varepsilon-\eta)}{\varepsilon}\frac{r_0 h}{a^2}}{1-r_0h+2\frac{(n-1)}{n}\frac{(\varepsilon-\eta)}{\varepsilon}\frac{r_0 h}{a^2}}.$$

Alle Gröfsen in dieser Gleichung sind gegeben, aufser allein a. Damit sie erfüllt werde, müssen wir für a eine ihrer Wurzeln setzen.

Offenbar hat die Gleichung (15.) unendlich viele Wurzeln, die, ihrer Gröfse nach geordnet, durch a_1, a_2, ... a_λ, ... bezeichnet werden sollen. Mit Hülfe einer jeden kann man eine particulare Lösung der Gleichung (8.) von der Form (14.) bilden, welche zufolge ihrer Herleitung den Bedingungen (2, 3, 4 und 6.) genügt. Den allgemeinsten Ausdruck von u erhält man, wenn man die Summe aller dieser particularen Lösungen nimmt. Deutet man die von der Wurzel a_λ abhängigen Gröfsen durch den angehängten Index λ an, so ergiebt sich

$$U = \sum_1^\infty {}_\lambda g_\lambda \frac{v_\lambda}{r} e^{-m_\lambda^2 t},$$

und man erhält m_λ, v_λ, s_λ, wenn man in den Gleichungen (11, 12 und 13.) a_λ statt a setzt.

§. 9.

Kämen unter den Wurzeln der Gleichung (15.) imaginäre vor, so hätte man die ihnen entsprechenden particularen Lösungen für u aus dem allgemeinen Ausdrucke (16.) wegzulassen, da offenbar $u=0$ sein mufs, für $t=\infty$, während imaginäre Werthe von a auf einen Ausdruck mit periodischen Gliedern führen würden. Es läfst sich aber nachweisen, dafs sämmtliche Wurzeln der Gleichung (15.) reell sind.

Irgend zwei der Gröfsen v, die wir durch v_λ und v_μ bezeichnen wollen, genügen den Gleichungen

$$\left(\frac{d\frac{v_\mu}{r}}{dr} + \frac{hv_\mu}{r}\right)_{r=0} = 0,$$

$$(v_\lambda)_{r=0} = 0, \quad (v_\mu)_{r=0} = 0,$$

$$\frac{d^2 v_\mu}{dr^2} + \frac{a_\mu^2}{r_0^2}\left(v_\mu + \frac{bs_\mu r}{r_0^2}\right) = 0.$$

In der leicht nachzuweisenden identischen Gleichung

$$\left(r^2\omega'\frac{d\omega}{dr}\right)_{r=r_0} - \left(r^2\omega'\frac{d\omega}{dr}\right)_{r=0} = \int_0^{r_0} r\omega'\frac{d^2 r\omega}{dr^2}dr + \int_0^{r_0} r^2\frac{d\omega'}{dr}\,\frac{d\omega}{dr}dr$$

setze man $\omega = \frac{v_\mu}{r}$, $\omega' = \frac{v_\lambda}{r}$, so ergiebt sich, unter Anwendung der vorangehenden Gleichungen:

$$(16.)\quad \frac{a_\mu^2}{r_0^2}\int_0^{r_0} v_\lambda\left(v_\mu + \frac{bs_\mu r}{r_0^2}\right)dr = h(v_\lambda v_\mu)_{r=r_0} + \int_0^{r_0} r^2\frac{d\frac{v_\lambda}{r}}{dr}\,\frac{d\frac{v_\mu}{r}}{dr}dr.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung folgt nun leicht, dafs der Gleichung (15.) kein Werth von der Form

$$\alpha_\mu = \beta + \gamma\sqrt{-1}$$

genügen kann, wenn β und γ reell und von 0 verschieden sind. Da nämlich alle in der Gleichung (15.) vorkommenden Gröfsen reell sind, so mufs, wenn eine Wurzel von der angegebenen Form vorkommt, noch eine zweite von der Form

$$\alpha_\lambda = \beta - \gamma\sqrt{-1}$$

vorhanden sein. Die diesen beiden Wurzeln entsprechenden v müssen sich auf die Form

$$v_\lambda = v' + v''\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$v_\mu = v' - v''\sqrt{-1}$$

bringen lassen, und eben so wird

$$s_\lambda = s' + s''\sqrt{-1} \text{ und}$$
$$s_\mu = s' - s''\sqrt{-1}$$

sein; wo v', v'', s', s'' reelle Gröfsen sind. Durch Substitution dieser verschiedenen Werthe geht die Gleichung (17.) in

$$(\beta^2 - \gamma^2 - 2\beta\gamma\sqrt{-1})\left\{\int_0^{r_0}(v'^2 + v''^2)\,dr + \frac{b}{r_0^2}(s'^2 + s''^2)\right\}$$
$$= h(v'^2 + v''^2)_{r=r_0} + \int_0^{r_0} r^2\left\{\left(\frac{d\frac{v'}{r}}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\frac{v''}{r}}{dr}\right)^2\right\}dr$$

über. Damit diese Gleichung erfüllt werde, mufs der Coëfficient von $\sqrt{-1}$ verschwinden, d. h. es mufs

$$\beta\gamma\left\{\int_0^{r_0}(v'^2 + v''^2)\,dr + \frac{b}{r_0^2}(s'^2 + s''^2)\right\} = 0$$

sein. Da b positiv ist, so kann die Parenthese offenbar nicht verschwinden. Also mufs

$$\beta\gamma = 0,$$

d. h. $\beta = 0$ oder $\gamma = 0$ sein. Für $\beta = 0$ würde die Seite links in obiger Gleichung negativ, die Seite rechts positiv werden (da h positiv ist). Die Annahme $\beta = 0$ führt also auf einen Widerspruch, und es mufs daher nothwendig $\gamma = 0$, d. h. α_μ und folglich auch m_μ *reell* sein.

Diese Methode, die Realität von m nachzuweisen, läfst sich sehr leicht auf das Wärmeproblem in der allgemeinsten Fassung ausdehnen. Sie unterscheidet sich in einem wesentlichen Puncte von der *Poisson*schen, indem auf

die angegebene Weise nicht blofs nachgewiesen wird, dafs m^2 reell, sondern, was eben so wesentlich ist, dafs m reell, also m^2 positiv ist.

Über die Lage der Wurzeln dieser Gleichung läfst sich im Allgemeinen Dasselbe sagen, wie über die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang} a'}{a'} = \frac{1}{1-r_0 h}.$$

Da diese Gleichung vielfach behandelt wurde, wollen wir nichts darüber hinzufügen. Nur werde bemerkt, dafs a_n, mit wachsendem n, rascher der Grenze $(2n+1)\frac{1}{2}\pi$ sich nähert, als a'_n.

§. 10.

Vertauscht man in der Gleichung (17.) λ mit μ, so bleibt die Seite rechts ungeändert. Daraus folgt

$$a_\lambda^2 \int_0^{r_0} v_\mu \left(v_\lambda + \frac{b r_\lambda r}{r_0^2}\right) dr - a_\mu^2 \int_0^{r_0} v_\lambda \left(v_\mu + \frac{b s_\mu r}{r_0^2}\right) dr = 0,$$

oder, wenn man die Gleichungen (11.) berücksichtigt:

$$(17.) \qquad (a_\mu^2 - a_\lambda^2) \int_0^{r_0} v_\lambda \left(v_\mu + \frac{b s_\mu r}{r_0^2}\right) dr = 0.$$

Es seien λ und μ von einander verschieden, so folgt daraus

$$(18.) \qquad \int_0^{r_0} v_\lambda \left(v_\mu + \frac{rb}{r_0^2} s_\mu\right) dr = 0.$$

Ist dagegen $\lambda = \mu$, so erhält man

$$(19.) \quad c_\lambda = \int_0^{r_0} v_\lambda \left(v_\lambda + \frac{rb}{r_0^2} s_\lambda\right) dr = r_0 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sin 2a_\lambda}{4a_\lambda} - 2\frac{(n-1)}{n}\frac{\varepsilon-\eta}{\eta}\frac{(\sin a_\lambda - \cos a_\lambda)^2}{a_\lambda^4} \right\}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen (18 und 19.) lassen sich nun leicht die Werthe der willkürlichen Constanten g in dem Ausdrucke von u, (16.) so bestimmen, dafs auch die letzte noch übrige Bedingung (1.) erfüllt wird, nämlich, dafs u für $t=0$ eine gegebene Function $f(r)$ wird. Es mufs also

$$u_0 = f(r) = \Sigma_1^\infty \lambda\, g_\lambda \frac{v_\lambda}{r}$$

sein. Man multiplicire diese Gleichung mit

$$r \sin \frac{a_\mu r}{r_0} dr = r\left(v_\mu + \frac{r b s_\mu}{r_0^2}\right) dr$$

und integrire von r^1 bis r_0, so erhält man

$$\int_0^{r_0} r f(r) \sin\left(\frac{a_\mu r}{r_0}\right) dr = \Sigma_1^\infty \lambda \int_0^{r_0} v_\lambda \left(v_\mu + \frac{r b s_\mu}{r_0^2}\right) dr.$$

Wegen der Gleichungen (18 und 19.) wird die Seite dieser Gleichung rechts $= g_\mu c_\mu$, also

$$g_\mu = \frac{1}{c_\mu}\int_0^{r_0} r f(r) \sin\left(\frac{a_\mu r}{r_0}\right) dr$$

und es ergiebt sich für u schliefslich die Formel

$$(20.)\qquad u = \sum_1^\infty \lambda \frac{v_\lambda}{r c_\lambda} e^{-m_\lambda^2 t} \int_0^{r_0} r f(r) \sin\left(\frac{a_\lambda r}{r_0}\right) dr.$$

In derselben ist, dem Vorhergehenden zufolge:

$$v_\lambda = \sin\left(\frac{a_\lambda r}{r_0}\right) - 2\frac{n-1}{n}\frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\frac{(\sin a_\lambda - \cos a_\lambda)}{a_\lambda^2}\frac{r}{r_0},$$

$$c_\lambda = r_0\left\{\tfrac{1}{2} - \frac{\sin 2a_\lambda}{4a_\lambda} - 2\frac{n-1}{n}\frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\frac{(\sin a_\lambda - \cos a_\lambda)}{a_\lambda^2}\right\},$$

$$m_\lambda^2 = \frac{a_\lambda^2 K}{r_0^2}\cdot\frac{3n}{2(n-1)\eta+(n+2)\varepsilon}$$

und a_λ ist eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang} a}{a} = \frac{1+2\frac{n-1}{n}\frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\frac{r_0 h}{a^2}}{1-r_0 h+2\frac{n-1}{n}\frac{\varepsilon-\eta}{\varepsilon}\frac{r_0 h}{a^2}}.$$

Gesetzt, man habe die Kugel so lange in einer Flüssigkeit von der constanten Temperatur u_0 erhalten, bis sie dieselbe gleichfalls angenommen hat, und bringe sie zur Zeit $t=0$ in eine andere Flüssigkeit von der constanten Temperatur 0, so ist $f(r) = u_0 =$ Const. und es wird

$$\int_0^{r_0} r f(r) \sin\left(\frac{a_\lambda r}{r_0}\right) dr = u_0 \int_0^{r_0} r \sin\left(\frac{a_\lambda r}{r_0}\right) dr = u_0 s_\lambda (1+\tfrac{1}{3}b),$$

also

$$u = u_0(1+\tfrac{1}{3}b)\sum_1^\infty \lambda \frac{v_\lambda}{r}\frac{s_\lambda}{c_\lambda} e^{-m_\lambda^2 t}.$$

Diese Formel scheint insbesondere zur Vergleichung mit Beobachtungen geeignet. Am bequemsten ist die Verfolgung der Temperatur im Mittelpunct der Kugel, also für $r=0$. Die Formel (12.) giebt dafür

$$\left(\frac{v_\lambda}{r}\right)_{r=0} = \frac{a_\lambda}{r_0} - \frac{b s_\lambda}{r_0^2}.$$

Eine nähere Discussion des hieraus für $(u)_{r=0}$ entspringenden Ausdrucks unterlasse ich. Es läfst sich daraus ableiten, was auch schon eine einfache Überlegung zeigt, dafs, wenn $u_0 > 0$ ist, Anfangs die Temperatur u im Mittelpunct der Kugel *wächst*, ein gewisses Maximum erreicht, und von da an fort-

während abnimmt, bis zur Temperatur 0 der umgebenden Flüssigkeit. Die Beobachtung jenes Maximums, und des Augenblicks, in welchem es eintritt, kann benutzt werden, um den anderweitig bestimmten Werth von $\frac{\eta}{\varepsilon}$ mit Hülfe obiger Formel zu verificiren.

§. 11.

Zur vollständigen Lösung unsrer Aufgabe fehlt noch der Beweis, dafs sich die von $r = 0$ bis $r = r_0$ *willkürlich* gegebene Function $f(r)$ wirklich in eine convergente Reihe von der Form

$$g_1 v_1 + g_2 v_2 + \dots .$$

entwickeln läfst. Diesen Beweis übergehe ich hier und begnüge mich, zu bemerken, dafs sich die Richtigkeit unsrer Voraussetzung als Folge eines sehr allgemeinen Theorems ergiebt, welches sich folgendermafsen aussprechen läfst:

„Es seien $v_1, v_2, \dots v_m, \dots$ beliebige Functionen von r, welche zwischen den Grenzen $r = A$ und $r = B$ stetig und immer endlich sind, und welche die Eigenschaft haben,

1) Dafs v_m zwischen $r = A$ und $r = B$, $(m-1)$mal das Vorzeichen ändert;
2) Dafs die *ungleichen* Wurzeln der Gleichung $v_m = 0$, welche ihrer Gröfse nach durch $m_1, m_2, \dots m_{m-1}$ bezeichnet werden mögen, so liegen, dafs $m_k < (m-1)_k < m_{k+1}$ ist, und dafs die Summe $(A-m_1)^2 + (m_1-m_2)^2 + \dots + (m_{m-2} - m_{m-1})^2 + (m_{m-1} - B)^2$ mit wachsendem m sich der Null nähert:

so läfst sich unter diesen Voraussetzungen die willkürlich gegebene Function $f(r)$ zwischen den Grenzen $r = A$ und $r = B$ in eine convergente Reihe von der Form

$$f(r) = g_1 v_1 + g_2 v_2 + \dots$$

entwickeln."

Die Gültigkeit dieser Reihe kann für besondere Werthe von r eine Ausnahme leiden, je nach Beschaffenheit der Functionen $v_1, v_2, \dots$ und $f(r)$.

36.

Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die *Jacob-Bernoulli*sche Function.

(Von Herrn Dr. *Raabe*, Professor an der Universität zu Zürich.)

1.

In dem bekannten, von *Poisson* herrührenden Satze, den auch meine Integralrechnung in Nr. 230 enthält und den folgende Gleichung darstellt:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = v\{\tfrac{1}{2}\varphi(a)+\varphi(a+v)+\varphi(v+2v)+\cdots\varphi(a+(n-1)v)+\tfrac{1}{2}\varphi(b)\}$$
$$-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_a^b \varphi(x)\cos\frac{2r\pi(x-a)}{v}\,dx,$$

wo $b-a=nv$ ist, nehme man $\varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$, $a=0$, $b=\infty$ an. Dies giebt

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}v+\sin v+\tfrac{1}{2}\sin 2v+\tfrac{1}{3}\sin 3v+\tfrac{1}{4}\sin 4v+\text{in inf.}$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\infty}\left\{\int_0^\infty \sin\left(\frac{2r\pi}{v}+1\right)x\,\frac{dx}{x}-\int_0^\infty \sin\left(\frac{2r\pi}{v}-1\right)x\,\frac{dx}{x}\right\},$$

wo v irgend eine reelle, positive Gröfse ist. Nach Gleichung (6.) der Nr. 388 meiner Integralrechnung giebt das erste bestimmte Integral innerhalb der Klammern den Werth $\frac{1}{2}\pi$, das zweite den Werth $+\frac{1}{2}\pi$ oder $-\frac{1}{2}\pi$, je nachdem $\frac{2r\pi}{v}-1$ positiv oder negativ ist. Erklärt man nun v innerhalb der Grenzen 0 und 2π liegend, so stellt $\frac{2r\pi}{v}-1$, für alle Werthe von $r=1$ bis $r=\infty$, eine positiv angebbare Gröfse dar; folglich hat man:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{2}v+\sin v+\tfrac{1}{2}\sin 2v+\tfrac{1}{3}\sin 3v+\text{in inf.},$$

oder man hat für alle innerhalb 0 und π fallende Werthe von x die Gleichung

$$x = \pi-2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Multiplicirt man dieselbe mit dx und integrirt beiderseits nach x, so ist man berechtigt, den Umfang der Integration über alle innerhalb 0 und 2π fallende Werthe von x auszudehnen; allein, wie der Erfolg zeigt, dürfen auch diese Grenzwerthe selbst, in den Bereich des Integrations-Umfanges aufgenommen werden, d. h. man hat für alle Werthe von $x=0$ bis $x=2\pi$

den Ausdruck:

$$\frac{x^2}{1.2} = \pi x - 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1-\cos kx}{k^2}.$$

Wird noch der Kürze wegen die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^2} = S_2$$

festgestellt, so hat man von $x=0$ bis $x=2\pi$:

$$\frac{x^2}{1.2} = \pi x - 2S_2 + 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos kx}{k^2}.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dx und integrirt von $x=0$ bis $x=x$, so ergiebt sich:

$$\frac{x^3}{1.2.3} = \pi\frac{x^2}{1.2} - 2S_2 x + 2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kx}{k^3};$$

was ebenfalls für alle Werthe von $x=0$ bis $x=2\pi$ identisch besteht.

Fährt man fort, das jedesmal gefundene Ergebnifs mit dx zu multipliciren und von $x=0$ bis $x=x$ zu integriren, so gelangt man unter Feststellung der Vereinfachungsgleichung

$$S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \text{in inf.}$$

auf folgende Gleichungen:

$$\frac{x^{2m+1}}{1.2.3\ldots(2m+1)} = \pi\frac{x^{2m}}{1.2.3\ldots 2m} - 2S_2\frac{x^{2m-1}}{1.2.3\ldots(2m-1)} + 2S_4\frac{x^{2m-3}}{1.2.3\ldots(2m-3)}$$
$$- 2S_6\frac{x^{2m-5}}{1.2.3\ldots(2m-5)} + \cdots$$
$$+ 2(-1)^{m-1}S_{2m-2}\frac{x^3}{1.2.3} + 2(-1)^m S_{2m}x + 2(-1)^{m+1}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kx}{k^{2m+1}},$$

$$\frac{x^{2m+2}}{1.2.3\ldots(2m+2)} = \pi\frac{x^{2m+1}}{1.2.3\ldots(2m+1)} - 2S_2\frac{x^{2m}}{1.2.3\ldots 2m} + 2S_4\frac{x^{2m-2}}{1.2.3\ldots(2m-2)}$$
$$- 2S_6\frac{x^{2m-4}}{1.2.3\ldots(2m-4)} + \cdots$$
$$+ 2(-1)^m S_{2m}\frac{x^2}{1.2} + 2(-1)^{m+1}S_{2m+2} + 2(-1)^{m+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos kx}{k^{2m+2}},$$

die für alle Werthe von $x=0$ bis $x=2\pi$ bestehen. In denselben darf man $m = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ annehmen; nur bei $m=0$ sind in der ersteren die Grenzwerthe $x=0$ und $x=2\pi$ auszuschliefsen.

Führt man hier statt S_{2r} die $r$te *Bernoulli*sche Zahl B_r nach der bekannten Gleichung

$$B_r = 1.2.3\ldots 2r.\frac{2}{(2\pi)^{2r}}S_{2r}$$

ein, multiplicirt hierauf die sich ergebenden zwei Gleichungen beziehlich mit

$$1.2.3\ldots 2m \quad \text{und} \quad 1.2.3\ldots 2m+1,$$

und stellt den $r$ten Binomialcoëfficienten in der Entwickelung von $(1+x)^m$ durch $\binom{m}{r}$ dar, so gehen die obigen zwei Ausdrücke beziehlich in folgende über:

$$2(-1)^{m+1}1.2.3\ldots 2m\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kx}{k^{2m+1}}$$

$$= \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \tfrac{1}{2}.2\pi x^{2m} + \tfrac{1}{2}\binom{2m}{1}B_1(2\pi)^2x^{2m-1} - \tfrac{1}{4}\binom{2m}{3}B_2(2\pi)^4x^{2m-3}$$

$$+\tfrac{1}{6}\binom{2m}{5}B_3(2\pi)^6x^{2m-5} - \tfrac{1}{8}\binom{2m}{7}B_4(2\pi)^8x^{2m-7} + \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m(2\pi)^{2m}x,$$

$$2(-1)^m1.2.3\ldots(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos kx}{k^{2m+2}}$$

$$= \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \tfrac{1}{2}.2\pi x^{2m+1} + \tfrac{1}{2}\binom{2m+1}{1}B_1(2\pi)^2x^{2m} - \tfrac{1}{4}\binom{2m+1}{3}B_2(2\pi)^4x^{2m-2}$$

$$+\tfrac{1}{6}\binom{2m+1}{5}B_3(2\pi)^6x^{2m-4} - \tfrac{1}{8}\binom{2m+1}{7}B_4(2\pi)^8x^{2m-6} + \ldots$$

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1}B_m(2\pi)^{2m}x^2 + \frac{(-1)^m}{2m+2}B_{m+1}(2\pi)^{2m+2}.$$

Dividirt man die erste dieser Formeln durch $(2\pi)^{2m+1}$, die zweite durch $(2\pi)^{2m+2}$, und führt die in meiner Schrift „Die *Jacob Bernoulli*sche Function" festgestellte Bezeichnung dieser Function ein, die für einen geraden Functions-Exponenten $2m$ durch $B''(x)$ und für einen ungeraden $2m+1$ durch $B'(x)$ dargestellt wird, so ergeben sich die Ausdrücke

$$\frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}}1.2.3\ldots\ldots 2m\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin kx}{k^{2m+1}} = B''\left(\frac{x}{2\pi}\right),$$

$$\frac{2(-1)^m}{(2\pi)^{2m+2}}1.2.3\ldots(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos kx}{k^{2m+2}} = B'\left(\frac{x}{2\pi}\right) + \frac{(-1)^m}{2m+2}B_{m+1},$$

oder auch

$$(1.)\quad \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}}1.2.3\ldots\ldots 2m\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\sin 2k\pi x}{k^{2m+1}} = B''(x),$$

$$(2.)\quad \frac{2(-1)^m}{(2\pi)^{2m+2}}1.2.3\ldots(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m+2}} = B'(x) + \frac{(-1)^m}{2m+2}B_{m+1}.$$

Für die Werthe 0, 1, 2, 3, ... von m bestehen diese Formeln von $x=0$ bis $x=1$; nur für $m=0$ bestehet erstere (in welcher dann das Product $1.2.3\ldots 2m$ durch 1 zu ersetzen ist) lediglich für die innerhalb 0 und 1 fallenden Werthe von x.

Für diejenigen Leser, welche meine oben erwähnte Schrift nicht bei der Hand haben, füge ich folgende Begriffsgleichungen der Functionen $B''(x)$ und $B'(x)$ bei:

$$B''(x) = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \tfrac{1}{2}x^{2m} + \tfrac{1}{2}\binom{2m}{1}B_1 x^{2m-1} - \tfrac{1}{4}\binom{2m}{3}B_2 x^{2m-3} + \tfrac{1}{6}\binom{2m}{5}B_3 x^{2m-5} - \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m x,$$

$$B'(x) = \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \tfrac{1}{2}x^{2m+1} + \tfrac{1}{2}\binom{2m+1}{1}B_1 x^{2m} - \tfrac{1}{4}\binom{2m+1}{3}B_2 x^{2m+2} + \tfrac{1}{6}\binom{2m+1}{5}B_3 x^{2m-4} - \ldots \frac{(-1)^{m-1}}{2m}\binom{2m+1}{2m-1}B_m x^2,$$

wo B_1, B_2, B_3, ... die aufeinanderfolgenden *Bernoulli*schen Zahlen sind, nämlich die Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{5}{66}$, $\frac{691}{2730}$, $\frac{7}{6}$ u. s. w.

2.

Aus den Ergebnissen in (1. und 2.), zu welchen *Legendre* im zweiten Bande seiner „Exercices", wie auch Herr *Dienger* im 34. Bande dieses Journals manche schöne Analoge mitgetheilt hat, ziehe ich zunächst einige Specialisirungen, die auch als Verificationen der Ergebnisse angesehen werden können.

Wird in (1. und 2.) $x=0$ gesetzt, so geht (1.) in eine identische Gleichung über, und letztere führt auf:

$$(3.)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m+2}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2m+2}}{1.2.3.4\ldots(2m+2)}B_{m+1},$$

welche mit der in voriger Nr. zwischen B_r und S_{2r} aufgeführten Relation einerlei ist.

Wird ferner insbesondere $x=\frac{1}{4}$ gesetzt, so erhält man

$$(4.)\quad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} = \dfrac{(-1)^{m+1}}{2}\cdot\dfrac{(2\pi)^{2m+1}}{1.2.3\ldots 2m}B''(\tfrac{1}{4}), \\ \sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+2}} = \dfrac{(-1)^{m+1}}{2}\cdot\dfrac{(4\pi)^{2m+2}}{1.2.3\ldots(2m+1)}\left[B'(\tfrac{1}{4}) + \dfrac{(-1)^m}{2m+2}B_{m+1}\right]. \end{cases}$$

Man sieht leicht die Richtigkeit der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(2k-1)^{2m+1}}=\left(1-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m+1}}.$$

Verbindet man dieselbe mit der ersten in (4.) durch Addition, so wie durch Subtraction, so ergeben sich folgende zwei beachtenswerthe Summenbestimmungen:

$$(5.)\quad\begin{cases}\left(1-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m+1}}=\frac{(-1)^m}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2m+1}}{1.2.3\ldots.2m}B''(\tfrac{1}{4})+2\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(4k-3)^{2m+1}},\\ \left(1-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m+1}}=\frac{(-1)^{m-1}}{2}\cdot\frac{(2\pi)^{2m+1}}{1.2.3\ldots.2m}B''(\tfrac{1}{4})+2\sum\limits_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{(4k-1)^{2m+1}}.\end{cases}$$

Multiplicirt man nun die Ausdrücke (1. und 2.) mit dx und integrirt von $x=0$ bis $x=1$, so erhält man

$$(6.)\quad\int_0^1 B''(x)dx=0,\quad\int_0^1 B'(x)dx=\frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}B_{m+1};$$

welche Gleichungen auch in meiner oben citirten Schrift mitgetheilt worden sind.

Werden ferner dieselben Gleichungen erst mit $\cos 2r\pi x\,dx$, dann mit $\sin 2r\pi x\,dx$ multiplicirt und hierauf von $x=0$ bis $x=1$ integrirt, so ergeben sich die Integrale

$$(7.)\quad\begin{cases}\int_0^1 B''(x)\cos 2r\pi x\,dx=0,\ \int_0^1 B''(x)\sin 2r\pi x\,dx=\frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}}\cdot\frac{\Gamma(2m+1)}{r^{2m+1}},\\ \int_0^1 B'(x)\sin 2r\pi x\,dx=0,\ \int_0^1 B'(x)\cos 2r\pi x\,dx=\frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m+2}}\cdot\frac{\Gamma(2m+2)}{r^{2m+2}},\end{cases}$$

wo r eine ganze Zahl ist und $\Gamma(a)$ die bekannte *Legendre*sche Bedeutung hat.

Stellt man nun mit Hülfe der oben im Eingange unterlegten Gleichheit das bestimmte Integral $\int_0^1 B'(x)dx$ her, so erhält man, wenn $v=\frac{1}{n}$ gesetzt wird, mit Beachtung der Gleichungen ($B'(0)=0$, $B'(1)=0$, folgende Ausdrücke:

$$\int_0^1 B'(x)dx=\frac{1}{n}\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots B'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$
$$-2\sum_{r=1}^{r=\infty}\int_0^1 B'(x)\cos 2nr\pi x\,dx;$$

wo n irgend eine ganze und positive Zahl bedeutet. Ersetzt man die Werthe der hier vorkommenden bestimmten Integrale den unmittelbar vorher aufgestellten Gleichungen gemäfs, so ergiebt sich

$$\frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}B_{m+1} = \frac{1}{n}\cdot\left\{B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots B'\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$
$$+\frac{2(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+2}}\cdot\frac{\Gamma(2m+2)}{n^{2m+2}}\sum_{r=1}^{r=\infty}\frac{1}{r^{2m+2}},$$

woraus, wenn die Bedeutung von $\Gamma(2m+2)$ und die oben aufgestellte Gleichung (3.) beachtet wird,

$$(8.)\quad \frac{(-1)^{m-1}}{2m+2}\left(n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right)B_{m+1}$$
$$= B'\left(\frac{1}{n}\right)+B'\left(\frac{2}{n}\right)+B'\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots B'\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

folgt; welche Gleichung auf einem weitläufigeren Wege in meiner Schrift über die *Bernoulli*sche Function ebenfalls gefunden wurde.

Multiplicirt man weiter die Gleichungen (1. und 2.) beziehlich mit $B''(x)dx$ und $B'(x)dx$ und integrirt sie dann von $x=0$ bis $x=1$, so ergeben sich, beachtend die hier aufgestellten Gleichungen in (6. und 7.), folgende Ausdrücke:

$$\int_0^1 B''(x)^2\,dx = \frac{2}{(2\pi)^{4m+2}}\Gamma(2m+1)^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{4m+2}},$$
$$\int_0^1 B'(x)^2\,dx = \frac{2}{(2\pi)^{4m+4}}\Gamma(2m+2)^2\sum_{k=0}^{k=\infty}\frac{1}{k^{4m+4}}+\frac{B_{m+1}^2}{(2m+2)^2},$$

welche, mit Rücksicht auf die oben aufgestellte Gleichung (3.) und nach Restituirung der Functionen $\Gamma(2m+1)^2$, $\Gamma(2m+2)^2$, folgende beachtenswerthe Resultate geben:

$$(9.)\quad \begin{cases} \int_0^1 B''(x)^2\,dx = \dfrac{1.2.3.4\ldots 2m}{(2m+1)(2m+2)\ldots(4m+2)}B_{2m+1}, \\ \int_0^1 B'(x)^2\,dx = \dfrac{1.2.3.4\ldots(2m+1)}{(2m+2)(2m+3)\ldots(4m+4)}B_{2m+2}+\dfrac{B_{m+1}^2}{(2m+2)^2}. \end{cases}$$

Erwägt man nemlich, dafs $B''(x)$, wie $B'(x)$, hier die m ersten *Bernoulli*schen Zahlen enthalten, so wie den Umstand, dafs die bestimmten Integrale links leicht zu finden sind, so zeigt die erste dieser Gleichungen, wie mit Hülfe der m ersten *Bernoulli*schen Zahlen unmittelbar die $(2m+1)$te gefunden werden kann. Und ganz Ähnliches zeigt die zweite Gleichung in (9.) in Beziehung auf die $(2m+2)$te dieser Zahlen.

3.

Die Ergebnisse in (1. und 2.) leisten auch gute Dienste, um die *Bernoulli*sche Function mit geraden, so wie mit ungeraden Functions-Exponenten in bequemern Formen darzustellen, als es in meiner Schrift geschah.

Nach der Gleichung (5.) des zweiten Abschnitts dieser Schrift hat man für jedes x:

$$B''(1-x) = -B''(x), \qquad B'(1-x) = B'(x).$$

Geht hier x in $\frac{1}{2}-x$ über, so ergiebt sich

$$B''(\tfrac{1}{2}+x) = -B''(\tfrac{1}{2}-x), \qquad B'(\tfrac{1}{2}+x) = B'(\tfrac{1}{2}-x);$$

woraus für die Function $B''(\frac{1}{2}+x)$ nur ungerade Potenzen von x und für die $B'(\frac{1}{2}+x)$ nur gerade Potenzen von x gefolgert werden; d. h. $B''(\frac{1}{2}+x)$ ist eine ganze rationale Function von x vom $(2m+1)$ten Grade, in welcher die geraden Potenzen von x fehlen, und eben so ist $B'(\frac{1}{2}+x)$ eine ganze rationale Function von x, die keine ungerade Potenzen enthält. Da nun diese Formen zur Beurtheilung der betreffenden Functionen viel geeigneter sind, als die Ausgangs der ersten Nummer vorliegender Mittheilung aufgestellten, so setze ich auch noch deren Angabe her; wobei, wie schon gesagt, die Ergebnisse in (1. und 2.) zur Anwendung kommen werden.

Nach dem *Taylor*schen Satze erhält man, wenn man das unmittelbar vorher Gesagte beachtet:

$$B''(\tfrac{1}{2}+x) = \sum_{r=1}^{r=m+1} B''_{2r-1}(\tfrac{1}{2})\frac{x^{2r-1}}{1.2.3\ldots 2r-1},$$

$$B'(\tfrac{1}{2}+x) = B'(\tfrac{1}{2}) + \sum_{r=1}^{r=m+1} B'_{2r}(\tfrac{1}{2})\frac{x^{2r}}{1.2.3\ldots 2r},$$

wo $B''_{2r-1}(\frac{1}{2})$ der $(2r-1)$te Differentialquotient der Function $B''(x)$ ist, wenn man nach geschehener Differentiation $x=\frac{1}{2}$ setzt, und wo es ein ähnliches Verhalten mit $B'(\frac{1}{2})$ hat.

Zur Herstellung dieser Differentialquotienten, wie auch analoger anderer, eignen sich nun die Ergebnisse in (1. und 2.) besonders gut, wenn man nemlich die Convergenz-Verhältnisse der ohne Ende fortlaufenden Reihen daselbst immer im Auge behält.

Durch successives Differentiiren besagter Ergebnisse nach x gelangt man sehr bald zu:

$$B''_{2r-1}(x) = \frac{2(-1)^{m+r}}{(2\pi)^{2m-2r+2}}\,1.2.3\ldots 2m \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m-2r+2}},$$

$$B'_{2r}(x) = \frac{2(-1)^{m+r}}{(2\pi)^{2m-2r+2}}\,1.2.3\ldots(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^{2m-2r+2}};$$

folglich ergiebt sich, beachtend noch die zweite Gleichheit in (2.):

$$B''_{2r-1}(\tfrac{1}{2}) = \frac{2(-1)^{m+r+1}}{(2\pi)^{2m-2r+2}} 1.2.3\ldots 2m \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2(m-r)+2}},$$

$$B'_{2r}(\tfrac{1}{2}) = \frac{2(-1)^{m+r+1}}{(2\pi)^{2m-2r+2}} 1.2.3\ldots(2m+1) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2(m-r)+2}},$$

$$B'(\tfrac{1}{2}) = \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+2}} 1.2.3\ldots(2m+1) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2} B_{m+1}.$$

Berücksichtigt man die leicht herzustellende Gleichung

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^n} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^n},$$

nebst der in vorhergehender Nummer aufgestellten Gleichung (3.), so hat man für alle ganzen Werthe von $r = 1$ bis $r = m$ die Ausdrücke:

$$B''_{2r-1}(\tfrac{1}{2}) = (-1)^{m+r+1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m-2r+1}}\right) \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(2m-2r+3)} B_{m-r+1},$$

$$B'_{2r}(\tfrac{1}{2}) = (-1)^{m+r+1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m-2r+1}}\right) \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(2m-2r+3)} B_{m-r+1},$$

$$B'(\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}\left(1 - \frac{1}{2^{2m+2}}\right) B_{m+1}.$$

Endlich finden sich aus den Bestimmungsgleichungen der Functionen $B''(r)$, $B'(r)$, wie sie Ausgangs Nr. 1 sich ergaben:

$$B''_{2m+1}(x) = 1.2.3\ldots 2m, \quad B'_{2m+2}(x) = 1.2.3\ldots 2m+1,$$

also

$$B''_{2m+1}(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2m+1), \quad B'_{2m+2}(\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2m+2),$$

folglich erhält man:

$$B''(\tfrac{1}{2}+x)$$

$$= \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \frac{1}{2m-1}\binom{2m}{2}(1-\tfrac{1}{2}) B_1 x^{2m-1} + \frac{1}{2m-3}\binom{2m}{4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right) B_2 x^{2m-3}$$

$$- \frac{1}{2m-5}\binom{2m}{6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right) B_3 x^{2m-5} + \ldots \frac{(-1)^m}{1}\binom{2m}{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right) B_m x,$$

$$B'(\tfrac{1}{2}+x)$$

$$= \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \frac{1}{2m}\binom{2m+1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) B_1 x^{2m} + \frac{1}{2m-2}\binom{2m+1}{4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right) B_2 x^{2m-2}$$

$$- \frac{1}{2m-4}\binom{2m+1}{6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right) B_3 x^{2m-4} + \ldots \frac{(-1)^m}{2}\binom{2m+1}{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right) B_m x^2$$

$$+ \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}\left(1-\frac{1}{2^{2m+2}}\right) B_{m+1};$$

welche Ausdrücke auch folgendermafsen gestellt werden können:

$$(10.)\quad B''(\tfrac{1}{2}+x)$$

$$= \frac{x^{2m+1}}{2m+1} - \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})\binom{2m}{1}B_1 x^{2m-1} + \tfrac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\binom{2m}{3}B_2 x^{2m-3}$$

$$-\tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\binom{2m}{5}B_3 x^{2m-5} + \dots \frac{(-1)^m}{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\binom{2m}{2m-1}B_m x,$$

$$(11.)\quad B'(\tfrac{1}{2}+x)$$

$$= \frac{x^{2m+2}}{2m+2} - \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})\binom{2m+1}{1}B_1 x^{2m} + \tfrac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\binom{2m+1}{3}B_2 x^{2m-2}$$

$$-\tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2^5}\right)\binom{2m+1}{5}B_3 x^{2m-4} + \dots \frac{(-1)^m}{2m}\left(1-\frac{1}{2^{2m-1}}\right)\binom{2m+1}{2m-1}B_m x^2$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(2-\frac{1}{2^{2m+1}}\right)B_{m+1}.$$

Diese Darstellungs-Arten der *Bernoulli*schen Function hatte ich am Eingange dieser Nummer im Auge. Ihre Vorzüge beim Aufsuchen, namentlich der Wurzeln der Gleichungen $B''(x)=0$, $B'(x)=0$, leuchten unmittelbar ein. Ich bemerke noch, dafs vermöge des rationalen Factors $x(x-1)(2x-1)$, den $B''(x)$ mit sich führt, die Function von x, welche $B''(\frac{1}{2}+x)$ ausdrückt, den Factor $\alpha(x^2-\frac{1}{4})$ enthalten wird; und da $B'(x)$ den quadratisch rationalen Factor $x^2(x-1)^2$ enthält, so wird die $B'(\frac{1}{2}+x)$ darstellende Function von x nothwendig den quadratisch rationalen Factor $(x^2-\frac{1}{4})^2$ mit sich führen.

§. 4.

Die Ergebnisse in voriger Nummer stellen sich übrigens nur als Specialitäten heraus, und liefern noch viel allgemeinere Resultate, die ich hier noch mittheile.

Die in der erwähnten Schrift über die *Bernoulli*sche Function im zweiten Abschnitte unter (*B.* und *C.*) aufgestellten Theoreme können auch folgendermafsen ausgedrückt werden:

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} B''\left(\frac{k}{n}+x\right) = \frac{1}{n^{2m}}B''(nx) - B''(x),$$

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} B'\left(\frac{k}{n}+x\right) = \frac{1}{2^{2m+1}}B'(nx) - B'(x) + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right)B_{m+1}.$$

Restituirt man hier $B''(nx)$, $B''(x)$, $B'(nx)$, $B'(x)$ nach den Ausgangs Nr. 1 mitgetheilten Angaben, so erhält man:

$$(10'.) \qquad \sum_{k=1}^{k=n-1} B''\left(\frac{k}{n}+x\right)$$

$$= \frac{n-1}{2m+1}x^{2m+1} - \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{2m}{1}B_1x^{2m-1} + \tfrac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\binom{2m}{3}B_2x^{2m-3}$$

$$-\tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n^5}\right)\binom{2m}{5}B_3x^{2m-5}$$

$$+\cdots\frac{(-1)^{m-1}}{2m-2}\left(1-\frac{1}{n^{2m-3}}\right)\binom{2m}{2m-3}B_{m-1}x^3 + \frac{(-1)^m}{2m}\left(1-\frac{1}{n^{2m-1}}\right)\binom{2m}{2m-1}B_mx,$$

$$(11'.) \qquad \sum_{k=1}^{k=n-1} B'\left(\frac{k}{n}+x\right)$$

$$= \frac{n-1}{2m+2}x^{2m-2} - \tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{2m+1}{1}B_1x^{2m} + \tfrac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n^3}\right)\binom{2m+1}{3}B_2x^{2m-2}$$

$$-\tfrac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n^5}\right)\binom{2m+1}{5}B_3x^{2m-4}$$

$$+\cdots\frac{(-1)^m}{2m}\left(1-\frac{1}{n^{2m-1}}\right)\binom{2m+1}{2m-1}B_mx^2 + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\left(n-\frac{1}{n^{2m+1}}\right)B_{m+1}.$$

In diesen Ergebnissen kann n jeden der Zahlenwerthe 2.3.4.5.6... haben. Wird in denselben $n=2$ gesetzt, so stellen sich die in (10. und 11.) in voriger Nummer gefundenen Resultate dar.

§. 5.

Ich wende mich nun zu dem zweiten Theile dieser Mittheilung, nemlich zur Aufstellung einiger bestimmten Integrale, die mittels der *Bernoulli*schen Function ausgedrückt werden können.

Mit Zuziehung der Gammafunction gelangt man leicht zu folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{1.2.3\ldots 2m}{k^{2m+1}} = \int_0^\infty u^{2m}e^{-ku}\,du, \qquad \frac{1.2.3\ldots(2m+1)}{k^{2m+2}} = \int_0^\infty u^{2m+1}e^{-ku}\,du.$$

Mit Hülfe derselben gehen die Ausdrücke (1. und 2.) in der ersten Nummer in

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-ku}\sin 2k\pi x\right)u^{2m}\,du = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B''(x),$$

$$\int_0^\infty\left(\sum_{k=1}^{k=\infty}e^{-ku}\cos 2k\pi x\right)u^{2m+1}\,du = \tfrac{1}{2}(-1)^m(2\pi)^{2m+2}B'(x) + \tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}B_{m+1}$$

über. Es findet sich aber leicht:

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\sin 2k\pi x = \frac{\sin 2\pi x}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} e^{-ku}\cos 2k\pi x = \frac{\cos 2\pi x - e^{-u}}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x};$$

also hat man folgende zwei Integral-Ausdrücke:

$$(12.)\quad \int_0^\infty \frac{u^{2m}du}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x} = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}\frac{B''(x)}{\sin 2\pi x},$$

$$(13.)\quad \int_0^\infty \frac{(\cos 2\pi x - e^{-u})\,u^{2m+1}du}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x} = \tfrac{1}{2}(-1)^m(2\pi)^{2m+2}B'(x)+\tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}B_{m+1},$$

die in Beziehung auf m und x eben wie die in (1. und 2.) bestehen.

Ersetzt man in diesen Ergebnissen e^{-u} durch u, und behandelt dann das Ergebnifs der zweiten Gleichung nach dem theilweisen Integrations-Verfahren, so gelangt man zu folgenden Integral-Ausdrücken:

$$(14.)\quad \int_0^1 \frac{1}{1-2u\cos 2\pi x+u^2}(\log u)^{2m}du = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}\left\{\frac{B''(x)}{\sin 2\pi x}\right\},$$

$$(15.)\quad \int_0^1 \log(1-2u\cos 2\pi x+u^2)(\log u)^{2m}\frac{du}{u} = \frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+1}\left\{(-1)^{m+1}B'(x)-\frac{B_{m+1}}{2m+2}\right\},$$

welche, wie die vorhergehenden, für alle Werthe von $x=0$ bis $x=1$ gelten; wobei jedoch in der erstern diese Grenzen für $m=0$ auszuschliefsen sind.

Multiplicirt man die Ergebnisse in (12. und 14.) mit dx und integrirt sie von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}$, so findet sich:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}du}{e^u-e^{-u}} = \int_0^1(\log u)^{2m}\frac{du}{1-u^2} = (-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{B''(x)}{\sin 2\pi x}dx.$$

Beachtet man die Gleichung (22.) im dritten Abschnitte der Schrift über die *Jacob Bernoulli*sche Function, so ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$(16.)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m+1}} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2m}\cdot\frac{2^{2m+1}}{2^{2m+1}-1}\int_0^1(\log u)^{2m}\frac{du}{1-u^2},$$

$$(17.)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^{2m+1}} = \frac{1}{1.2.3\ldots 2m}\cdot\frac{2^{2m+1}}{2^{2m+1}-1}\int_0^\infty\frac{u^{2m}du}{e^u-e^{-u}},$$

wo m jede reelle, ganze und positive Zahl sein kann.

Ich bemerke noch, dafs man aus (12. und 14.) leicht auch folgende Ausdrücke findet:

$$(18.)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^{2m}du}{e^u+e^{-u}-2\cos 2\pi x} = (-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}\frac{B''(x)}{\sin 2\pi x},$$

$$(19.)\quad \int_0^\infty \frac{1}{1-2u\cos 2\pi x+u^2}(\log u)^{2m}du = (-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}\frac{B''(x)}{\sin 2\pi x},$$

die bei jedem reellen, ganzen und positiven Werthe von m für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$ bestehen; für $m = 0$ sind die Grenzwerthe von x auszuschliefsen.

Die Ergebnisse in (16. und 17.), die eigentlich nur gegenseitige Folgen sind, geben noch einige beachtenswerthe Integrale, welche wir noch mit Zuziehung blofs von (16.) mittheilen.

Durch Zerlegen in Partialbrüche erhält man:

$$\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u^2} du = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u} du + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u} du;$$

Das erste der bestimmten Integrale rechts geht, wenn die Integrationsvariable u durch u^2 ersetzt wird, in

$$2^{2m+1}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u^2} u\, du$$

über, und wenn hier der Bruch $\frac{u}{1-u^2}$ in Partialbrüche zerfället wird, geht dasselbe Integral in

$$2^{2m}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u} du - 2^{2m}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u} du$$

über, woraus sich zunächst folgende Integralgleichung ergiebt:

$$(2^{2m}-1)\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u} du = 2^{2m}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u} du.$$

Es geht daher die vorhin durch Zerlegung gefundene Gleichung in die eine oder andere der folgenden zwei Gleichungen über:

$$(20.)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u} du = \frac{2^{2m+1}}{2^{2m+1}-1}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u^2} du, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u} du = \frac{2^{2m+1}-2}{2^{2m+1}-1}\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u^2} du. \end{cases}$$

Zieht man noch die obige Gleichung (16.) zu, so erhält man:

$$(21.)\quad \int_0^2 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u} du = 1.2.3.4\ldots 2m \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}},$$

$$(22.)\quad \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u} du = 1.2.3.4\ldots 2m \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2m+1}},$$

in welchen Gleichungen m jede reelle ganze und positive Zahl sein darf.

§. 6.

Noch ein Paar bestimmte Integrale finden sich aus vorliegender Nummer; gleichfalls mit Zuziehung der *Bernoulli*schen Function.

Durch Zerlegung in Partialbrüche erhält man:

$$\frac{x^{r-1}}{1-x^{2p}} = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^{r-1}}{1+x}\right)+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\cos k(r-1)\alpha - x\cos kr\alpha}{1-2x\cos k\alpha + x^2},$$

$$\frac{x^{r-1}}{1+x^{2p}} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\cos(2k-1)(r-1).\frac{1}{2}\alpha - x\cos(2k-1)r.\frac{1}{2}\alpha}{1-2x\cos(2k-1).\frac{1}{2}\alpha + x^2},$$

wo $\alpha = \frac{\pi}{p}$ gesetzt ist und wo r und p ganze positive Zahlen sind, die der Ungleichheit $r < 2p+1$ genügen.

Wird hier noch r durch $2p-r$ ersetzt und erwägt man die Bedeutung von α, so hat man auch:

$$\frac{x^{2p-r-1}}{1-x^{2p}} = \frac{1}{2p}.\left(\frac{1}{1-x}+\frac{(-1)^{r+1}}{1+x}\right)+\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\cos k(r+1)\alpha - x\cos kr\alpha}{1-2x\cos k\alpha + x^2},$$

$$\frac{x^{2p-r-1}}{1+x^{2p}} = \frac{-1}{p}.\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\cos(2k-1)(r+1).\frac{1}{2}\alpha - x\cos(2k-1)r.\frac{1}{2}\alpha}{1-2x\cos(2k-1).\frac{1}{2}\alpha + x^2};$$

wo nunmehr $r+1 <$ oder höchstens $= 2p$ sein kann. Subtrahirt man die erste dieser Gleichheiten von der ersten der beiden vorhergehenden und addirt die zweite zur zweiten, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\frac{x^{r-1}-x^{2p-r-1}}{1-x^{2p}} = \frac{1}{p}.\sum_{k=1}^{k=p-1}\frac{\cos k(r-1)\alpha - \cos k(r+1)\alpha}{1-2x\cos k\alpha + x^2},$$

$$\frac{x^{r-1}+x^{2p-r-1}}{1+x^{2p}} = \frac{1}{p}.\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\cos(2k-1)(r-1).\frac{1}{2}\alpha - \cos(2k-1)(r+1).\frac{1}{2}\alpha}{1-2x\cos(2k-1).\frac{1}{2}\alpha + x^2},$$

oder auch folgende:

$$(23.)\quad \begin{cases} \dfrac{x^{r-1}-x^{2p-r-1}}{1-x^{2p}} = \dfrac{2}{p}.\displaystyle\sum_{r=1}^{r=p-1}\frac{\sin kr\alpha \sin k\alpha}{1-2x\cos k\alpha + x^2}, \\ \dfrac{x^{r-1}+x^{2p-r-1}}{1+x^{2p}} = \dfrac{2}{p}.\displaystyle\sum_{k=1}^{k=p}\frac{\sin(2k-1)r.\frac{1}{2}\alpha \sin(2k-1).\frac{1}{2}\alpha}{1-2x\cos(2k-1).\frac{1}{2}\alpha + x^2}, \end{cases}$$

wo die ganzen positiven Zahlen r und p der Ungleichheit $r < 2p$ genügen und wo $\alpha = \frac{\pi}{p}$ ist.

Wird nun in diesen Gleichheiten x durch u ersetzt, multiplicirt man hierauf dieselben mit $(\log u)^{2m}du$ und integrirt beiderseits von $u = 0$ bis $u = 1$, so gelangt man, mit Zuziehung des Integral-Ausdrucks in der Gleichung (14.), wenn daselbst x erst durch $\frac{k\alpha}{2\pi} = \frac{k}{2p}$ und dann durch $\frac{(2k-1)\alpha}{4\pi} = \frac{2k-1}{4p}$ ersetzt wird, auf die zwei folgenden Integral-Ausdrücke:

$$\int_0^1 \frac{u^{r-1}-u^{2p-r-1}}{1-u^{2p}}(\log u)^{2m}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{p}(2\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p-1} B''\left(\frac{k}{2p}\right)\sin k\frac{r\pi}{p},$$

$$\int_0^1 \frac{u^{r-1}+u^{2p-r-1}}{1+u^{2p}}(\log u)^{2m}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{p}(2\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p} B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right)\sin(2k-1)\frac{r\pi}{2p}.$$

In der ersten dieser Gleichungen kann die Summe rechts noch von $k=1$ bis $k=p$ ausgedehnt werden. Thut man dies und ersetzt die Integrations-Variable u in beiden Gleichungen durch $u^{\frac{1}{2}}$, so ergiebt sich auch:

$$(24.)\quad \begin{cases} \int_0^1 \frac{1-u^{p-r}}{1-u^p}(\log u)^{2m}u^{\frac{1}{2}r-1}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{p}(u\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p} B''\left(\frac{k}{2p}\right)\sin k\frac{r\pi}{p}, \\ \int_0^1 \frac{1+u^{p-r}}{1+u^p}(\log u)^{2m}u^{\frac{1}{2}r-1}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{p}(u\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p} B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right)\sin(2k-1)\frac{r\pi}{2p}, \end{cases}$$

wo m, p, r ganze positive Zahlen sind, von denen die zwei letztern der Ungleichheit $r<2p$ zu genügen haben.

Hieraus finden sich, mit Zuziehung der Eigenschaften der Function $B''(x)$, folgende beachtenswerthe Specialisirungen:

$$(25.)\quad \begin{cases} \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u^2}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{2}(2\pi)^{2m+1}B''(\tfrac{1}{4}), \\ \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u+u^2}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{3}}(2\pi)^{2m+1}B''(\tfrac{1}{3}), \\ \int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1-u+u^2}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{3}}(2\pi)^{2m+1}B''(\tfrac{1}{6}), \end{cases}$$

in welchen m irgend eine ganze positive Zahl bedeutet. Auch ergiebt sich noch folgende:

$$(26.)\quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{(\log u)^{2m}}{1+u^2}\,du = (-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B'(\tfrac{1}{4}), \\ \int_0^\infty \frac{(\log u)^{2m}}{1+u+u^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B'(\tfrac{1}{3}), \\ \int_0^\infty \frac{(\log u)^{2m}}{1-u+u^2}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B'(\tfrac{1}{6}), \end{cases}$$

wo m dieselbe, unmittelbar vorher erwähnte Bedeutung hat.

Endlich findet sich aus dem zweiten Ausdrucke:

$$(27.)\quad \int_0^1 \frac{u^{\frac{1}{2}p-1}}{1+u^p}(\log u)^{2m}\,du = \frac{(-1)^{m+1}}{2p}(4\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right),$$

und hieraus:

$$(28.)\quad \int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{2}p-1}}{1+u^p}(\log u)^{2m}\,du = \frac{(-1)^{m+2}}{p}(4\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right);$$

wo in beiden Ausdrücken m und p alle ganzen und positiven Zahlen sein können.

Die Gleichungen (24.) sind auch unter folgenden andern zu bemerkenden Formen darstellbar.

Geht in denselben die Integrations-Variable u in $u^{\frac{2}{p}}$ über, so erhält man unmittelbar:

$$\int_0^1 \frac{u^{\frac{r}{p}-1}-u^{1-\frac{r}{p}}}{1-u^2}(\log u)^{2m}du = \frac{(-1)^{m+1}}{p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p} B''\left(\frac{k}{2p}\right)\sin k\frac{r\pi}{p},$$

$$\int_0^1 \frac{u^{\frac{r}{p}-1}+u^{1-\frac{r}{p}}}{1+u^2}(\log u)^{2m}du = \frac{(-1)^{m+1}}{p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p} B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right)\sin(2k-1)\frac{r\pi}{2p}.$$

Ersetzt man $1-\frac{r}{p}$ durch a, so kann, weil $r>0$ und $<2p$, die Gröfse a alle rationalen gebrochenen Zahlenwerthe haben, die innerhalb -1 und $+1$ liegen, und man hat die Integrale

$$(29.)\quad\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-a}-u^{+a}}{1-u^2}(\log u)^{2m}du \\ \displaystyle= \frac{(-1)^{m+1}}{p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{k}{2p}\right)\sin ka\pi, \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{-a}+u^{+a}}{1+u^2}(\log u)^{2m}du \\ \displaystyle= \frac{(-1)^{m+1}}{p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right)\cos(2k-1)\tfrac{1}{2}(a\pi), \end{cases}$$

wo a eine positive oder negative, echtgebrochene rationale Zahl ist, deren Nenner die ganze positive Zahl p vorstellt.

Nimmt man in der zweiten $a=0$ an, so ergiebt sich

$$\int_0^1 \frac{(\log u)^{2m}}{1+u^2}du = \frac{(-1)^{m+1}}{2p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right).$$

Hier kann p jede ganze positive Zahl sein. Wenn daher dieses Ergebnifs mit dem ersteren. in (26.) aufgestellten, verglichen wird, so ergiebt sich die Summation:

$$(30.)\quad \sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right) = \frac{1}{p^{2m}}B''(\tfrac{1}{4}).$$

Aus den Integral-Ausdrücken (29.) zieht man endlich auch folgende:

$$(31.)\begin{cases} \int_0^\infty \frac{u^{-a}-u^a}{1-u^2}(\log u)^{2m}\,du \\ = \frac{2(-1)^{m+1}}{p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{k}{2p}\right)\sin ka\pi, \\ \int_0^\infty \frac{u^{-a}+u^a}{1+u^2}(\log u)^{2m}\,du \\ = \frac{2(-1)^{m+1}}{p}(2p\pi)^{2m+1}\sum_{k=1}^{k=p}(-1)^{k-1}B''\left(\frac{2k-1}{4p}\right)\cos(2k-1).\tfrac{1}{2}(a\pi), \end{cases}$$

wo a und p dieselbe Bedeutung wie in (29.) haben.

§. 7.

Die hier, wie in meiner erwähnten Schrift über die *Bernoulli*sche Function, gewonnenen Ergebnisse, eignen sich, wie folgt. sehr gut zur Aufstellung der Reihen für $\tang x$ und $\sec x$.

Diese Reihen werden nemlich am schnellsten gefunden, wenn man die Functionen $\tang x$ und $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ durch bestimmte Integrale darstellt; wozu sich die Ergebnisse (18.) in Nr. 143. meiner Integralrechnung sehr gut eignen.

Danach ist:

$$\tang x = \int_0^\infty \frac{e^{xu}-e^{-xu}}{e^{\alpha u}-e^{-\alpha u}}\,du, \quad \sec x = \int_0^\infty \frac{e^{xu}+e^{-xu}}{e^{\alpha u}+e^{-\alpha u}}\,du,$$

wo x numerisch kleiner als α und $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist.

Deutet man irgend einen, z. B die $r$ten Differentialquotienten von $\tang x$ und $\sec x$ nach x, durch $(\tang x)_r$ und $(\sec x)_r$ an, so findet sich:

$$(\tang x)_{2m} = \int_0^\infty \frac{e^{xu}-e^{-xu}}{e^{\alpha u}-e^{-\alpha u}}u^{2m}\,du, \quad (\tang x)_{2m+1} = \int_0^\infty \frac{e^{xu}+e^{-xu}}{e^{\alpha u}-e^{-\alpha u}}u^{2m+1}\,du;$$

$$(\sec x)_{2m} = \int_0^\infty \frac{e^{xu}+e^{-xu}}{e^{\alpha u}+e^{-\alpha u}}u^{2m}\,du, \quad (\sec x)_{2m+1} = \int_0^\infty \frac{e^{xu}-e^{-xu}}{e^{\alpha u}+e^{-\alpha u}}u^{2m+1}\,du.$$

Deutet man ferner die Werthe dieser Functionen für $x = 0$ dadurch an, dafs man denselben oben eine in Parenthesen enthaltene Null beifügt, so hat man:

$$\tang x^{(0)} = 0, \quad (\tang x)_{2m}^{(0)} = 0, \quad (\tang x)_{2m+1}^{(0)} = 2\int_0^\infty \frac{u^{2m+1}}{e^{\alpha u}-e^{-\alpha u}}\,du,$$

$$\sec x^{(0)} = 2\int_0^\infty \frac{du}{e^{\alpha u}+e^{-\alpha u}}, \quad (\sec x)_{2m}^{(0)} = 2\int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^{\alpha u}+e^{-\alpha u}}\,du, \quad (\sec x)_{2m+1}^{(0)} = 0.$$

Wird die *Maclaurin*sche Reihe bei der Entwickelung der hier in Rede stehenden Functionen angewendet, so ist zunächst die Ermittelung der zuletzt aufgeführten bestimmten Integrale nöthig, die wie folgt geschieht.

a) Wird in der Gleichung (12.) in zweitvorhergehender Nummer $x=\frac{1}{4}$ gesetzt, so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^u+e^{-u}}\,du = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+1}B''(\tfrac{1}{4}),$$

woraus leicht

$$(32.)\quad \int_0^\infty \frac{u^{2m}}{e^{au}+e^{-au}}\,du = \tfrac{1}{2}(-1)^{m+1}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{2m+1}B''(\tfrac{1}{4})$$

für jedes reelle positive a folgt.

Setzt man hier $2m=0$, so gelangt man, zuerst mit Hülfe der Begriffsgleichung (10.) in Nr. 3, zu

$$B''(\tfrac{1}{2}+x) = x;$$

und hieraus, bei derselben Verfügung über $2m$, zu

$$B''(\tfrac{1}{4}) = -\tfrac{1}{4};$$

folglich ergiebt sich (32.) für $2m=0$:

$$(33.)\quad \int_0^\infty \frac{du}{e^{au}+e^{-au}} = \frac{\pi}{4a},$$

wo a dieselbe Bedeutung wie in (32.) hat.

Wird nun hier, wie in (32.), $a=\alpha=\frac{1}{2}\pi$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$(\alpha.)\quad \sec x^{(0)} = 1,\quad (\sec x)_{2m}^{(0)} = (-1)^{m+1}2^{4m+2}B''(\tfrac{1}{4}),\quad (\sec x)_{2m+1}^{(0)} = 0,$$

wo m jede ganze positive Zahl und auch Null sein kann.

b) Wird ferner in der Gleichung (13.) zuerst $x=0$ und hierauf $x=\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man, mit Rücksicht auf $B'(0)=0$, folgende zwei Integrale:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{e^{\frac{1}{2}u}-e^{-\frac{1}{2}u}}u^{2m+1}\,du = \tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}B_{m+1},$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{2}u}}{e^{\frac{1}{2}u}+e^{-\frac{1}{2}u}}u^{2m+1}\,du = -\tfrac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m+2}}{2m+2}B_{m+1}+\tfrac{1}{2}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+2}B'(\tfrac{1}{4}),$$

welche, addirt, Folgendes geben:

$$\int_0^\infty \frac{u^{2m+1}}{e^u-e^{-u}}\,du = \tfrac{1}{4}(-1)^{m+1}(2\pi)^{2m+2}B'(\tfrac{1}{4}),$$

oder allgemeiner:

$$(34.)\quad \int_0^\infty \frac{u^{2m+1}}{e^{au}-e^{-au}}\,du = \tfrac{1}{4}(-1)^{m+1}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^{2m+2}B'(\tfrac{1}{4});$$

wo a jede reelle und positive Zahl sein kann.

Nimmt man auch hier $a=\alpha=\frac{1}{2}\pi$ an, so erhält man, mit Beachtung der weiter oben zusammengestellten Ergebnisse:

$$(\beta.)\quad \tan x^{(0)} = 0,\quad (\tan x)_{2m+1}^{(0)} = (-1)^{m+1}2^{4m+3}B'(\tfrac{1}{4}),\quad (\tan x)_{2m}^{(0)} = 0.$$

Es ist noch die nähere Bestimmung von $B'(\frac{1}{2})$ und $B''(\frac{1}{4})$ nöthig; wozu sowohl die Gleichungen (1. und 2.) als die (10. und 11.) dienen können.

c) Die Gleichungen (2. und 11.) geben:

$$B'(\tfrac{1}{2}) = \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+2}} 1.2.3\ldots(2m+1)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{2m+2}} + \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}B_{m+1},$$

$$B'(\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^{m+1}}{2m+2}\cdot\frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+1}}B_m,$$

woraus, wenn m in $m-1$ übergeht, die Summation

$$(35.)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^{2m}} = \frac{\pi^{2m}}{1.2.3\ldots 2m}(2^{2m-1}-1)B_m,$$

so wie, vermöge der Gleichungen in $(\beta.)$, der in Rede stehende Ausdruck

$$(\beta'.)\qquad (\operatorname{tang} x)^{(0)}_{2m-1} = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}B_m$$

hervorgeht, wo B_m die $m$te *Bernoulli*sche Zahl ist.

Setzt man der Einfachheit wegen die Gleichung

$$(36.)\qquad T_m = \frac{2^{2m}(2^{2m}-1)}{2m}B_m,$$

so drückt T_m den $m$ten Tangentencoëfficienten aus, d. h. man hat:

$$(37.)\qquad \operatorname{tang} x = T_1 x + T_2\frac{x^3}{1.2.3} + T_3\frac{x^5}{1.2.3.4.5} + T_4\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \cdots;$$

welcher Ausdruck für alle reelle Werthe von x gilt, die numerisch $\frac{1}{2}\pi$ nicht übertreffen.

d) Die Gleichungen (1. und 10.) geben folgende Ausdrücke:

$$B''(\tfrac{1}{4}) = \frac{2(-1)^{m+1}}{(2\pi)^{2m+1}} 1.2.3.4\ldots 2m\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}},$$

$$2^{4m+2}B''(\tfrac{1}{4}) = -\frac{1}{2m+1} + \frac{2^2(2^2-2)}{2}\binom{2m}{1}B_1 - \frac{2^4(2^4-2)}{4}\binom{2m}{3}B_2$$
$$+\frac{2^6(2^6-2)}{6}\binom{2m}{5}B_3 - \cdots (-1)^{m+1}\frac{2^{2m}(2^{2m}-2)}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m.$$

Nach Einführung der Tangentencoëfficienten der Gleichung (36.) geht letztere in

$$2^{4m+2}B''(\tfrac{1}{4}) = -\frac{1}{2m+1} - \frac{2^2}{2}\binom{2m}{1}B_1 + \frac{2^4}{4}\binom{2m}{3}B_2 - \cdots (-1)^m\frac{2^{2m}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m$$
$$+\binom{2m}{1}T_1 - \binom{2m}{3}T_2 + \binom{2m}{5}T_3 - \cdots (-1)^{m+1}\binom{2m}{2m-1}T_m$$

über. Man hat ferner nach der Ausgangs Nr. 1 aufgestellten Begriffsgleichung

der Function $B''(x)$:

$$2^{2m+1}B''(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2m+1} - 1 + \frac{2^2}{2}\binom{2m}{1}B_1 - \frac{2^4}{4}\binom{2m}{3}B_2 + \cdots (-1)^{m+1}\frac{2^{2m}}{2m}\binom{2m}{2m-1}B_m,$$

und da überdies noch $B''(\tfrac{1}{2}) = 0$ ist, so ergiebt sich:

$$2^{4m+2}B''(\tfrac{1}{4}) = -1 + \binom{2m}{1}T_1 - \binom{2m}{3}T_2 + \binom{2m}{5}T_3 - \cdots (-1)^{m+1}\binom{2m}{2m-1}T_m.$$

Stellt man nun die Gleichung

$$(38.)\quad E_m = (-1)^m\left\{1 - \binom{2m}{1}T_1 + \binom{2m}{3}T_2 - \binom{2m}{5}T_3 + \cdots (-1)^m\binom{2m}{2m-1}T_m\right\}$$

auf, so ist E_m der zuerst von *Euler* in die Analysis eingeführte allgemeine Secantencoëfficient, von welchem $E_0 = 1$ ist. Dies vorausgesetzt, ergiebt sich erstens die Summation:

$$(35'.)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2m+1}} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(\tfrac{1}{2}\pi)^{2m+1}}{1.2.3.4\ldots 2m}E_m;$$

zweitens, der letztern Gleichung in (α.) gemäfs:

$$(\alpha'.)\quad (\sec x)_{2m}^{(0)} = E_m,$$

wo, gleichwie B_m die $m$te *Bernoullische* Zahl heifst, E_m die $m$te *Eulersche* Zahl genannt werden kann. Endlich hat man nunmehr

$$(39.)\quad \sec x = 1 + E_1\frac{x^2}{1.2} + E_2\frac{x^4}{1.2.3.4} + E_3\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \cdots,$$

welcher Ausdruck, wie die Tangenten-Entwickelung, für alle Werthe von x gilt, die nicht $\tfrac{1}{2}\pi$ numerisch übertreffen.

8.

Die Gleichung (38.) drückt den $m$ten Secantencoëfficienten durch die m ersten Tangentencoëfficienten, oder die $m$te *Euler*sche durch die m ersten *Bernoulli*schen Zahlen aus. Es ist aber auch das umgekehrte Problem schon längst gelöset. Die von *Scherk* in seiner geistreichen Abhandlung: „Von den Coëfficienten der Secantenreihe etc." zu gleichem Zwecke benutzte Relation

$$\tang x = \cos x \frac{d\sec x}{dx}$$

eignet sich dazu besonders gut. Man gelangt nämlich mittels dieser Gleichheit zu folgender Lösung des gedachten umgekehrten Problems:

$$(38'.)\quad T_m = (-1)^{m-1}\left\{\binom{2m-1}{1}E_1 - \binom{2m-1}{3}E_2 + \binom{2m-1}{5}E_3 - \cdots (-1)^{m-1}\binom{2m-1}{2m-1}E_m\right\},$$

wo m, hier wie in (38.), jede ganze positive Zahl sein kann.

Ein diesem analoger Ausdruck wird mittels der Gleichung

$$\operatorname{tang} x = \sin x \sec x$$

gefunden, die sich leicht in folgender Form ergiebt:

$$(38''.)\qquad T_m = (-1)^{m-1}\Big\{1-\binom{2m-1}{2}E_1+\binom{2m-1}{4}E_2-\binom{2m-1}{6}E_3 + \cdots (-1)^{m-1}\binom{2m-1}{2m-2}E_{m-1}\Big\};$$

was gleichfalls für alle ganze und positive Werthe von m gilt, wenn man $T_1 = 1$ setzt.

Eliminirt man aus Diesem und dem Vorhergehenden T_m, so ergiebt sich folgende Relation für die *Euler*schen Zahlen:

$$(40.)\quad E_m-\binom{2m}{2}E_{m-1}+\binom{2m}{4}E_{m-2}-\cdots(-1)^{m-1}\binom{2m}{2m-2}E_1+(-1)^m\binom{2m}{2m}=0,$$

aus welcher leicht zu sehen, dafs die allgemeine unter diesen Zahlen, oder E_m eine ganze Zahl ist.

Hieraus geht nun zunächst, sowohl aus (38'.) wie aus (38''.) hervor, dafs der allgemeine Tangentencoëfficient T_m ebenfalls eine ganze Zahl ist; und wenn der Zusammenhang desselben mit der allgemeinen *Bernoulli*schen Zahl, wie (36.) sie darstellt, in Betracht gezogen wird, so ergiebt sich der beachtenswerthe Umstand, dafs die gebrochene Zahl, welche B_m ist, lediglich Factoren von $2^{2m-1}(2^{2m}-1)$ im Nenner haben kann.

Zürich im Februar 1851.

37.

Note sur la théorie des Hyperdéterminants.

(Par M. *A. Cayley* à Londres.)

Dans la théorie dont il s'agit, je suis parvenu à un théorème qui pourra, à ce qu'il me parait, conduire à des développements intéressants.

Je ne considère ici que le cas d'une fonction homogène à *deux variables,* et en me servant des nouveaux termes de M. *Sylvester,* je nomme „*Covariant*" d'une fonction donnée, toute fonction qui ne change pas de forme en fesant subir aux variables des transformations linéaires quelconques, et „*Invariant*" toute fonction des seuls coefficients qui a la propriété mentionnée.

Cela posé, soit U une fonction donnée quelconque, du degré n par rapport aux variables, et, comme à l'ordinaire, contenant des coefficients arbitraires a, b, c etc. Soit Q un *covariant* quelconque (y compris le cas particulier où Q est un *invariant*) de la fonction U, s le degré de Q par rapport aux variables, r le degré de cette même fonction Q par rapport aux coefficients. En supposant que la fonction U ait un facteur θ^ν (où $\theta = lx + my$ est une fonction linéaire des variables), ou autrement dit, en supposant l'équation $U = \theta^\nu . V$, je dis que le *covariant* Q contiendra ce même facteur θ élevé à la puissance $r\nu - \frac{1}{2}(rn - s)$.

En effet, en se rappelant la méthode dont je me suis servi dans la seconde partie de mon mémoire sur les Hyperdéterminants (Tome 30 de ce journal) (je suppose que le lecteur ait ce mémoire sous les yeux), on verra que cette fonction Q, supposée, comme plus haut, du degré r par rapport aux coefficients, sera nécessairement de la forme

$$Q = \overline{12}^\alpha\, \overline{13}^\beta\, \overline{23}^\gamma \ldots U_1 U_2 \ldots U_r,$$

puisque les coëfficients n'entrent dans Q que par les fonctions U_1, U_2 etc. Or Q étant du degré s par rapport aux variables, on obtient $s = rn - 2(\alpha + \beta + \gamma)$, c'est à dire:

$$\alpha + \beta + \gamma \ldots = \tfrac{1}{2}(rn - s).$$

Cela posé, puisque $U = \theta^\nu . V$, on aura de même $U_1 = \theta_1^\nu V_1$, $U_2 = \theta_2^\nu . V_2$ etc. Les expressions $\overline{12}$ etc. qui entrent dans l'éxpression de Q

contiennent ∂_{x_1}, ∂_{y_1} etc.: symboles qui doivent être remplacés par $\partial_{x_1}+l\partial_{\theta_1}$, $\partial_{y_1}+m\partial_{\theta_1}$ etc. en supposant (comme il est permis) que les nouveaux symboles ∂_{x_1}, ∂_{y_1} etc. ne se rapportent plus à $\theta_1^\nu.V_1$ etc., mais seulement à V_1 etc. Cela donne

$$\overline{12} = \overline{\partial_{x_1}+l\partial_{\theta_1}}\,\overline{\partial_{y_2}+m\partial_{\theta_2}} - \overline{\partial_{x_2}+l\partial_{\theta_2}}\,\overline{\partial_{y_1}+m\partial_{\theta_1}}$$
$$= \partial_{x_1}\partial_{y_2} - \partial_{x_2}\partial_{y_1} + \overline{l\partial_{y_2}-m\partial_{x_2}}\,\partial_{\theta_1} - \overline{l\partial_{y_1}-m\partial_{x_1}}\,\partial_{\theta_2};$$

c'est à dire: $\overline{12}$ est une fonction linéaire par rapport à ∂_{θ_1}, ∂_{θ_2} et il en sera de même pour les expressions analogues $\overline{13}$, $\overline{23}$ etc.: donc le nombre des différentiations par rapport aux quantités θ_1, θ_2 etc., prises ensemble, ne surpasse pas $\alpha+\beta+\gamma\ldots$ ou $\frac{1}{2}(rn-s)$. Or l'expression à différentier contient le facteur $\theta_1^\nu\theta_2^\nu\ldots\theta_r^\nu$, donc, en remettant, après les différentiations, θ au lieu de θ_1, θ_2, $\ldots\theta_r$, la fonction Q contiendra le facteur θ élévé à la puissance $r\nu-\frac{1}{2}(rn-s)$.

Tout cela suppose implicitement que l'on ait $r\nu-\frac{1}{2}(rn-s) \gtreqless s$. Or le même raisonnement, modifié très peu, fait voir aussi que pour

$$r\nu-\tfrac{1}{2}(nr-s) > s,$$

ou plus simplement pour

$$r(\nu-\tfrac{1}{2}n) > \tfrac{1}{2}s,$$

la fonction Q doit s'évanouir d'elle même, savoir en établissant entre les coefficients de U les relations qui expriment l'existence du facteur θ^ν. Delà on tire le théorème suivant:

> Étant donnée une fonction U du degré n, tout *covariant* du degré r par rapport aux coefficients et du degré s par rapport aux variables, s'évanouit en supposant que la fonction U ait un facteur θ pour lequel $r(\nu-\frac{1}{2}n) > \frac{1}{2}s$;

et en particulier:

> Un *invariant* quelconque de la fonction U s'évanouit en supposant que la fonction U ait un facteur θ^ν, pour lequel $\nu > \frac{1}{2}n$.

En mettant $n=2m$ ou $2m+1$, l'*invariant* s'évanouit en supposant que U ait le facteur θ^{m+1}.

Les conditions pour que la fonction U ait un tel facteur, se trouvent en égalant à zéro les coefficients différentiels de U du $m^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux variables x, y, et en éliminant ces variables.

Mais avant d'aller plus loin il convient d'entrer dans quelques détails de la théorie d'une telle élimination. Je prends l'exemple le plus simple, et

je suppose que l'on ait à éliminer x, y des équations

$$ax + by = 0,$$
$$bx + cy = 0,$$
$$cx + dy = 0.$$

On est habitué à dire que ce système équivaut à *deux équations* entre les seuls coefficients: mais cela n'est juste que dans un sens qui manque de precision. Le système équivaut plutôt à *deux relations* entre les coefficients, et ces deux relations sont exprimées par les *trois équations* $bd - c^2 = 0$, $bc - ad = 0$, $ac - b^2 = 0$. Il n'est pas vrai que deux de ces équations embrassent *nécessairement* la troisième. En effet, la première et à la seconde équations est satisfaite en écrivant $c = 0$, $d = 0$, mais ces valeurs sont absolument étrangères à la question, et ne satisfont pas à la troisième équation, de manière que toutes les trois équations sont nécessaires pour exprimer les relations entres les coefficients. C'est pourquoi je dis que ces trois équations sont des résultats *distincts* de l'élimination. Et de même, pour un système quelconque d'équations, le nombre des résultats distincts de l'élimination n'est pas généralement à beaucoup près si faible que le nombre des relations entre les coefficients. Qu'on veuille consulter sur ce sujet mon mémoire „On the order of certain systems of algebraical equations." Camb. et Dubl. Math. Journal t. IV. p. 132, et le mémoire de M. *Salmon* „On the Classification of curves of double curvature" t. V. p. 23.

Je reviens à l'objet de cette note, et je suppose qu'en égalant à zéro les coefficients différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre de la fonction U, les équations $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc. forment le système entier des résultats distincts de l'élimination. Un *invariant* quelconque I s'évanouira en supposant $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc. Il doit donc exister une équation telle que $\lambda I = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \cdots$, λ, α, β, γ ... étant des fonctions rationnelles et intégrales des coefficients. Mais de plus, la fonction λ doit être purement numérique, ou ce qui est le même, doit se réduire à *l'unité*, car autrement $I = 0$ serait un résultat de l'élimination différent des résultats $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc., et ces équations ne seraient plus le système entier des résultats distincts. Donc enfin: un *invariant* quelconque I sera exprimé par une équation telle que

$$I = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \cdots,$$

α, β, γ ... étant des fonctions intégrales et rationnelles des coefficients.

Les résultats que je viens d'obtenir s'accordent parfaitement avec ceux dans ma „Note sur les hyperdéterminants" tome 34 p. 148. En effet, j'y ai

fait voir qu'en supposant qu'une fonction $ax^4+4bx^3y+6cx^2y^2+4dxy^3+ey^4$ ait un facteur $(\alpha x+\beta y)^3$, l'élimination des variables des équations

$$\begin{aligned} ax^2+2bxy+cy^2 &= 0\\ bx^2+2cxy+dy^2 &= 0\\ cx^2+2dxy+ey^2 &= 0 \end{aligned}$$

donne lieu aux équations $ae-4bd+3c^2=0$, $ace+2bcd-ad^2-b^2e-c^3=0$; et les fonctions égalées à zéro, sont en effet les seuls *invariants* de la fonction du quatrième ordre. J'ajoute que la théorie actuelle fait voir aussi que dans le cas dont il s'agit, la dérivée

$$(ax^2+2bxy+cy^2)(cx^2+2dxy+ey^2)-(bx^2+2cxy+ey^2)^2$$

ou son développement

$$(ac-b^2)x^4+2(ad-bc)x^3y+(ae+2bd-3c^2)x^2y^2+2(be-cd)xy^3+(ce-d^2)y^4$$

se réduit (à un coefficient constant près) à $(\alpha x+\beta y)^4$, et au cas ou la fonction donnée du quatrième ordre est supposée être un carré, cette fonction et la dérivée qui vient d'être écrite, sont égales, à un coefficient constant près: resultat dont je me suis servi ailleurs.

Londres. Lincolns-Inn 21ième Nov. 1851.

38.

Mémoire sur les points singuliers d'une courbe à double courbure.

(Par Mr. *William Spottiswoode*, de l'université d'Oxford.)

Soient données les équations d'une courbe

$$(1.)\quad F=0,\quad G=0,\quad H=0,$$

où F et G sont des fonctions quelconques homogènes des variables x, y, z, t; H étant une fonction linéaire des mêmes variables, avec un terme constant.

En écrivant

$$(2.)\quad \begin{cases} \frac{dF}{dx}=U,\quad \frac{dF}{dy}=V,\quad \frac{dF}{dz}=W,\quad \frac{dF}{dt}=T,\\ \frac{dU}{dx}=u,\quad \frac{dV}{dy}=v,\quad \frac{dW}{dz}=w,\quad \frac{dT}{dt}=s,\\ \frac{dV}{dz}=\frac{dW}{dy}=u',\quad \frac{dW}{dx}=\frac{dU}{dz}=v',\quad \frac{dU}{dy}=\frac{dV}{dx}=w',\\ \frac{dU}{dt}=\frac{dT}{dx}=p,\quad \frac{dV}{dt}=\frac{dT}{dy}=q,\quad \frac{dW}{dt}=\frac{dT}{dz}=r, \end{cases}$$

puis

$$U,\quad V,\quad W,\quad T,$$
$$u_1,\ v_1,\ w_1,\ u'_1,\ v'_1,\ w'_1,\ p_1,\ q_1,\ r_1,\ s_1,$$

pour les mêmes coefficients différentiels de G; et

$$(3.)\quad \frac{dH}{dx}=\alpha,\quad \frac{dH}{dy}=\beta,\quad \frac{dH}{dz}=\gamma,\quad \frac{dH}{dt}=\varepsilon,$$

et, de plus,

$$(4.)\quad \Omega=\begin{vmatrix} a & b & c & e\\ \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon\\ U & V & W & T\\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 \end{vmatrix}$$

(où a, b, c, e sont des quantités quelconques): les équations d'une *tangente* peuvent être écrites comme suit:

$$(5.)\quad dx:dy:dz:dt=\frac{d\Omega}{da}:\frac{d\Omega}{db}:\frac{d\Omega}{dc}:\frac{d\Omega}{de}.$$

Or, pour un point *singulier*, les quantités

$$\frac{d\Omega}{da},\quad \frac{d\Omega}{db},\quad \frac{d\Omega}{dc},\quad \frac{d\Omega}{de},$$

s'évanouissent. En écrivant

$$(6.)\quad \begin{Vmatrix} U & V & W & T \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 \end{Vmatrix} = \mathrm{U,\ V,\ W,\ T,\ T_1,\ T_2},$$

c'est à dire

$$(7.)\quad \begin{cases} \begin{vmatrix} V & W \\ V_1 & W_1 \end{vmatrix} = \mathrm{U}, & \begin{vmatrix} W & U \\ W_1 & U_1 \end{vmatrix} = \mathrm{V}, & \begin{vmatrix} U & V \\ U_1 & V_1 \end{vmatrix} = \mathrm{W}, \\ \begin{vmatrix} U & T \\ U_1 & T_1 \end{vmatrix} = \mathrm{T}, & \begin{vmatrix} V & T \\ V_1 & T_1 \end{vmatrix} = \mathrm{T_1}, & \begin{vmatrix} W & T \\ W_1 & T_1 \end{vmatrix} = \mathrm{T_2}, \end{cases}$$

les équations

$$(8.)\quad \frac{d\Omega}{da} = 0,\quad \frac{d\Omega}{db} = 0,\quad \frac{d\Omega}{dc} = 0,\quad \frac{d\Omega}{dc} = 0$$

donnent

$$(9.)\quad \begin{cases} * + \beta \mathrm{T_2} - \gamma \mathrm{T_1} + \varepsilon \mathrm{U} = 0 \\ -\alpha \mathrm{T_2} + * + \gamma \mathrm{T} + \varepsilon \mathrm{V} = 0 \\ \alpha \mathrm{T_1} - \beta \mathrm{T_2} + * + \varepsilon \mathrm{W} = 0 \\ \alpha \mathrm{U} + \beta \mathrm{V} + \gamma \mathrm{W} + * = 0. \end{cases}$$

Il y a à rémarquer que ces équations se trouvent être vérifiées pour des valeurs quelconques de α, β, γ, ε. On en s'assurera en éliminant ces quantités. Il en résulte

$$(10.)\quad \begin{vmatrix} * & \mathrm{T_2} & -\mathrm{T_1} & \mathrm{U} \\ -\mathrm{T_2} & * & \mathrm{T} & \mathrm{V} \\ \mathrm{T_1} & -\mathrm{T_2} & * & \mathrm{W} \\ \mathrm{U} & \mathrm{V} & \mathrm{W} & * \end{vmatrix} = (\mathrm{TU} + \mathrm{T_1 V} + \mathrm{T_2 W})^2 = 0;$$

équation identique.

Or ces équations n'équivalent qu'à *deux* équations indépendantes. En effet, si l'on multiplie la première par α, la seconde par β, la troisième par γ, la quatrième par ε, la somme de ces produits s'évanouit identiquement. Si l'on multiplie les trois premières par T, $\mathrm{T_1}$, $\mathrm{T_2}$, respectivement, la somme de ces produits donne

$$(11.)\quad \mathrm{TU} + \mathrm{T_1 V} + \mathrm{T_2 W} = 0;$$

équation identique. On peut aussi trouver explicitement les deux équations indépendantes. En multipliant les trois premières par U, V, W, respectivement,

la somme de ces produits donne

$$(12.)\qquad \varepsilon(U^2+V^2+W^2)-\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ U & V & W\\ T & T_1 & T_2\end{vmatrix}=0,$$

ce qui est la première expression; par conséquent la seconde n'est autre que

$$(13.)\qquad \alpha U+\beta V+\gamma W=0,$$

et les deux équations peuvent aussi être écrites ainsi:

$$(14.)\qquad \begin{vmatrix}\alpha U+\beta V+\gamma W & \alpha U_1+\beta V_1+\gamma W_1 & \varepsilon\\ U^2+V^2+W^2 & UU_1+VV_1+WW_1 & T\\ UU_1+VV_1+WW_1 & U_1^2+V_1^2+W_1^2 & T_1\end{vmatrix}=0,$$

$$(15.)\qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ U & V & W\\ U_1 & V_1 & W_1\end{vmatrix}=0.$$

Revenant aux équations (9.). On en tirera une conséquence remarquable. Savoir, en éliminant α, β, γ, ε, tour à tour des trois premières équations, il en résulte,

$$(16.)\qquad \alpha:\beta:\gamma = T:T_1:T_2,$$

et parsuite

$$(17.)\qquad U=0,\quad V=0,\quad W=0,$$

c'est à dire

$$(18.)\qquad U:V:W = U_1:V_1:W_1.$$

A l'aide de ces expressions les équations (16.) donnent

$$(19.)\qquad \alpha:\beta:\gamma = U:V:W,$$

ce qui n'arrive pas necessairement. Donc on doit avoir

$$(20.)\qquad T=0,\quad T_1=0,\quad T_2=0,$$

et enfin

$$(21.)\qquad U:V:W:T = U_1:V_1:W_1:T_1.$$

Par ces conditions deux cas géométriques dans leques elles se trouvent satisfaites peuvent être déterminés; 1°, si les deux surfaces *se touchent* au point (x, y, z, t), et 2°, si

$$(22.)\qquad U=0,\quad V=0,\quad W=0,\quad T=0,$$

ou bien

$$(23.)\qquad U_1=0,\quad V_1=0,\quad W_1=0,\quad T_1=0,$$

c'est à dire, si F, ou la surface G, a elle même un *point singulier*.

Mais comme dans ce cas les équations (5.) deviennent illusoires, il est

nécessaire d'évaluer les rapports,

$$dx : dy : dz : dt$$

par la méthode des fractions à numérateurs et dénominateurs évanouissantes. On doit donc *différentier* les quantités U, V, W, T, ou bien les quantités U_1, V_1, W_1, T_1, et substituer leur différentielle dans les équations (5.); ou, ce qui revient au même, les équations (5.) seront encore vérifiées, si l'on écrit au lieu de (4.):

$$(24.)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} u\,dx + w'dy + v'dz + p\,dt & U_1 & \alpha & a \\ w'dx + v\,dy + u'dz + q\,dt & V_1 & \beta & b \\ v'dx + u'dy + w\,dz + r\,dt & W_1 & \gamma & c \\ p\,dx + q\,dy + r\,dz + s\,dt & T_1 & \varepsilon & e \end{vmatrix}$$

ou bien l'expression que l'on obtient en différentiant les quantités relatives à G, au lieu de celles relatives à F. En ne considérant maintenant que le premier cas, et en écrivant

$$(25.)\qquad \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 \end{Vmatrix} = L,\ M,\ N,\ K,\ K_1,\ K_2,$$

en ayant égard aux définitions (7.), on tire des équations (5.), avec la nouvelle valeur de Ω:

$$dx : -dy : dz : -dt$$

$$(26.)\quad \left\{\begin{array}{l} = (\ *\ + w'K_2 - v'K_1 + pL)\,dx + (\ *\ + vK_2 - u'K_1 + qL)\,dy \\ :(-uK_2 +\ *\ + v'K + pM)\,dx + (-w'K_2 +\ *\ + u'K + qM)\,dy \\ :(\ uK_1 - w'K +\ *\ + pN)\,dx + (\ w'K_1 - vK +\ *\ + qN)\,dy \\ :(\ uL + w'M + v'N +\ *\ )\,dx + (\ w'L + vM + u'N +\ *\ )\,dy \\ + (\ *\ + u'K_2 - wK_1 + rL)\,dz + (\ *\ + qK_2 - rK_1 + sL)\,dt \\ + (-v'K_2 +\ *\ + wK + rM)\,dz + (-pK_2 +\ *\ + rK + sM)\,dt \\ + (\ v'K_1 - u'K +\ *\ + rN)\,dz + (\ pK_1 - qK +\ *\ + sN)\,dt \\ + (\ v'L + u'M + w'N +\ *\ )\,dz + (\ pL + qM + rN +\ *\ )\,dt \end{array}\right.$$

et delà on tire

$$(27.)\quad \left\{\begin{vmatrix} * + w'K_2 + v'K_1 + pL - \theta & * + vK_2 - u'K_1 + qL \\ -uK_2 + * + v'K + pM & -w'K_2 + * + u'K + qM + \theta \\ uK_1 - w'K + * + pN & w'K_1 - vK + * + qN \\ uL + w'M + v'N + * & w'L + vM + u'N + * \\ * + u'K_2 - wK_1 + rL & * + qK_2 - rK_1 + sL \\ -v'K_2 + * + wK + rM & -pK_2 + * + rK + sM \\ v'K_1 - u'K + * + rN - \theta & pK_1 - qK + * + sN \\ v'L + u'M + wN + * & pL + qM + rN + * + \theta \end{vmatrix}\right. = 0.$$

Or cette équation, qui en apparence est du quatrième degré, ne l'est en effet que du second degré; comme cela se fera voir tout de suite. En effet, si $\theta = 0$, le déterminant dont il s'agit, devient

$$(28.)\quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p \\ w' & v & u' & q \\ v' & u' & w & r \\ p & q & r & s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} * & K_2 & -K_1 & L \\ -K_2 & * & K & M \\ K_1 & -K & * & N \\ L & M & N & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & w' & v' & p \\ w' & v & u' & q \\ v' & u' & w & r \\ p & q & r & s \end{vmatrix} (KL+K_1M+K_2N)^2$$

et il s'évanouit, parcequ'on a identiquement

$$(29.)\quad KL+K_1M+K_2N = 0.$$

En passant, il y a aussi à remarquer que le système inverse à

$$\begin{matrix} * & K_2 & -K_1 & L \\ -K_2 & * & K & M \\ K_1 & -K & * & N \\ L & M & N & * \end{matrix}$$

est

$$(30.)\quad \begin{vmatrix} * & N & -M & K \\ -N & * & L & K_1 \\ M & -L & * & K_2 \\ K & K_1 & K_2 & * \end{vmatrix} (KL+K_1M+K_2N);$$

ce qui peut être vérifié par un calcul immédiat, ou bien aussi en écrivant le système donné avec la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} 1 & * & * & L \\ * & 1 & * & M \\ * & * & 1 & N \\ K & K_1 & K_2 & * \end{vmatrix}^2$$

Il suit de là que le système inverse à (27.) (c'est à dire les fonctions que M. *Sylvestre* a nommé *mineurs premiers*) s'évanouit pour $\theta = 0$. Mais le coefficient de θ dans le développement de (27.) est la somme de ceux des *mineurs premiers* qui se trouvent placés sur la *diagonale* de (27.) et qu'on peut nommer *mineurs premiers principaux;* donc il s'ensuit que non seulement le terme indépendant de θ, mais aussi de plus, le coefficient de θ s'évanouit; et l'on en tire enfin, après quelques réductions:

$$(31.)\quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & \alpha & U_1 \\ w' & v & u' & q & \beta & V_1 \\ v' & u' & w & r & \gamma & W_1 \\ p & q & r & s & \varepsilon & T_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon & * & * \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 & * & * \end{vmatrix} + 2\theta \begin{vmatrix} p & q & r \\ \alpha & \beta & \gamma \\ U_1 & V_1 & W_1 \end{vmatrix} + \theta^2 = 0.$$

Cette équation donne deux valeurs de θ, à l'aide desquelles on pourra déterminér deux valeurs des rapports $dx:dy:dz:dt$, c'est à dire les directions des deux branches de la courbe, qui passent par le point (x, y, z, t).

La nature du point dont il s'agit, dépend de la nature des racines de l'équation (31.); c'est à dire de la nature de la fonction

$$(32.)\quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & \alpha & U_1 \\ w' & v & u' & q & \beta & V_1 \\ v' & u' & w & r & \gamma & W_1 \\ p & q & r & s & \varepsilon & T_1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon & * & * \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 & * & * \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & \alpha & U_1 \\ w' & v & u' & q & \beta & V_1 \\ v' & u' & w & r & \gamma & W_1 \\ p & q & r & * & * & * \\ \alpha & \beta & \gamma & * & * & * \\ U_1 & V_1 & W_1 & * & * & * \end{vmatrix} <, =, > 0.$$

Les différentes espèces de ces points sont si bien connues qu'il n'est pas nécessaire de les discuter ici.

Il y a à remarquer, qu'un second système de conditions peut être trouvé en faisant varier les quantités relatives à G au lieu de celles relatives a F, c'est à dire en écrivant

$$(33.)\quad \Omega = \begin{vmatrix} U & u_1 dx + w'_1 dy + v'_1 dz + p_1 dt & \alpha & a \\ V & w'_1 dx + v_1 dy + u'_1 dz + q_1 dt & \beta & b \\ W & v'_1 dx + u'_1 dy + w_1 dz + r_1 dt & \gamma & c \\ T & p_1 dx + q_1 dy + r_1 dz + s_1 dt & \varepsilon & e \end{vmatrix}$$

au lieu de (24.). Donc les points multiples sont distribués en deux classes; et on peut nommer ceux, qui sont déterminées par (24.) etc., *points multiples relatifs à la surface F,* et ceux, qui sont déterminés par (33.) etc., *points multiples relatifs à la surface G.* Si la fonction (32.) est $= 0$, on obtient l'équation d'une surface qui touche la courbe dans ses points *d'osculation et d'embrassement,* ainsi que dans ses points de *rebroussement,* distingués les uns des autres par des conditions bien connues. Par conséquent, si les surfaces F et G sont des ordres m et n respectivement, le nombre des points de cette nature est, 1° relativement à la surface F:

$$= 2mn(m + n - 3),$$

et 2° relativement à la surface G:

$$= 2mn(m+n-3).$$

Je passe maintenant à discuter les conditions de l'existence d'un point *d'inflexion*. Dans un tel point les deux éléments consécutifs de la courbe ont la même *tangente*, ce qui doit arriver si

$$(34.)\quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{da} = 0, \quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{db} = 0, \quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{dc} = 0, \quad \mathrm{D}\frac{d\Omega}{de} = 0,$$

c'est à dire, en écrivant

$$(35.)\quad \begin{cases} \mathrm{DU} = \mathrm{U}', & \mathrm{DV} = \mathrm{V}', & \mathrm{DW} = \mathrm{W}', \\ \mathrm{DT} = \mathrm{T}', & \mathrm{DT} = \mathrm{T}_1', & \mathrm{DT} = \mathrm{T}_2', \end{cases}$$

$$(36.)\quad \begin{cases} \quad * \quad + \beta\mathrm{T}_2' - \gamma\mathrm{T}_1' + \varepsilon\mathrm{U}' = 0, \\ -\alpha\mathrm{T}_2' + \quad * \quad + \gamma\mathrm{T}' + \varepsilon\mathrm{V}' = 0, \\ \alpha\mathrm{T}_1' - \beta\mathrm{T}' + \quad * \quad + \varepsilon\mathrm{W}' = 0, \\ \alpha\mathrm{U}' + \beta\mathrm{V}' + \gamma\mathrm{W}' + \quad * \quad = 0, \end{cases}$$

d'ou l'on tire, comme dans le cas de (9.):

$$(37.)\quad \begin{cases} \mathrm{U}' = 0, & \mathrm{V}' = 0, & \mathrm{W}' = 0, \\ \mathrm{T}' = 0, & \mathrm{T}_1' = 0, & \mathrm{T}_2' = 0, \end{cases}$$

c'est à dire

$$(38.)\quad \mathrm{D}U : \mathrm{D}V : \mathrm{D}W : \mathrm{D}T = U_1 : V_1 : W_1 : T_1,$$

ou bien

$$(39.)\quad \mathrm{D}U_1 : \mathrm{D}V_1 : \mathrm{D}W_1 : \mathrm{D}T_1 = U : V : W : T,$$

d'ou l'on tire, en éliminant dx, dy, dz, dt,

$$(40.)\quad \begin{vmatrix} u & w' & v' & p & U_1 \\ w' & v & u' & q & V_1 \\ v' & u' & w & r & W_1 \\ p & q & r & s & T_1 \\ U_1 & V_1 & W_1 & T_1 & * \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ou bien,} \quad (41.)\quad \begin{vmatrix} u_1 & w_1' & v_1' & p_1 & U \\ w_1' & v_1 & u_1' & q_1 & V \\ v_1' & u_1' & w_1 & r_1 & W \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 & T \\ U & V & W & T & * \end{vmatrix} = 0.$$

Donc l'équation (40.) détermine les points d'*inflexion* relatifs à F, et (41.) ceux relatifs à G; et leur nombre est par conséquent

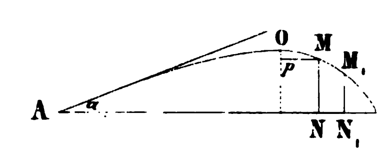
$$(\alpha.)\quad mn(2m+3n-8) \quad \text{et} \quad (\beta.)\quad mn(3m+2n-8).$$

comme l'a fait remarquer M. *Hesse*. Mais si $m=1$, la fonction (41.) s'évanouit identiquement, et l'expression $(\beta.)$ n'a pas lieu. Les fonctions (40.) et (41.) sont en effet identiques avec celles P et Q du mémoire de M. *Hesse* (tome 41. p. 283 de ce journal).

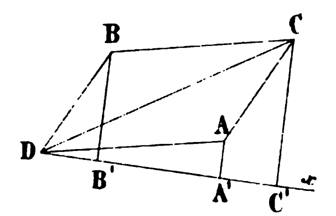
Londres, Novbr. 1851.

Druck von G. Reimer in Berlin.

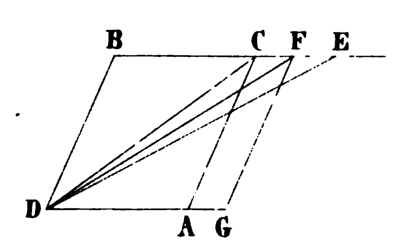
1. A.



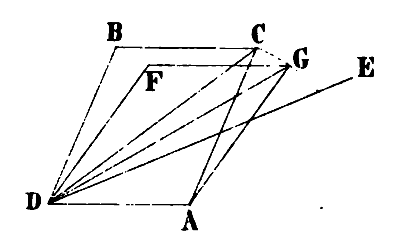
1.



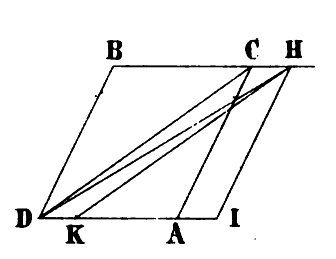
2.



3.



4.



1.

b p c a y' x'

2.

c f g h d e

3.

x y z

4.

D B B, b e a c d

5.

B D B, D, B, a c c x

6.

A g X Y

7.

B A p_2 p_1 p k c_1 q p_3 D

